УДК 517.956.4

СИЛЬНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

STRONG MAXIMUM PRINCIPLE FOR AN PARABOLLIC OPERATOR ON A STRATIFIED SET

Д.В. Савастеев
D.V. Savasteev

Воронежский государственный университет, Россия, 394006, Россия, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
Voronezh State University, 1 Universitetskaya pl., Voronezh, 394006, Russia

E-mail: savasteev@gmail.com

Аннотация. Доказан сильный принцип максимума для аналога параболического оператора на стратифицированном множестве. Показано, что решение параболического уравнения на стратифицированном множестве с неотрицательной правой частью может иметь внутри стратифицированного цилиндра локальный максимум, только если решение равно константе в некоторой окрестности этого максимума. Также доказан аналог леммы Олейник-Хопфа о нормальной производной на стратифицированном множестве. Показано, что если нормальная производная решения параболического уравнения на стратифицированном множестве с неотрицательной правой частью существует и для границы выполняется так называемое условие гиперплоскости, то нормальная производная в этой точке меньше нуля.

Resume. We prove the strong maximum principle for an analogue of parabolic operators for stratified sets. It is shown, that the solution of a parabolic equation on a stratified set with nonnegative right side can possess a local maximum inside of a stratified cylinder only if solution is a constant in some neighborhood of this maximum. In addition, we prove an analogue of the Hopf-Oleynik normal derivative lemma for stratified sets. We show that if the normal derivative of the solution of a parabolic equation on a stratified set with nonnegative right side exists in some maximum point on the lateral boundary of the cylinder and the boundary satisfies so-called hyperplane condition then this derivative is negative in this point.

Ключевые слова: стратифицированное множество, сильный принцип максимума, лемма о нормальной производной.

Keywords: stratified set, strong maximum principle, lemma of normal derivative.

Введение

В последнее время внимание специалистов всё больше привлекают дифференциальные уравнения на так называемых стратифицированных множествах. Многие прикладные задачи приводят к таким уравнениям. Однако их качественная теория на сегодняшний момент развита слабо. Например, для параболических уравнений сильный принцип максимума в его общей постановке не доказан. Связано это с тем, что лемма Олейник–Хопфа о нормальной производной, с помощью которой обычно доказывается сильный принцип максимума в классическом случае, на стратифицированном множестве наталкивается на серьёзные препятствия. Поэтому к настоящему моменту такое обобщение было получено лишь в случае двумерных стратифицированных множеств [3]. Для эллиптических уравнений сильный принцип максимума был доказан для стратифицированного множества произвольной размерности, но с ограничением на геометрию стратов [4].

Данная работа посвящена переносу доказательства сильного принципа максимума с эллиптического случая на параболический. Кроме того, некоторые идеи получили развитие, что позволило доказать принцип максимума для произвольного стратифицированного множества без ограничения на геометрию стратов.

Основные понятия

В этом параграфе мы приведём основные понятия теории стратифицированных множеств. Мы ограничимся лишь кратким описанием. Подробные определения в источнике [1].

Под стратифицированным множеством будем понимать тройку $(\Omega, \Sigma, \partial\Omega)$.

Здесь $\Omega \subset R^d$ – связное ограниченное множество с индуцированной из R^d топологией и метрикой. Σ – разбиение Ω на конечное число многообразий различной размерности. Каждое такое многообразие мы будем называть стратом и обозначать σ_{kj}. В обозначении: k – размерность страта ($k = 0,\dots,K$), j – порядковый номер ($j = 1,\dots,J(k)$). Мы также допускаем использование σ_k для обозначения произвольного страта размерности k. Множество $\partial\sigma_k = \bar{\sigma}_k k$ мы будем называть границей страта. Требования на гладкость стратов и их границы мы приведём позже.

Для разбиения Σ предполагается выполнение следующих условий:

– никакие два страта не пересекаются;

– граница каждого страта представима в виде объединения некоторых других стратов из Σ.

