УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

ABOUT ONE INVERSE PROBLEM FOR TWO-DIMENSIONAL EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY

А.Р. Зайнуллов [1]
A.R. Zaynullov [1]

[1] *Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Россия, 453103, г. Стерлитамак, проспект Ленина, 49*

Sterlitamak Branch of Bashkir State University, 49, Prospekt Lenina St, Sterlitamak, 453103, Russia

E-mail: arturzayn@mail.ru

Аннотация. На основании формулы решения второй начально-граничной задачи для неоднородного двумерного уравнения теплопроводности изучена обратная задача по отысканию начального распределения. В явном виде строится решение прямой начально-граничной задачи. Единственность решения прямой начально-граничной задачи доказана на основании свойства полноты системы собственных функций соответствующей однородной задачи Неймана для оператора Лапласа. Доказана теорема существования решения прямой начально-граничной задачи. На основе решения этой задачи исследуется обратная задача, установлен критерий единственности решения обратной задачи. Существование решения обратной задачи эквивалентно сведено к разрешимости интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

Resume. The inverse problem of finding the initial distribution has been studied on the basis of formulas for the solution of the second initial-boundary value problem for the inhomogeneous two-dimensional heat equation. The uniqueness of the solution of the direct initial-boundary value problem has proved with the completeness of the eigenfunctions of the corresponding homogeneous Neumann problem for the Laplace operator. The existence theorem for solving direct initial boundary value problem has been proved. Inverse problem has been investigated on the basis of the solution of direct problem, a criterion for the uniqueness of the inverse problem of finding the initial distribution has been proved. The existence of the inverse problem solution has been equivalently reduced to Fredholm integral equation of the first kind.

*Ключевые слова:*уравнение теплопроводности, вторая начально-граничная задача, обратная задача, спектральный метод, единственность, существование, интегральное уравнение.

*Keywords:*heat equation, second initial–boundary value problem, inverse problem, spectral method, uniqueness, existence, integral equation

---

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$Lu \equiv u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = F(x,y,t) \qquad (1)$$

в параллелепипеде:

$$D = \Pi \times (0,T),\ \Pi = \{(x,y) \mid 0 < x < l,\ 0 < y < q\}$$

и следующие задачи.

Вторая начально-граничная задача. *Найти в области* D *функцию* $u(x,y,t)$, *удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{1,1}_{x,y}(D \cup S) \cap C^{2,2,1}_{x,y,t}(D); \qquad (2)$$

$$Lu \equiv F(x,y,t),\ (x,y,t) \in D; \qquad (3)$$

$$u_x(0,y,t) = u_x(l,y,t) = 0,\ 0 \le y \le q, \quad 0 \le t \le T, \qquad (4)$$

$$u_y(x,0,t) = u_y(x,q,t) = 0,\ 0 \le x \le l,\quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y),\quad 0 \le x \le l,\ 0 \le y \le q, \tag{6}$$

где $\varphi(x,y)$ и $F(x,y,t)$ — заданные функции, S — боковая поверхность параллелепипеда.

Обратная задача. *Найти функции $u(x,y,t)$ и $\varphi(x,y)$, удовлетворяющие условиям (2–6) и, кроме того, дополнительному условию*

$$u(x_0,y_0,t) = h(t),\ 0 < t_0 \le t \le t_1 \le T, \tag{7}$$

где (x_0,y_0) — заданная фиксированная точка прямоугольника Π, t_0 и t_1 — заданные действительные числа, $F(x,y,t)$, $h(t)$ — заданные функции.

Отметим, что указанная обратная задача изучена [1, с. 119] для однородного одномерного уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями второго рода и доказана теорема её единственности при $x_0 = 0$ и $x_0 = l/\pi$.

Данная работа является продолжением исследований автора [9], где изучена обратная задача с граничными условиями первого рода. В этой работе в явном виде строится решение прямой начально–граничной задачи с условиями (2–6) и на основе решения этой задачи исследуется обратная задача с условиями (2–7). В известных книгах по уравнениям математической физики [2–6] единственность решения начально–граничных задач доказывается методом интегралов энергии. Здесь, следуя [7, 8], единственность решения задачи с условиями (2–6) доказана на основании свойства полноты системы собственных функций соответствующей однородной задачи Неймана для оператора Лапласа. Также указаны достаточные условия относительно функций $\varphi(x,y)$ и $F(x,y,t)$, при которых решение поставленной задачи существует и оно определяется в виде суммы двойного ряда Фурье, так как в указанных книгах не приводится обоснование сходимости ряда Фурье в классе функций (2).

