УДК 517.9

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ И МУЛЬТИПАРАМЕТРОМ

ABOUT ONE CLASS OF MATHEMATICAL MODELS WITH PARTIAL INTEGRALS AND WITH A MULTIPARAMETER

А.С. Калитвин, В.А. Калитвин
A.S. Kalitvin, V.A. Kalitvin

Липецкий государственный педагогический университет, Россия, 398020, г. Липецк, ул. Ленина, д. 42
Lipetsk State Pedagogical University, 42, Lenina St, Lipetsk, 398020, Russia

E-mail: kalitvinas@mail.ru; kalitvin@mail.ru

Аннотация. Рассматривается линейное мультипараметрическое уравнение с частными интегралами Это уравнение есть обобщение некоторых интегральных уравнений механики сплошных сред и интегрального уравнения Романовского марковских цепей с двусторонней связью. Изучается фредгольмовость уравнения, когда мультипараметр стремится к нулю.

Resume. The linear multiparameter equation with partial integrals is considered. This equation is extension for some integral equations of mechanics of continuous media and for Romanovskij integal equation of Markov chain with twosided connection. The Fredholm property of index zero are studied by multiparameter aim for zero.

Ключевые слова: интегральное уравнение механики сплошных сред, уравнение Романовского, частные интегралы, фредгольмовость.

Key words: integral equations of mechanics of continuous media, equation of Romanovskij, partial integrals, Fredholm property.

Введение

Пусть $D=[0,1]\times[0,1]$ и $C(D)$ — пространство непрерывных на D функций.

В пространстве $C(D)$ исследуется линейное мультипараметрическое уравнение с частными интегралами

$$x(t,s)=(K_{\alpha\beta\gamma}x)(t,s)+f(t,s), \tag{1}$$

где оператор $K_{\alpha\beta\gamma}$ определяется равенством

$$(K_{\alpha\beta\gamma}x)(t,s)=\int_0^t l(\alpha,t,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int_0^1 m(\beta,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+\int_0^1 n(\gamma,t,s,\sigma)x(\sigma,t)d\sigma, \tag{2}$$

в котором $t,s\in[0,1]$, параметры α,β,γ — заданные действительные или комплексные числа, l,m и n — заданные и измеримые при каждом значении параметра функции, а функция $f\in C(D)$.

При $l(\alpha,t,\tau)\equiv l(t,\tau)$, $m(\beta,s,\sigma)\equiv m(s,\sigma)$, $n(\gamma,t,s,\sigma)\equiv 0$ уравнение (1) является обобщением одного интегрального уравнения механики сплошных сред [1], при $l(\alpha,t,\tau)\equiv 0$, $m(\beta,s,\sigma)\equiv 0$, $n(\gamma,t,s,\sigma)\equiv \gamma n(t,s,\sigma)$ уравнение (1) совпадает с интегральным уравнением марковских цепей с двусторонней связью, полученным В.И. Романовским [2]. Свойства интегральных уравнений механики сплошных сред исследовались в [1,3], а интегральные уравнения Романовского и более общие классы их — интегральные уравнения типа Романовского, изучались в [4].

Набор (α,β,γ) назовем мультипараметром, уравнение (1) будем называть мультипараметрическим уравнением с частными интегралами, а оператор (2) — мультипараметрическим оператором с частными интегралами.

Мультипараметрическое уравнение (1) будем рассматривать в комплексном банаховом пространстве $C(D)$.

Оператор (2) запишем в виде:

$$K_{\alpha\beta\gamma} = L_\alpha + M_\beta + N_\gamma,$$

где операторы L_α, M_β и N_γ определяются равенствами

$$(L_\alpha x)(t,s) = \int_0^t l(\alpha,t,\tau)x(\tau,s)d\tau, \tag{3}$$

$$(M_\beta x)(t,s) = \int_0^1 m(\beta,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma, \tag{4}$$

$$(N_\gamma x)(t,s) = \int_0^1 n(\gamma,t,s,\sigma)x(\sigma,t)d\sigma. \tag{5}$$

Будем говорить, что (α,β,γ) является точкой области фредгольмовости оператора (2), если множество значений $R[I-K_{\alpha\beta\gamma}]$ оператора $I-K_{\alpha\beta\gamma}$ замкнуто, а размерности ядра $n(I-K_{\alpha\beta\gamma})$ и коядра $d(I-K_{\alpha\beta\gamma})$ конечны и равны.

Множество точек области фредгольмовости оператора (2) называется областью фредгольмовости оператора (2).

Уравнение (1) с фредгольмовым оператором $I-K_{\alpha\beta\gamma}$ будем называть фредгольмовым.

Основные результаты

Без ограничения общности всюду в разделе предполагается, что $l(0,t,\tau)\equiv 0$, $m(0,s,\sigma)\equiv 0$ и $n(0,t,s,\sigma)\equiv 0$. Уравнение (1) рассматривается при $\alpha \to 0$, при $\beta \to 0$ или при $\gamma \to 0$.