Если $\sigma_k \subset \partial\sigma_m$, то будем называть σ_k гранью σ_m, говорить, что σ_m примыкает к σ_k. Из свойств 1 и 2 следует, что любая грань одного страта и любая грань другого либо не пересекаются, либо совпадают. Если страт не является ничьей гранью, то такой страт мы называем свободным. Любой страт максимальной размерности является свободным. Размерностью стратифицированного множества будем называть максимальную размерность его стратов. Заметим, что размерность стратифицированного множества вообще говоря не совпадает с размерностью пространства.

Далее, $\partial\Omega$ из тройки – это подмножество Ω. Предполагается выполнение следующих условий:

1. $\partial\Omega$ представимо в виде объединения некоторого числа стратов из Σ;
2. $\partial\Omega$ замкнуто;
3. множество $\Omega_0 = \Omega$ – связное, и $\overline{\Omega}_0 = \Omega$.

Множество $\partial\Omega$ мы будем называть границей стратифицированного множества.

Приведём теперь условия на гладкость стратов. Пусть $M_k \subset R^d$ – произвольное k-мерное многообразие. Будем называть M_k плоским, если существует такое линейное многообразие $L_k \subset R^d$ размерности k, что $M_k \subset L_k$. Итак, будем предполагать, что каждый внутренний страт σ_k (т.е. такой, что $\sigma_k \in \Omega_0$) является плоским. А каждый граничный страт – кусочно-гладкий. На этом определение стратифицированного множества окончено.

Так как под стратифицированным множеством мы понимаем тройку, то изменение хотя бы одного элемента тройки порождает новое стратифицированное множество. Например, при фиксированном Ω можно по разному выбрать разбиение Σ. Аналогично, при фиксированных Ω и Σ можно по разному выбрать границу $\partial\Omega$.

Всюду далее для краткости мы будем использовать символ Ω для обозначения стратифицированного множества. При этом мы предполагаем, что с Ω ассоциировано некоторое разбиение Σ и граница $\partial\Omega$.

Далее, нам потребуется понятие стратифицированного подмножества. Пусть G – область в R^d с кусочно-гладкой границей. Если $G \cap \Omega_0$ – связное, то положим $\Omega' = \overline{G} \cap \Omega$. Будем рассматривать Ω' как самостоятельное стратифицированное множество. Его стратами будут пересечения G и ∂G со стратами Ω. В качестве границы можно выбрать

$$\partial\Omega' = (\partial G \cap \Omega) \cup (G \cap \partial\Omega).$$

Мы будем называть Ω' стратифицированным подмножеством множества Ω. Чаще всего мы будем рассматривать случай, когда множество G является шаром в R^d.

Определение 1. Будем называть радиус допустимым, если соответствующий шар с центром в точке x пересекает только те страты, для которых x является граничной точкой.

Определение 2. Стратифицированное множество, образованное пересечением с шаром допустимого радиуса, будем называть стратифицированным шаром. Пересечение стратифицированного множества со сферой будем называть стратифицированной сферой.

Рассмотрим внутреннюю точку $X \in \sigma_k \subset \Omega_0$. Пусть Ω' – стратифицированный шар допустимого радиуса с центром в точке X. Тогда в качестве границы $\partial\Omega'$ можно выбрать стратифицированную сферу.

Иногда нам придётся дополнительно включать в границу страт σ_k', где σ_k' – страт, образованный пересечением σ_k с Ω'. В этом случае множество $\Omega_0' = \Omega'$ может оказаться несвязным. Тогда, с формальной точки зрения, мы не можем рассматривать Ω' как стратифицированное множество. Поэтому мы разобьём множество Ω_0' на связные компоненты, и рассмотрим каждую из них по отдельности. Обозначим каждую компоненту связности множества Ω_0' через Ω_0^i. Обозначим замыкание $\overline{\Omega_0^i}$ через Ω^i.

Каждое Ω^i теперь можно рассматривать как самостоятельное стратифицированное множество. Его границей будет страт σ_k' и соответствующий участок стратифицированной сферы S^i. Каждое множество Ω^i будем называть связной компонентой стратифицированного шара Ω'.