На основании этих результатов установлен критерий единственности решения задачи (2–7) для любой точки (x_0,y_0) прямоугольника Π при $l = q$.

2. Единственность и существование прямой задачи

Теорема 1. *Если существует решениезадачи с условиями (2–6), то оно единственно.*

Доказательство. Пусть μ_{mn}^2 — собственные значения и $X_{mn}(x,y)$ — соответствующие им собственные функции спектральной задачи:

$$v_{xx} + v_{yy} + \mu^2 v = 0,\ (x,y) \in \Pi, \tag{8}$$

$$v_x|_{x=0} = v_x|_{x=l} = 0,\ v_y|_{y=0} = v_y|_{y=q} = 0, \tag{9}$$

которые определяются по формулам:

$$X_{00}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{lq}},\ m = n = 0;$$

$$X_{0n}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{lq}}\cos\mu_n y,\ m = 0,\ n \in \mathbb{N};$$

$$X_{m0}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{lq}}\cos\mu_m x,\ m \in \mathbb{N},\ n = 0;$$

$$X_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{lq}}\cos\mu_m x\cos\mu_n y,\ m,n \in \mathbb{N};$$

$$\mu_{mn}^2 = \mu_m^2 + \mu_n^2,\ \mu_m = \frac{\pi m}{l},\ \mu_n = \frac{\pi n}{q},\ m,n = 0,1,\ldots.$$

Наряду с этой системой рассмотрим систему

$$Z_{mn}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[X_{mn}(x,y)+X_{nm}(x,y)\right], \tag{10}$$

которая обладает свойством симметрии:

$$Z_{mn}(x,y)=Z_{nm}(x,y).$$

Система (10) является решением спектральной задачи (11) и (9), обладает свойствами ортогональности и полноты в пространстве $L_2(\Pi)$, при это норма $\|Z_{mn}\|_{L_2(\Pi)}=1$.

Рассмотрим интеграл

$$u_{mn}(t)=\iint_{\Pi}u(x,y,t)Z_{mn}(x,y)\,dxdy. \tag{11}$$

Введем вспомогательную функцию

$$u_{mn}^{\varepsilon,\delta}(t)=\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\int_{\delta}^{q-\delta}u(x,y,t)Z_{mn}(x,y)\,dxdy, \tag{12}$$

где ε,δ — достаточно малые положительные числа.

Дифференцируя равенство (12) при $t\in(0,T)$ и учитывая уравнение (1), получим

$$\begin{aligned}(u_{mn}^{\varepsilon,\delta}(t))'&=\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\int_{\delta}^{q-\delta}u_t(x,y,t)Z_{mn}(x,y)\,dxdy=\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\int_{\delta}^{q-\delta}(a^2\Delta u+\\&+F(x,y,t))Z_{mn}(x,y)\,dxdy=a^2\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\int_{\delta}^{q-\delta}u_{xx}Z_{mn}(x,y)\,dxdy+\\&+a^2\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\int_{\delta}^{q-\delta}u_{yy}Z_{mn}(x,y)\,dxdy+\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\int_{\delta}^{q-\delta}F(x,y,t)Z_{mn}(x,y)\,dxdy=\\&=a^2(I_1+I_2)+F_{mn}(t),\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$F_{mn}(t)=\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\int_{\delta}^{q-\delta}F(x,y,t)Z_{mn}(x,y)\,dxdy. \tag{14}$$

С учетом граничных условий (4, 5), $Z'(0,y)=Z'(l,y)=0,\ 0\le y\le q,\ \ Z'(x,0)=Z'(x,q)=0,\ 0\le x\le l$ проинтегрируем по частям интегралы I_1 и I_2. Тогда получим:

