УДК 517.983

ФОРМУЛЫ СВЯЗИ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ АБСТРАКТНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

COMMUNICATION FORMULAS BETWEEN SOLUTIONS OF THE ABSTRACT SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

А.В. Глушак, Т.Г. Романченко
A.V. Glushak, T.G. Romanchenko

Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: glushak@.bsu.edu.ru; romanchenko_t@.bsu.edu.ru

Аннотация. Приводятся формулы, связывающие решения различных дифференциальных уравнений с сингулярной особенностью в коэффициентах.

Resume. The formulas connecting solutions of various differential are given the equations with singular feature in coefficients.

Ключевые слова: сингулярные уравнения, уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, абстрактная задача Коши, операторная функция Бесселя.

Key words: singular equations, equation of Euler–Poisson–Darboux equation, abstract Cauchy problem, operator function of Bessel.

Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. При $k > 0$ рассмотрим абстрактную задачу Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу:

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \qquad t > 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \tag{2}$$

Задача (1–2) исследована в работе [1], в которой необходимое и достаточное условия разрешимости сформулированы в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda)$ и ее весовых производных. В работе [2] получен критерий равномерной корректности этой задачи, который, в отличие от [1], формулируется в терминах дробной степени резольвенты и ее невесовых производных.

Обозначим через $C^n(I, E_0)$ пространство n раз сильно непрерывно дифференцируемых при $t \in I$ функцией со значением в $E_0 \subset E$.

Определение 1. Решением уравнения (1) называется функция $u(t)$, которая при $t \geq 0$ дважды сильно непрерывно дифференцируема, при $t > 0$ принимает значения, принадлежащие $D(A)$, то есть, $u(t) \in C^2(\overline{R}_+, E) \cap C(R_+, D(A))$, и удовлетворяет уравнению (1).

Определение 2. Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если существует заданная на E, коммутирующая с A операторная функция $Y_k(t; A)$ и числа $M \geq 1, \omega \geq 0$, такие, что для любого $u_0 \in D(A)$ функция $Y_k(t; A)u_0$ является ее единственным решением и при этом

$$\| Y_k(t; A) \| \leq M \exp(\omega t), \tag{3}$$

$$\| Y_k'(t; A)u_0 \| \leq Mt \exp(\omega t) \| Au_0 \|. \tag{4}$$

Функцию $Y_k(t; A)$ назовем операторной функцией Бесселя (ОФБ) задачи (1), (2), а множество операторов A, для которых задача (1), (2) равномерно корректна, обозначим через G_k, при этом G_0– множество генераторов операторной косинус-функции $C(t; A)$ и $Y_0(t; A) = C(t; A)$.

В определении 2 и в дальнейшем используется обозначение $Y_k'(t; A)u_0 = (Y_k(t; A)u_0)'$. По поводу терминологии см. [3] и [4]. Приведем некоторые свойства решений задачи (1), (2), которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 1 [2]. *Пусть задача (1), (2) равномерно корректна, т.е.,* $A \in G_k$. *Тогда* $A \in G_m$, *то есть, эта задача равномерно корректна и для* $m > k \geq 0$, *при этом соответствующая ОФБ* $Y_m(t;A)$ *имеет вид*

$$Y_m(t;A) = \frac{2}{B(k/2+1/2\,,m/2-k\,/\,2)}\int_0^1 s^k(1-s^2)^{(m-k)/2-1}Y_k(ts;A)ds, \qquad (5)$$

где $B(a,b)$ – *бета-функция Эйлера.*

Теорема 2 [2]. *Пусть задача (1), (2) равномерно корректна и* $Y_k(t;A)$ – *ОФБ для этой задачи. Тогда оператор* A *является генератором* C_0 – *полугруппы* $T(t;A)$ *и для этой полугруппы справедливо представление:*

$$T(t;A) = \frac{1}{2^k\Gamma(k/2+1/2)t^{(k+1)/2}}\int_0^\infty s^k\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)Y_k(s;A)ds. \qquad (6)$$

Наряду с уравнением (1) при $m > 0$ рассмотрим возмущенное операторным коэффициентом B уравнение:

$$u''(t) + \frac{m}{t}u'(t) + Bu(t) = Au(t), \qquad t > 0. \qquad (7)$$

В статье [5] исследован вопрос о принадлежности классу корректности G_m оператора $A-B$ в случае, когда $A \in G_k$, а B – ограниченный оператор и установлено, что $A-B \in G_m$, $m \geq k$.