Введём теперь на Ω функциональные пространства и дифференциальный оператор. Рассмотрим функцию $u : \Omega \to R$. Положим $C_\sigma(\Omega_0)$ – пространство функций на Ω_0 таких, что

$$\forall \sigma_k \in \Omega_0 : u_k \in C(\sigma_k),$$

где u_k – сужение u на σ_k. Положим $C_\sigma^2(\Omega_0)$ – пространство функций u на Ω таких, что

$$\forall \sigma_k \in \Omega_0 : u_k \in C^2(\sigma_k) \cap C^1(\overline{\sigma}_k).$$

Заметим, что от функций $u \in C_\sigma^2(\Omega_0)$ не требуется непрерывности целиком на Ω_0. Поэтому в конечном итоге мы будем рассматривать класс $C(\Omega) \cap C_\sigma^2(\Omega_0)$.

Пусть X – точка k-мерного страта σ_k, который является гранью некоторого $(k+1)$-мерного страта σ_{k+1}. Обозначим через ν_i – набор нормалей в точке x по направлению примыкающего страта σ_{k+1}. Так как страт σ_{k+1} может примыкать к σ_k более одного раза с разных сторон, то таких нормалей может быть несколько.

Определение 3. Каждую нормаль ν_i по всем примыкающим σ_{k+1} будем называть примыкающим направлением в точке x.

Пусть $p \in C_\sigma(\Omega_0)$ продолжаема по непрерывности на границу каждого страта. Обозначим $p|_i(x)$ – предел функции p в точке x со стороны ν_i. Введём на каждом страте из Ω_0 ортонормированную систему координат x_i. Рассмотрим оператор:

$$Lu(x) = a^{qr}(x)D_{qr}u(x) + b^q(x)D_q u(x) + p|_i(x)\frac{\partial u}{\partial \nu_i}(x),$$

D_{qr} и D_q – символы взятия производной по направлениям x_q и x_r, суммирование ведётся по повторяющимся элементам;

a^{qr} и b^q принадлежат пространству $C_\sigma(\Omega_0)$;

матрица a^{qr} – равномерно положительно определённая;

ν_i – некоторое примыкающее направление в точке X; суммирование ведётся по всем примыкающим направлениям;

$p \in C_\sigma(\Omega_0)$ продолжаема по непрерывности на границу каждого страта; $p|_i(x)$ – предел функции p в точке x со стороны ν_i; $p(x) > p_0 > 0$;

$\Lambda(X)/\lambda(X) < \infty$, $b^q(X)/\lambda(X) < \infty$ и $p/\lambda < \infty$ где $\Lambda(X)$ и $\lambda(X)$ – максимальное и минимальное собственные значения матрицы $a^{qr}(X)$.

Оператор L является аналогом равномерно эллиптического оператора для стратифицированного множества. Первые три условия и последнее – это стандартные условия для эллиптического оператора [2]. Сумму

$$a^{qr}(x)D_{qr}u(x)+b^{q}(x)D_{q}u(x)$$

будем называть классической частью оператора L. Слагаемое

$$p|_{i}(x)\frac{\partial u}{\partial v_i}(x)$$

будем называть частью из нормальных производных.

Введём теперь понятие стратифицированного цилиндра. Пусть Ω – стратифицированное множество. Рассмотрим декартово произведение $\Omega\times[0,T]$. Полученное множество будем обозначать Ω^T и называть стратифицированным цилиндром. Множество $\Omega_0^T=\Omega_0\times(0,T]$ будем называть внутренностью цилиндра, оставшееся множество – $\partial\Omega^T$ – границей цилиндра. Множества $\Omega_0\times\{0\}$ и $\Omega_0\times\{T\}$ будем называть нижней и верхней крышкой цилиндра, множество $\partial\Omega\times[0,T]$ - боковой границей. Таким образом граница стратифицированного цилиндра состоит из нижней крышки цилиндра и боковой границы.

При фиксированном $t\in[0,T]$ сечение цилиндра представляет из себя копию стратифицированного множества Ω, сдвинутое на величину t. Такое сечение мы будем обозначать Ω^t. Если $u\in C_\sigma^2(\Omega_0^t)$, то для сужения u на Ω_0^t определён эллиптический оператор L. Он состоит из двух частей – классической и части из нормальных производных. Каждую нормальную производную мы будем называть нормальной производной в пределах сечения.