Через $C(L^1)$ обозначим множество измеримых на D функций $a(t,s)$, которые непрерывны как вектор-функции $t \to a(t,s)$ со значениями в $L^1([0,1])$. $C(L^1)$ — банахово пространство относительно нормы:

$$\|a\|_{C(L^1)} = \sup_{[0,1]} \int_0^1 |a(t,s)|\,ds.$$

Аналогично определяется пространство $C_D(L^1)$ измеримых на $D\times[0,1]$ функций и пространство $C_D(L^1(D))$ измеримых на $D\times D$ функций.

В приводимых ниже утверждениях предполагается, что функция $f \in C(D)$, функции $l_\alpha, m_\beta \in C(L^1)$ и $n_\gamma \in C_D(L^1)$ при каждом значении параметра α, β и γ соответственно и специально не оговаривается.

Уравнение (1) запишем в виде

$$x = L_\alpha x + M_\beta x + N_\gamma x + f,. \tag{6}$$

где L_α, M_β и N_γ — операторы (3), (4) и (5) соответственно.

Теорема 1. *Пусть*

$$\lim_{\gamma\to 0}\sup_{D}\int_0^1 |n(\gamma,t,s,\sigma)|\,d\sigma = 0. \tag{7}$$

Тогда при достаточно малых γ *фредгольмовость уравнения (6) в* $C(D)$ *совпадает с обратимостью в* $C(D)$ *уравнения*

$$x = M_\beta x + f. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть в (6) $\gamma = 0$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$x = L_\alpha x + M_\beta x + f. \tag{9}$$

В силу [4, 5] фредгольмовость уравнения (9) совпадает с обратимостью уравнения (8). В силу устойчивости фредгольмовости относительно достаточно малых возмущений [6] достаточно доказать, что $\|N_\gamma\| \to 0$ при $\gamma \to 0$. Последнее утверждение вытекает из равенства [4]:

$$\|N_\gamma\| = \sup_{D}\int_0^1 |n(\gamma,t,s,\sigma)|\,d\sigma$$

и условия (7). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть*

$$\lim_{\alpha\to 0}\sup_{[0,1]}\int_0^1 |l(\alpha,s,\sigma)|\,d\sigma = 0, \lim_{\beta\to 0}\sup_{[0,1]}\int_0^1 |m(\beta,s,\sigma)|\,d\sigma = 0. \tag{10}$$

Тогда при достаточно малых α *и* β *уравнение (6) фредгольмово в* $C(D)$.

Доказательство. Предположим, что в уравнении (6) $\alpha = \beta = 0$. Тогда уравнение (6) совпадет с фредгольмовым уравнением [4]

$$x = N_\gamma x + f. \tag{11}$$

Из равенств [5]

$$\|L_\alpha\| = \sup_{[0,1]}\int_0^1 |l(\alpha,s,\sigma)|\,d\sigma, \|M_\beta\| = \sup_{[0,1]}\int_0^1 |m(\beta,s,\sigma)|\,d\sigma$$

и равенств (10) следует, что $\|L_\alpha\| \to 0$ при $\alpha \to 0$ и $\|M_\beta\| \to 0$ при $\beta \to 0$. В силу устойчивости фредгольмовости относительно достаточно малых возмущений [6] уравнение (6) будет фредгольмовым в $C(D)$ при достаточно малых α и β. Теорема доказана.

Отметим, что частным случаем уравнения (11) является уравнение Романовского [2, 4].

Теорема 3. *Пусть*

$$\lim_{\beta\to 0}\sup_{[0,1]}\int_0^1 |m(\beta,s,\sigma)|\,d\sigma = 0.$$

Тогда при достаточно малых β *уравнение (6) фредгольмово в* $C(D)$.

Доказательство. При $\beta = 0$ уравнение (6) имеет вид

$$x = L_\alpha x + N_\gamma x + f. \tag{12}$$

Уравнение (12) запишем в виде

$$(I - L_\alpha)x = N_\gamma x + f. \tag{13}$$

В условии теоремы спектральный радиус оператора L_α равен нулю [5], уравнение (13) эквивалентно уравнению

$$x(t,s) = (N_\gamma x)(t,s) + (R_\alpha N_\gamma x)(t,s) + (R_\alpha f)(t,s), \tag{14}$$

где оператор R_α определяется равенством $((I - L_\alpha)^{-1} z)(t,s) = ((I + R_\alpha)z)(t,s)$ и является частично интегральным оператором с интегрированием функции $z(t,s)$ по переменной t [5], а оператор

$R_\alpha N_\gamma$ компактен в $C(D)$. Так как оператор N_γ фредгольмов в $C(D)$, а оператор $R_\alpha N_\gamma$ компактен в $C(D)$, то в силу устойчивости фредгольмовости относительно компактных возмущений [6] оператор $I - N_\gamma - R_\alpha N_\gamma$ фредгольмов в $C(D)$. Следовательно, уравнение (14) фредгольмово в $C(D)$. Тогда и уравнение (12) фредгольмово в $C(D)$.