Теорема 3 [5]. *Пусть для некоторого* $k > 0$ $A \in G_k$, B – *ограниченный оператор,* $Y_k(t;A)$ *и* B *коммутируют. Тогда* $A-B \in G_m$ *для любого* $m \geq k$. *При этом:*

$$Y_k(t;A-B) = Y_k(t;A) + \frac{(-1/2)^{N+1}\Gamma(k/2+1/2)t^2B}{\Gamma(k/2+1)\Gamma(N+1/2)}\times$$
$$\times\int_0^1 s^{2N}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\right)^N(1-s^2)^{k/2}\,{}_1F_2(1;k/2+1,2;t^2(s^2-1)B/4)Y_{2N}(ts;A)ds,$$

где N – *наименьшее целое число, такое, что* $2N \geq k$, $\Gamma(a)$ – *гамма-функция Эйлера,* ${}_1F_2(\alpha;\beta;\gamma;z)$ – *обобщенная гипергеометрическая функция, а* ОФБ $Y_m(t;A-B)$ *при* $m > k$ *определяется через* ОФБ $Y_k(t;A-B)$ *по формуле (5), записанной для оператора* $A-B$.

Если $(-B) \in G_p$, *то в работе [6] установлено, что замыкание оператора* $A-B$ *принадлежит* G_m, $m \geq k+p+1$.

Теорема 4 [6]. *Пусть для некоторого* $k \geq 0$ $A \in G_k$ *и* $(-B) \in G_{m-k-1}$ *для* $m \geq k+1$, $Y_k(t;A)$ *и* $Y_{m-k-1}(t;-B)$ *коммутируют на* $D = D(A)\cap D(B)$, $\overline{D} = E$. *Тогда замыкание оператора* $A-B$ *принадлежит* G_m, *и при этом:*

$$Y_m(t;\overline{A-B}) = \frac{2}{B(k/2+1/2\,,m/2-k/2)}\times$$
$$\times\int_0^1 s^k(1-s^2)^{(m-k)/2-1}Y_{m-k-1}\left(t\sqrt{1-s^2};-B\right)Y_k(ts;A)ds \qquad (8)$$

В общем случае суммы n операторов установлена следующая теорема.

Теорема 5 [6]. *Пусть* $A_j \in G_{k_j}, k_j \geq 0$, $j = 1,\dots,n$. *Если при* $i \neq j$ A_i *и* A_j *коммутируют на*

$$D = \bigcap_{j=1}^n D(A_j) \text{ и } \overline{D} = E, \text{ то замыкание оператора } A = \sum_{j=1}^n A_j \text{ принадлежит } G_k \text{ для } k = n-1+\sum_{j=1}^n k_j$$

и при этом:

$$Y_t(t;\overline{A}) = \frac{2^{n-1}\Gamma(k/2+1/2)}{\prod_{j=1}^n\Gamma(k_j/2+1/2)}\int_\Omega\prod_{j=1}^n y_j^{k_j}Yk_j\left(ty_j;A_j\right)dy,$$

где $\Omega = \{|y| = 1,\ y_1,\dots,y_n \geq 0\}$.

Теорема 6 [7]. *Пусть* $u_0 \in D(B)$, $A = 0$ *и оператор* B *является генератором равномерно ограниченной* C_0*-полугруппы* $T(t;B)$. *Тогда при* $m < 1$ *функция*

$$u(t) = \frac{(t/2)^{1-m}}{\Gamma(1/2-m/2)}\int_0^\infty s^{m/2-3/2}\exp\left(-\frac{t^2}{4s}\right)T(s;B)u_0ds$$

является единственным ограниченным решением уравнения (7), удовлетворяющим условию $u(0) = u_0$.

Теорема 7 [7]. *Пусть* $u_0 \in D(B), A = 0$, *оператор* $B \in G_p$ *при некотором* $p \geq 0$ *и* $Y_p(t; B)$ *– соответствующая равномерно ограниченная ОФБ. Тогда при* $m < 1$ *функция:*

$$u(t) = \frac{2t^{1-m}}{B(k/2+1/2, 1/2-m/2)} \int_0^{\infty} y^p (t^2+y^2)^{m/2-p/2-1} Y_p(y; B)\, u_0 dy$$

является единственным ограниченным решением уравнения (7), удовлетворяющим условию $u(0) = u_0$.