Снабдим теперь каждую внутреннюю точку направлением ∂t. Положим следующие ограничения на функцию u. Для каждого сечения Ω_0^t сужение функции u принадлежит $C_\sigma^2(\Omega_0^t)$ и в каждой точке $x\in\Omega_0^T$ функция u имеет непрерывную производную по t. Такой класс функций мы обозначим через $C_{\sigma t}^2(\Omega_0^T)$ Для таких функций u определим оператора:

$$Tu=Lu-\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Оператора T мы будем называть параболическим.

Постановка задачи

Мы определили понятие стратифицированного цилиндра и оператора T. Теперь мы можем сформулировать основное утверждение статьи – сильный принцип максимума для параболического оператора.

Определение 4. Назовём точку X локальным тривиальным максимумом функции u, если в некоторой её окрестности функция u равна константе.

Теорема (принцип максимума). *Пусть* $u\in C(\Omega^T)\cap C_{\sigma t}^2(\Omega_0^T)$. *И пусть для неё выполняется неравенство:*

$$Tu\geq 0.$$

Тогда функция u *не может иметь внутри цилиндра и на верхней крышке локального нетривиального максимума.*

Лемма о нормальной производной

Для доказательства принципа максимума нам понадобится лемма о нормальной производной для параболического оператора.

Пусть Ω – стратифицированное множество. Рассмотрим граничную точку $x\in\partial\Omega$. Пусть v – некоторое примыкающее направление. Проведём через x гиперплоскость $H\in R^d$ так, чтобы направление v образовывало ненулевой угол с H . Обозначим через R_v^d – открытое полупространство, в сторону которого смотрит вектор v.

Будем говорить, что граница стратифицированного множества $\partial\Omega$ удовлетворяет в точке $x \in \partial\Omega$ условию гиперплоскости по отношению к направлению v, если существует такая гиперплоскость $H \in R^d$, которая проходит через x, а граница $\partial\Omega$ не пересекает полупространство R_v^d .

Сформулируем лемму о нормальной производной.

Лемма [о нормальной производной]. Пусть Ω^T – стратифицированный цилиндр, $u \in C(\Omega^T) \cap C^2_{\sigma,t}(\Omega_0^T)$. Пусть u удовлетворяет на Ω_0^T неравенству:

$$Tu \geq 0$$

и достигает своего максимума в некоторой точке X , лежащей на боковой границе цилиндра. И пусть также выполняется строгое неравенство $u(x) < u(X)$ для всех точек $x \in \Omega_0^T$.

Пусть Ω^t – сечение, которому принадлежит точка X , v – примыкающее направление в точке X в пределах этого сечения Ω^t , а граница сечения удовлетворяет условию гиперплоскости в точке X по отношению к v. Тогда, если существует производная $\frac{\partial u}{\partial v}$, то она меньше нуля.

Доказательство. Рассмотрим сечение Ω^t . Рассмотрим в Ω^t шар допустимого радиуса с центром в точке X . Переобозначим через Ω – компоненту связности шара (см. подробнее в первом разделе), в сторону которой смотрит направление v. Переобозначим σ_k – страт из Ω , в котором лежит точка X . Т.к. Ω – компонента связности стратифицированного шара, то граница $\partial\Omega$ представима в виде объединения двух множеств. Первое (обозначим его $\partial_1\Omega$) – участок границы $\partial\Omega^t$, второе (обозначим его $\partial_2\Omega$) – участок стратифицированной сферы. По условию леммы участок $\partial_1\Omega$ не пересекает полупространства R_v^d , а на $\partial_2\Omega$ для любого x выполняется неравенство $u(x) < u(X)$.

