УДК 517.95

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ
FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLOCAL WAVE EQUATION

М.А. Керефов
M.A. Kerefov

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173

Kabardino-Balkarian State University, 173 Chernyshevsky St, Nalchik, 3600004, Russia

E-mail: kerefov@mail.ru

Аннотация. Рассматривается первая краевая задача для нелокального волнового уравнения. С помощью энергетических неравенств получена априорная оценка для решения рассматриваемой задачи.

Resume. We consider the first boundary value problem for a nonlocal wave equation. Using energy inequalities we obtained a priori estimate for the solution of this problem.

Ключевые слова: нелокальное волновое уравнение, производная дробного порядка, априорная оценка.

Key words: nonlocal wave equation, fractional derivative, priori estimate.

В данной работе рассматривается нелокальное волновое уравнение, описывающее новый тип волнового движения, занимающего промежуточное положение между обычной диффузией и классическими волнами [1]. Уравнения такого типа возникают при математическом моделировании сплошных сред с памятью [2]. В монографии [3] приведена подробная библиография по уравнениям в частных производных дробного порядка, в частности, рассматривается диффузионно-волновое уравнение.

В области $Q_T = (0,\ell)\times(0,T]$ рассмотрим задачу с условиями:

$$D_{0t}^{\alpha+1}u = u_{xx} + f(x,t),\ 0<x<l,\ \ 0<t\le T \tag{1}$$

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)\big|_{t=0} = u_0(x) \qquad D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)\big|_{t=0} = u_1(x) \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad 0\le t\le T \tag{3}$$

Здесь $D_{0t}^{\alpha}u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_0^t \frac{u(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}$ – дробная производная Римана–Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$.

Решение задачи можно найти методом разделения переменных [2]. В работе [4] методом разделения переменных найдено решение обобщенного уравнения переноса с дробной производной.

Допуская существование решения задачи (1–3), найдем априорную оценку для ее решения.

Потребуем от функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ помимо нужного порядка гладкости, выполнения условий $u_1(0) = u_1(l) = 0$.

Введем новую неизвестную функцию $v(x,t)$, полагая

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_1(x)$$

так, что $v(x,t)$ представляет отклонение функции $u(x,t)$ от известной функции $\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_1(x)$.

С учетом $D_{0t}^{\alpha+1}t^{\alpha-1} = 0$, имеем:

$$D_{0t}^{\alpha+1}v - v_{xx} = f(x,t) - \left(D_{0t}^{\alpha+1} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_1(x)\right) = f(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_1''(x).$$

Итак, функция $v(x,t)$ будет определяться как решение уравнения

$$D_{0t}^{\alpha+1}v - v_{xx} = F(x,t), \quad 0<x<l, \;\; 0<t\le T \tag{4}$$

с начальными условиями

$$D_{0t}^{\alpha}v(x,t)\Big|_{t=0} = D_{0t}^{\alpha}\left(u(x,t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_1(x)\right)\Bigg|_{t=0} = u_0(x) - \frac{u_1(x)}{\Gamma(\alpha)}D_{0t}^{\alpha}t^{\alpha-1}\Big|_{t=0} = u_0(x),$$

$$D_{0t}^{\alpha-1}v(x,t)\Big|_{t=0} = D_{0t}^{\alpha-1}\left(u(x,t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_1(x)\right)\Bigg|_{t=0} = u_1(x) - \frac{u_1(x)}{\Gamma(\alpha)}D_{0t}^{\alpha-1}t^{\alpha-1}\Big|_{t=0} = 0 \tag{5}$$

и граничными условиями

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \qquad 0\le t\le T, \tag{6}$$

где $F(x,t) = f(x,t) + \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_1''(x)$.

Умножив уравнение (4) скалярно на $D_{0t}^{\alpha}v$, получим априорную оценку

$$(D_{0t}^{\alpha+1}v, D_{0t}^{\alpha}v) - (v_{xx}, D_{0t}^{\alpha}v) = (F, D_{0t}^{\alpha}v), \tag{7}$$

где $(u,v) = \int_0^l uv\,dx$, $(u,u) = \|u\|_0^2$.

Преобразуем слагаемые тождества (7) с учетом (6):

$$\left(D_{0t}^{\alpha+1}v, D_{0t}^{\alpha}v\right) = \int_0^l \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t \frac{v(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\;\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\,dx =$$

$$= \int_0^l \frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t \frac{v(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\;\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\,dx = \int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\left(D_{0t}^{\alpha}v\right)^2 dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_0^2.$$

$$\left(v_{xx}, D_{0t}^{\alpha}v\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^l v_{xx}(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{ v_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\Bigg|_0^l - \int_0^l v_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v_x(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\,dx \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^l v_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v_x(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\,dx,$$

$$(F, D_{0t}^{\alpha}v) \le \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_0^2 + \varepsilon\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_0^2.$$

С учетом полученных неравенств из (7) получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^l v_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v_x(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\,dx \le \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_0^2 + \varepsilon\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_0^2. \tag{8}$$

Проинтегрируем (8) по τ от 0 до t с учетом (5):

$$\frac{1}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_0^2 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t d\tau\int_0^l v_x(x,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{\tau} \frac{v_x(x,\tau_1)\,d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{\alpha}}\,dx \le \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_{2,Q_t}^2 + \varepsilon\int_0^t \left\|D_{0t}^{\alpha}v(x,\tau)\right\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha}v(x,0)\right\|_0^2, \tag{9}$$

где $\|F\|_{2,Q_t}^2 = \int_0^t \|F(x,\tau)\|_0^2\,d\tau$.