Отсюда и устойчивости фредгольмовости относительно достаточно малых возмущений [6] вытекает утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть оператор* $I - M_\beta$ *обратим в* $C(D)$ *и*

$$\lim_{\alpha\to 0}\sup_{[0,1]}\int_0^1 |l(\alpha,s,\tau)|\,d\tau = 0.$$

Тогда уравнение (6) фредгольмово в $C(D)$.

Доказательство. Пусть $\alpha = 0$. В этом случае уравнение (6) имеет вид

$$x = M_\beta x + N_\gamma x + f. \tag{15}$$

Пусть оператор $I - M_\beta$ обратим в $C(D)$. Тогда уравнение (15) равносильно уравнению

$$x = (I - M_\beta)^{-1} N_\gamma x + (I - M_\beta)^{-1} f \equiv N_\gamma x + R_\beta N_\gamma x + (I - M_\beta)^{-1} f, \tag{16}$$

где оператор R_β определяется равенством $((I - M_\beta)^{-1} z)(t,s) = ((I + R_\beta)z)(t,s)$ и является частично интегральным оператором с интегрированием функции $z(t,s)$ по переменной s [5]. С применением теоремы Фубини проверяется, что оператор $\widetilde{N}_{\beta\gamma} = (N_\gamma + R_\beta N_\gamma)^2$ допускает представление:

$$(\widetilde{N}_{\beta\gamma} x)(t,s) = \int_0^1\int_0^1 \widetilde{n}(\beta,\gamma,t,s,\sigma,\sigma_1)x(\sigma_1,\sigma)d\sigma d\sigma_1$$

с функцией, $\widetilde{n}(\beta,\gamma,t,s,\sigma_1)$ принадлежащей пространству $C_D(L^1(D))$. Тогда оператор $\widetilde{N}_{\beta\gamma}$ компактен в $C(D)$. Следовательно, уравнение (16) фредгольмово в $C(D)$. Поэтому и уравнение (15) фредгольмово в $C(D)$.

Отсюда и устойчивости фредгольмовости относительно достаточно малых возмущений [6] вытекает утверждение теоремы. Теорема доказана

Так как непрерывные функции принадлежат $C(L^1)$, то утверждения теорем 1-4 справедливы (без изменений) для уравнения (6) с непрерывными ядрами, если предполагается, что $l(0,t,\tau) \equiv 0$, $m(0,s,\sigma) \equiv 0$ и $n(0,t,s,\sigma) \equiv 0$.

Эти же утверждения остаются справедливыми для уравнения (6) с ядрами типа потенциала, то есть с ядрами

$$l(\alpha,s,\tau) = \frac{l_0(\alpha,s,\tau)}{|t-\tau|^p},\ m(\beta,s,\sigma) = \frac{m_0(\beta,s,\sigma)}{|s-\sigma|^q},\ n(\gamma,t,s,\sigma) = \frac{n_0(\gamma,t,s,\tau)}{|s-\sigma|^r},$$

где $0 < p,q,r < 1$, а $l_0(\alpha,s,\tau)$, $m_0(\beta,s,\sigma)$ и $n_0(\gamma,t,s,\tau)$ — заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $l_0(0,t,\tau) \equiv 0$, $m_0(0,s,\sigma) \equiv 0$ и $n_0(0,t,s,\sigma) \equiv 0$, так как ядра $l(\alpha,s,\tau)$ и $m(\beta,s,\sigma)$ принадлежат $C(L^1)$, а ядро $n(\gamma,t,s,\sigma)$ прнинадлежит $C_D(L^1)$.

Работа поддержана Минобрнауки России (Госзадание № 2015/351, НИР № 1815).

Список литературы

1. Appell J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. – New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.

2. Romanovskij V.I. Sur une classe d'equations integrales lineares/ V.I. Romanovskij // Acta Math. – 1932. –V. 59. – P. 99–208.

3. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / А.С. Калитвин. – Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.

Kalitvin A.S. Linear operators with partial integrals / A.S. Kalitvin. – Voronegh: CHKI, 2000. – 252 p.

4. Калитвин А.С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами / А.С. Калитвин. – Липецк: ЛГПУ, 2014. – 196 с.

Kalitvin A.S. Integral equations of Romanovskij type with partial integrals / A.S. Kalitvin. – Lipetsk: LGPU, 2014. – 196 p.

5. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные уравнения с частными интегралами / А.С. Калитвин, У.В. Фролова. С-теория. – Липецк: ЛГПУ, 2015. – 195 с.

Kalitvin A.S. Linear equations with partial integrals / A.S. Kalitvin, E.V. Frolova. – C-theory. – Lipetsk: LGPU, 2015. – 195 p.

6. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1971.– 104 с.

6. Krein S.G. Linear equations in banach spaces / S.G. Krein. – Moscow: Nauka, 1971. – 104 p.