Построим цилиндр Ω^T достаточно малой высоты. До конца доказательства все рассмотрения будут вестись в новом цилиндре Ω^T . Обозначим через $\partial_1\Omega^T$ и $\partial_2\Omega^T$ участки боковой границы цилиндра, порождённые $\partial_1\Omega$ и $\partial_2\Omega$ соответственно. По построению на $\partial_2\Omega$ и на нижней крышке цилиндра выполняется неравенство $u(x) < u(X)$.

Основным этапом доказательства является построение специальной функции φ. Пусть L – линейное многообразие, проходящее через Ω . И пусть H – гиперплоскость в L, которая фигурирует в условии гиперплоскости границы $\partial\Omega$, то есть граница $\partial\Omega$ не пересекает полупространство R_v^d .

Положим для любой точки $x \in L$

$$\varphi'(x) = e^{\alpha h(x)} - 1 - \varepsilon_1 \,|\, x - X\,|^2,$$

где h – аффинная функция, которая равна нулю на H , а α и ε_1 – некоторые числа, которые мы определи позже. По построению $\phi \in C(\Omega) \cap C^2_\sigma(\Omega_0)$.

Утверждение 1. *Для функции φ выполняются следующие свойства:*

1. $\varphi'(X) = 0$;
2. $\varphi' \leq 0$ *на H и во всех точках $\partial_2\Omega$, лежащих в некоторой окрестности H ;*
3. $L\varphi' > 0$ *на* $\Omega_0 \cap R_v^d$*;*
4. $\frac{\partial\varphi'}{\partial v}\big|_{x=X} > 0$*, где v – примыкающее направление из условия леммы.*

Доказательство. Так как $h(X) = 0$, то $\varphi'(X) = 0$ (свойство 1).

Далее, результат оператора L, применённого к функции $e^{\alpha h}$, равен:

$$(Le^{\alpha h})(X) = e^{\alpha h(X)}(\alpha^2 a^{qr}(X)h_{x_q}h_{x_r} + \alpha b^q(X)h_{x_q} + \alpha p(X)\frac{\partial h}{\partial \nu}) \geq$$

$$\geq e^{\alpha h(X)}(\alpha\lambda(X)|\nabla h|^2 + \alpha b^q(X)h_{x_q} + \alpha\sum p(X)\frac{\partial h}{\partial \nu}) =$$

$$= e^{\alpha h(X)}\lambda(X)(\alpha^2|\nabla h|^2 + \alpha\frac{b^q(X)}{\lambda(X)}h_{x_q} + \alpha\sum\frac{p(X)}{\lambda(X)}\frac{\partial h}{\partial \nu})$$

По построению градиент ∇h перпендикулярен гиперплоскости H. Так как любой страт в R^d_ν образует с H ненулевой угол, то сужение величины $|\nabla h|^2$ на каждый страт из R^d_ν отделено от нуля. Так как по определению оператора L λ равномерно положительна на Ω_0, а величины

$$\alpha\frac{b^q(X)}{\lambda(X)}h_{x_q}, \ \frac{b^q(X)}{\lambda(X)}h_{x_q} \text{ и } \frac{p(X)}{\lambda(X)}\frac{\partial h}{\partial \nu}$$

ограничены, то, выбирая α достаточно большим, получим неравенство:

$$L(e^{\alpha h}-1) > C > 0.$$

В то же время, значение $L(|x-X|^2)$ ограничено. Поэтому, выбирая ε_1 достаточно малым, имеем $L\varphi' > 0$ (свойство 3).

Проверим свойство 2. Напомним, что по построению участок $\partial_2\Omega$ является подмножеством стратифицированной сферы с центром в точке X. Поэтому во всех точках $\partial_2\Omega$ значение $-\varepsilon_1|x-X|^2$ меньше некоторой отрицательной константы. В точках гиперплоскости H выполняется $e^{\alpha h}-1=0$. Это значит, что для некоторой окрестности $U(H)$ значение функции φ' на множестве $U(H)\cap\partial_2\Omega$ будет меньше отрицательной константы. Размер окрестности будет зависеть от ε_1. Но мы уже выбрали ε_1 и можем считать его фиксированным. Итак, на H и в пересечении некоторой окрестности H и $\partial_2\Omega$ имеем $\varphi'(x)\leq 0$ (свойство 2).