Усилим неравенство (9), учитывая положительность оператора дробного дифференцирования [5]. В результате получим:

$$\frac{1}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_0^2 \le \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_{2,Q_t}^2 + \varepsilon\int_0^t \left\|D_{0t}^{\alpha}v(x,\tau)\right\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2}\left\|u_0(x)\right\|_0^2$$

или

$$\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_0^2 \le 2\varepsilon\int_0^t\left\|D_{0t}^{\alpha}v(x,\tau)\right\|_0^2 d\tau+\Phi(t),\tag{10}$$

где $\Phi(t)=\frac{1}{2\varepsilon}\|F\|_{2,Q_t}^2+\|u_0(x)\|_0^2$.

Введем обозначение:

$$y(t)=\int_0^t\left\|D_{0t}^{\alpha}v(x,\tau)\right\|_0^2 d\tau.$$

Тогда неравенство (10) примет вид:

$$\frac{dy}{dt}\le 2\varepsilon y(t)+F(t).$$

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма Гронуолла-Беллмана [6, с. 112].

Лемма. *Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция* $y(t)$ *удовлетворяет для почти всех t из [0,T] неравенству* $\frac{dy}{dt}\le c_1(t)y(t)+c_2(t)$, *где* $c_i(t)$ – *суммируемые на [0,T] неотрицательные функции. Тогда*

$$y(t)\le\exp\left(\int_0^t c_1(\tau)d\tau\right)\left[y(0)+\int_0^t c_2(\xi)\exp\left(-\int_0^{\xi}c_1(\tau)d\tau\right)d\xi\right]\le\exp\left(\int_0^t c_1(\tau)d\tau\right)\left[y(0)+\int_0^t c_2(\tau)d\tau\right].$$

Применяя лемму, получим:

$$\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_{2,Q_t}^2\le\exp(2\varepsilon t)t\Phi(t).$$

Откуда следует оценка:

$$\left\|D_{0t}^{\alpha}v\right\|_0^2\le M(t)\left(\|F\|_{2,Q_t}^2+\|u_0(x)\|_0^2\right)$$

или, возвращаясь к $u(x,t)$,

$$\left\|D_{0t}^{\alpha}u\right\|_0^2\le M(t)\left(\|f\|_{2,Q_t}^2+\|u_1''(x)\|_0^2+\|u_0(x)\|_0^2\right)\tag{11}$$

Если $f=u_0=u_1=0$, из (11) получим:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^t\frac{u(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}=0.\tag{12}$$

С помощью обобщенной формулы Ньютона-Лейбница [3, с. 15]

$$D_{0t}^{-\alpha}D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=u(x,t)-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to0}D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)$$

из (12) имеем:

$$u(x,t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to0}D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u_1(x)=0.$$

Откуда следует единственность решения задачи с условиями (1–3).

Список литературы

1. Олемской А.И., Флат А.Я. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды / А.И. Олемской, А.Я. Флат // Успехи физических наук. – 1993. – Т. 163. – №12. – С. 1–50.

Olemskoi A.I., Flat A.Y. Using of the concept of fractals in condensed matter physics / A.I. Olemskoi, A.Y. Flat // Physics-Uspekhi. – 1993. – V. 163. – №12. – P. 1–50.

2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. – М.: Физматлит, 2003. –272 с.

Nakhushev A.M. Fractional calculus and its application / A.M. Nakhushev. – M.: Fizmatlit, 2003. – 272 p.

3. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А.В. Псху. – М.: Наука, 2005. – 199 с.

Pskhu A.V. Partial differential equations of fractional order / A.V. Pskhu. – M.: Nauka, 2005. –199 p.

4. Геккиева С.Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени / С.Х. Геккиева // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 1994. – Т. 1. – №1. – С. 17–18.

Gekkieva S.Kh. A boundary value problem for the generalized transport equation with fractional time derivative / S.Kh. Gekkieva // Reports of Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences. 1994. V. 1. – №1. – P 17–19.

5. Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче для уравнения $sign|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ / С.К. Кумыкова. // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т. 12. – №1. – С. 79–88.

Kumykova S.K. On a boundary problem for the equation $sign|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0$ / S.K. Kumykova // Differ. equation. 1976. V. 12. – №1. – P. 79–88.

6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 407 с.

Ladyzhenskaya O.A. Boundary-value problems of mathematical physics / O.A. Ladyzhenskaya. – M.: Nauka, 1973. –407 p.