Уравнение (7) естественно называть абстрактным сингулярным ультрагиперболическим уравнением. Известно, что, задача Коши для ультрагиперболического уравнения некорректна. В зависимости от операторов A и B для уравнения (7) может быть корректна как задача Коши (гиперболический случай, см. теоремы 3 – 5), так и задача Дирихле (эллиптический случай, см. теоремы 6, 7), поэтому для выделения единственного решения уравнения (7) требуется различное задание дополнительных условий. Отметим, что вопросы разрешимости и корректности конкретных ультрагиперболических уравнений исследовалось раннее в работах [8-11].

В дальнейшем мы хотим получить явные формулы для решений ультрагиперболического уравнения в более общих случаях, чем в теоремах 3, 4, 6 и 7.

Учитывая теорему 1, при $m > k \geq 0$ введем в рассмотрение функцию

$$v(t) = \int_0^1 s^k (1-s^2)^{(m-k)/2-1} W\left(t\sqrt{1-s^2}; B\right) Y_k(ts; A) u_0 ds, \qquad (9)$$

с подлежащей определению операторной функцией $W(t; B)$ и выясним, какому уравнению она удовлетворяет.

Отметим, что при $B = 0$, $A \in G_k$ и $A = 0, (-B) \in G_{m-k-1}$ равенство (9) превращается в формулу (5) сдвига по параметру из теоремы 1.

Вычислив $v'(t), v''(t)$ и $Av(t)$, после элементарных вычислений получим:

$$v''(t) + \frac{m}{t} v'(t) - Av(t) = \int_0^1 s^{k+1} (1-s^2)^{(m-k-1)/2} W'\left(t\sqrt{1-s^2}; B\right) Y_k'(ts; A) u_0 ds +$$

$$+ \frac{m}{t} \int_0^1 s^k (1-s^2)^{(m-k-1)/2} W'\left(t\sqrt{1-s^2}; B\right) Y_k(ts; A) u_0 ds +$$

$$+ \int_0^1 s^k (1-s^2)^{(m-k)/2} W''\left(t\sqrt{1-s^2}; B\right) Y_k(ts; A) u_0 ds =$$

$$= \frac{1}{t} s^{k+1} (1-s^2)^{(m-k-1)/2} W'\left(t\sqrt{1-s^2}; B\right) Y_k'(ts; A) u_0 \Big|_{s=0}^{s=1} +$$

$$+ \int_0^1 s^k (1-s^2)^{(m-k)/2-1} \left(W''\left(t\sqrt{1-s^2}; B\right) + \frac{m-k-1}{t\sqrt{1-s^2}} W'\left(t\sqrt{1-s^2}; B\right) \right) Y_k(ts; A) u_0 ds. \qquad (10)$$

Из (10) следует, что если в качестве $W(t) = W_{m-k-1}(t)$ взять решение уравнения

$$w''(t) + \frac{m-k-1}{t} w'(t) + Bw(t) = 0, \qquad (11)$$

то определяемая равенством (9) функция $v(t)$ будет решением уравнения

$$v''(t) + \frac{m}{t} v'(t) + Bv(t) = Av(t) + F(t), \qquad (12)$$

где

$$F(t) = \lim_{\tau \to 0} \tau^{m-k-1} W_{m-k-1}'(\tau) t^{k-m} Y_k(t) u_0. \qquad (13)$$

Таким образом справедлива теорема 8.

Теорема 8. *Пусть для некоторого* $k \geq 0$ $A \in G_k, m > k$ *и* $W_{m-k-1}(t; B)$ *– решение уравнения (11). Если* $Y_k(t; A)$ *и* $W_{m-k-1}(t; B)$ *коммутируют на* $D = D(A) \cap D(B), u_0 \in D$, *то функция*

$$v(t) = \frac{2}{B(k/2+1/2, m/2-k/2)} \int_0^1 s^k (1-s^2)^{(m-k)/2-1} W_{m-k-1}\left(t\sqrt{1-s^2}; B\right) Y_k(ts; A) u_0 ds \qquad (14)$$

является решением уравнения (12) и удовлетворяет условию $v(0) = u_0$.