И наконец, так как в точке X производная h по ν больше нуля, а производная $|x-X|^2$ равна нулю, то производная φ' тоже будет больше нуля (свойство 4). Утверждение доказано.

Положим теперь для $x\in\Omega^T$ функцию $\varphi(x)=\varphi'(x')$, где x' – проекция точки x на Ω. Тогда

$$T\varphi = L\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} > 0.$$

Положим $\widetilde{u} = u + \varepsilon\varphi$.

Утверждение 2. *Существует такое* $\varepsilon > 0$, *что для всех точек* $x\in\Omega^T$ *выполняется неравенство* $\widetilde{u}(X)\geq\widetilde{u}(x)$.

Доказательство. По построению точка X лежит в Ω. Рассмотрим гиперплоскость H, проходящую через X. Продолжим H на всё пространство R^{d+1} перпендикулярно к Ω. Обозначим эту гиперплоскость через H^T. Пусть $U(H^T)$ – некоторая достаточно малая окрестность H^T. Тогда на множестве

$$\partial\Omega^T \cap ((R^{d+1}\nu^{d+1})\cup U(H^T))$$

выполняется $\varphi(x)\leq 0$. Поэтому $\widetilde{u}(x)\leq u(X)$. Оставшаяся часть границы является замкнутым множеством, на котором $u(x)<u(X)$. Поэтому на ней имеет место оценка $u(x)<u(X)-\delta$. Так как φ ограниченная, то при некотором $\varepsilon>0$ будет $\varepsilon\varphi<\delta$. Следовательно $\widetilde{u}(x)<u(X)$. Итак, имеем при $x\in\partial\Omega^T$ неравенство $\widetilde{u}(x)\leq u(X)$, при этом $\widetilde{u}(x)\leq\widetilde{u}(X)$.

Рассмотрим теперь множество Ω^T_0. На нём

$$Tu = a^{qr}(x)D_{qr}\widetilde{u}(x) + b^q(x)D_i\widetilde{u}(x) + \sum p\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\nu_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial t} > 0.$$

Пусть x – точка максимума функции u на Ω^T_0, тогда все производные по всем направлениям будут неположительные. Значит,

$$a^{qr}(x)D_{qr}\widetilde{u}(x)+b^{q}(x)D_{i}\widetilde{u}(x)-\frac{\partial u}{\partial t}>0.$$

В левой части неравенства стоит классический параболический оператор. Так как все коэффициенты и все производные, фигурирующие в этом неравенстве, непрерывные в пределах страта, то это неравенство выполняется в некоторой окрестности точки x, что противоречит наличию в точке x максимума, в силу классического принципа максимума для параболического оператора. Следовательно на Ω_0^T не может быть максимума.

Так как Ω^T – компакт, а функция u непрерывна, то она достигает своего максимума на Ω^T. Так как максимум не достигается на Ω_0^T, значит,

$$\sup_{\Omega_0^T}\le\sup_{\partial\Omega^T}\le\widetilde{u}(X).$$

Итак, мы получили при любом $x\in\Omega^T$ неравенство $\widetilde{u}(x)\le\widetilde{u}(X)$. Утверждение доказано.

Мы показали, что X – точка максимума функции u на множестве Ω^T. Так как по условию леммы в точке X существует производная по направлению v, то эта производная неположительная. А так как соответствующая производная функции φ по построению больше нуля, получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Основное доказательство

Перейдём теперь к доказательству сильного принципа максимума. Предположим противное. Пусть в Ω_0^T имеется локальный нетривиальный максимум. Выберем среди всех точек максимума такую, которая лежит на страте максимальной размерности. Если такой страт свободный, то получаем противоречие с классическим принципом максимума для параболического оператора. Пусть страт не является свободным. Рассмотрим сечение Ω^t. В пределах этого сечения рассмотрим все примыкающие направления.

Вырежем в окрестности точки X новый цилиндр. Будем считать, что он имеет достаточно малую высоту, его основание является шаром достаточно малого допустимого радиуса, а точка X оказывается на его верхней крышке. Обозначим новый цилиндр через $(\Omega')^T$, его основание через Ω', а страты основания через σ'.

Включим в границу цилиндра множество $(\sigma'_k)^T$. Тогда цилиндр распадается на связные компоненты (по аналогии со связными компонентами шара (подробнее в первом разделе). Обозначим их через $(\Omega^i)^T$, внутренность каждого – через $(\Omega^i_0)^T$. Граница $(\partial\Omega^i)^T$ каждой компоненты включает в себя $(\sigma'_k)^T$.

Утверждение 3. *Для любой компоненты связности $(\Omega^i)^T$ имеет место следующая альтернатива. Либо функция u равна константе на всём $(\Omega^i)^T$, либо для любой точки $x\in(\Omega^i)^T\setminus\sigma'_k$ выполняется неравенство $u(x)<u(X)$.*

Доказательство. Рассмотрим множество всех точек максимума функции u на $(\Omega^i_0)^T$. Согласно выбору точки X, множество точек максимума либо пустое, либо состоит из тривиальных максимумов. Если оно не пусто, то оно открыто, так как каждый тривиальный максимум содержится в нём вместе с некоторой окрестностью таких же тривиальных максимумов. С другой стороны, множество точек максимума замкнуто (относительно $(\Omega^i_0)^T$), так как функция u непрерывна. Таким образом, множество точек максимума на $(\Omega^i_0)^T$ либо совпадает со всем $(\Omega^i_0)^T$, либо пусто.

Если множество точек максимума на $(\Omega^i_0)^T$ совпадает со всем $(\Omega^i_0)^T$, то функция u является на $(\Omega^i_0)^T$ константой. Если множество точек максимума на $(\Omega^i_0)^T$ пусто, то по построению $(\Omega^i)^T\setminus\sigma'_k\Omega\subset\Omega_0^T$, для любой точки $x\in(\Omega^i)^T\setminus\sigma'_k$ выполняется неравенство $u(x)<u(X)$. Утверждение доказано.

Если функция u равна константе на $(\Omega^i)^T$, то по всем примыкающим направлениям в пределах сечения цилиндра $(\Omega^i)^T$ нормальная производная равна нулю. Если функция u не равна константе, то выполняются все условия леммы о нормальной производной. Следовательно по любому примыкающему направлению в пределах $(\Omega^i)^T$ нормальная производная меньше нуля.

Так как X – точка нетривиального максимума, то существует хотя бы одна компонента связности, на которой u не равна константе. Так как функция p из оператора L больше некоторого положительного числа, то

$$p|_i(x)\frac{\partial u}{\partial \nu_i}(X) < 0.$$

Значит, классическая часть оператора T больше нуля, что противоречит классическому принципу максимума, применённому к сужению функции u на σ_k^T. Теорема доказана.

Список литературы

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин и др. – М.: Физматлит, 2005. – 272 с.

Pokorny Y. V. Differential Equations on Geometric Graphs / Y. V. Pokorny, O.M. Penkin. – M.: Physmathlit, 2005. – 272 p.

2. Гилбарг Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

Gilbarg D. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order / D. Gilbarg, N. Trudinger. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001. – 518 p.

3. Куляба В.В. Принцип максимума для параболических неравенств на стратифицированных множествах / В.В. Куляба, О.М. Пенкин // Матем. заметки, Т. 73. – 2003. – С. 244–257.

Kulyaba V.V. The Maximum Principle for Parabolic Inequalities on Stratified Sets / V.V. Kulyaba, O.M. Penkin // Mathematical Notes, T. 73. – 2003. – С. 244–257.

4. Ощепкова С.Н Лемма о нормальной производной для лапласиана на полиэдральном множестве / С.Н. Ощепкова, О.М. Пенкин, Д.В. Савастеев // Матем. Заметки. – Т. 96. – 2014. – С. 116–125.

Oshchepkova S.N. The normal derivative lemma for the Laplacian on a polyhedral set S.N. Oshchepkova, O.M. Penkin, D.V. Savasteev // Mathematical Notes. – Т. 96. – 2014. – С. 116–125.