В заключении отметим, что если в равенстве (13) предел справа равен 0, что, например, имеет место для $(-B) \in G_{m-k-1}$ (см. теорему 4), то определяемая равенством (14) функция $v(t)$ удовлетворяет однородному уравнению (12) или, что то же самое, уравнению (7).

Работа А.В. Глушака выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-01-00197 А-2016

Список литературы

1. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя / А.В. Глушак // ДАН. – 1997. – Т. 352. – № 5. – С. 587 – 589.

Glushak A.V. Operator function of Bessel / A.V. Glushak // It is GIVEN. – 1997. – T. 352. – № 5. – P. 587 – 589.

2. Глушак А.В. Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу / А.В. Глушак, О.А. Покручин // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52. – № 1. – С. 41–59.

Glushak A.V. Pokruchin O. A. Kritery of resolvability of a task of Cauchy for the abstract equation of Euler-Poisson-Darboux is twisted / A.V. Glushak, O.A. Pokruchin // Differents. equations. – 2016. – T. 52. – № 1. – P. 41 – 59.

3. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. – Киев: Выща школа, 1989.

Goldsteyn Dzh. Semi-groups of linear operators and their appendix / Dzh. Goldsteyn. – Kiev: Vyshcha school, 1989.

4. Васильев В.В., Пискарев С.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве II. Теория косинус оператор-функций // http://www.srcc.msu.su/nivc/english/about/home_pages/piskarev/obz2ru.pdf

Vasilyev V. V., Piskarev S. I. The differential equations in banakhovy space of II. Theory cosine operator functions // http://www.srcc.msu.su/nivc/english/about/home_pages/piskarev/obz2ru.pdf

5. Глушак А.В. О возмущении абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу / А.В. Глушак // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60. – № 3. – С. 363–369.

Glushak A.V. About indignation of the abstract equation of Euler-Poisson-Darboux / A.V. Glushak // Matem. fortags. – 1996. – T. 60. – № 3. – P. 363 – 369.

6. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя и связанные с нею полугруппы и модифицированное преобразование Гильберта / А.В. Глушак // Дифференциальные уравнения. –1999. – Т. 35. – № 1. – С. 128–130.

Glushak A.V. Operator function of Bessel and the semi-groups connected with it and the modified Gilbert's transformation / A.V. Glushak // Differents equations. – 1999. – T. 35 – № 1. –P. 128 –130.

7. Глушак А.В. О стабилизации решения задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения в банаховом пространстве / А.В. Глушак. Дифференциальные уравнения. 1997. – Т. 33. – № 4. – С. 433 – 437.

Glushak A.V. About stabilization of the solution of a task of Dirikhle for one elliptic equation in banakhovy space / A.V. Glushak // Differents. equations. – 1997. – T. 33. – № 4. – P. 433 – 437.

8. Благовещенский А.С. О характеристической задаче для ультрагиперболического уравнения / А.С. Благовещенский // Матем. сб. – 1964. – Т. 63 (105). – № 1. – С. 137–168.

Blagoveshhenskij A.S. About a characteristic task for the ultrahyperbolic equation / A.S. Blagoveshhenskij // Mathem. call. – 1964. – T. 63 (105). – № 1. – P. 137–168.

9. Костомаров Д.П. Задачи Коши для ультрагиперболических уравнений / Д.П. Костомаров. – М.: Наука, 2003.

Kostomarov D.P. Cauchy's tasks for the ultrahyperbolic equations / D.P. Kostomarov. – M.: Science, 2003.

10. Ляхов Л.Н. Формулы решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения с оператором Бесселя по времени / Л.Н. Ляхов, И.П. Половинкин, Э.Л. Шишкина // ДАН. – 2014. – Т. 459. – № 5. – С. 1–6.

Ljahov L.N. Formulas of the solution of a task of Cauchy for the singular wave equation with Bessel's operator on time / L.N. Ljahov, I.P. Polovinkin, E.L. Shishkina // It is GIVEN. – 2014. – T. 459. – № 5. – P. 1–6.

11. Ляхов Л.Н. Об одной задаче И.А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения / Л.Н. Ляхов, И.П. Половинкин, Э.Л. Шишкина // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50. – № 4. – С. 516–528.

Ljahov L.N. About one task of I.A. Kipriyanov for the singular ultrahyperbolic equation / L.N. Ljahov, I.P. Polovinkin, E.L. Shishkina // Differents equations. – 2014. – T. 50. – № 4. – P. 516–528.