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{\delta}^{q-\delta}dy\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{xx}Z_{mn}(x,y)\,dx=\int_{\delta}^{q-\delta}dy\left(u_xZ_{mn}(x,y)\,|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}-\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_x\left(Z_{mn}(x,y)\right)_x dx\right)=\\&=\int_{\delta}^{q-\delta}dy\left(u_xZ_{mn}(x,y)\,|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}-u(x,y,t)\left(Z_{mn}(x,y)\right)|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,y,t)\left(Z_{mn}(x,y)\right)_{xx}dx\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}dx\int_{\delta}^{q-\delta}u_{yy}Z_{mn}(x,y)\,dy=\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}dx\left(u_yZ_{mn}(x,y)\,|_{\delta}^{q-\delta}-\int_{\delta}^{q-\delta}u_y\left(Z_{mn}(x,y)\right)_y dy\right)=\\&=\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}dx\left(u_yZ_{mn}(x,y)\,|_{\delta}^{q-\delta}-u(x,y,t)\left(Z_{mn}(x,y)\right)_y|_{\delta}^{q-\delta}+\int_{\delta}^{q-\delta}u(x,y,t)\left(Z_{mn}(x,y)\right)_{yy}dy\right).\end{aligned}$$

Подставляя значения интегралов I_1 и I_2 в (13) и переходя к пределу при $\varepsilon\to0,\delta\to0$, имеем

$$u'(t)=a^2\iint_{\Pi}u(x,y,t)\left(\left(Z_{mn}(x,y)\right)_{xx}+\left(Z_{mn}(x,y)\right)_{yy}\right)dxdy+F_{mn}(t)=$$

$$=-\mu_{mn}^2a^2\iint_{\Pi}u(x,y,t)Z_{mn}(x,y)\,dxdy+F_{mn}(t)=-\mu_{mn}^2a^2u_{mn}(t)+F_{mn}(t),$$

откуда

$$u'_{mn}(t)+\mu_{mn}^2a^2u_{mn}(t)=F_{mn}(t). \tag{15}$$

Общее решение уравнения (15) определяется по формуле

$$u_{mn}(t)=\int_0^t F_{mn}(s)e^{-\mu_{mn}^2a^2(t-s)}ds+C_{mn}e^{-\mu_{mn}^2a^2t}, \tag{16}$$

где C_{mn} — произвольные постоянные. Для определения их воспользуемся граничным условием (6) и формулой (12):

$$u_{mn}(0)=\iint_{\Pi}u(x,y,0)Z_{mn}(x,y)\,dxdy=\iint_{\Pi}\varphi(x,y)Z_{mn}(x,y)\,dxdy=\varphi_{mn}. \tag{17}$$

Удовлетворяя (16) начальному условию (17), найдем $C_{mn} = \varphi_{mn}$ и тогда окончательно находим функцию

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn} e^{-\mu_{mn}^2 a^2 t} + \int_0^t F_{mn}(s) e^{-\mu_{mn}^2 a^2 (t-s)} ds. \quad (18)$$

Из формулы (18) следует единственность решения задачи с условиями (2–6), так как если положить $\varphi(x,y) \equiv 0,\ F(x,y,t) \equiv 0$, то $\varphi_{mn} \equiv 0,\ F_{mn}(s) \equiv 0$ и из (18), получим $u_{mn}(t) = 0$, что на основании (12) равносильно равенству

$$\iint_\Pi u(x,y,t) Z_{mn}(x,y)\, dxdy = 0,$$

и в силу полноты системы $Z_{mn}(x,y)$ в пространстве $L_2(\Pi)$ функция $u(x,y,t) = 0$ почти всюду в Π и при любом $t \in [0,T]$. Тем самым, единственность решения задачи доказана.

Теорема 2. *Если* $\varphi(x,y) \in C^4(\overline{\Pi}),\ F(x,y,t) \in C^{2,2,1}_{x,y,t}(\overline{D} \cup S)$ *и*

$$\begin{gathered} \varphi'_x(0,y) = \varphi'_x(l,y) = 0,\ 0 \le y \le q,\ \varphi'_x(x,0) = \varphi'_x(x,q) = 0,\ 0 \le x \le l, \\ \varphi'_y(0,y) = \varphi'_y(l,y) = 0,\ 0 \le y \le q,\ \varphi'_y(x,0) = \varphi'_y(x,q) = 0,\ 0 \le x \le l, \end{gathered} \quad (19)$$

$$\begin{gathered} F'_x(0,y,t) = F'_x(l,y,t) = 0,\ 0 \le y \le q,\ F'_x(x,0,t) = F'_x(x,q,t) = 0,\ 0 \le x \le l, \\ F'_y(0,y,t) = F'_y(l,y,t) = 0,\ 0 \le y \le q,\ F'_y(x,0,t) = F'_y(x,q,t) = 0,\ 0 \le x \le l \end{gathered} \quad (20)$$

для всех $(x,y,t) \in \overline{D}$, *то существует решение задачи с условиями (2–6) и оно представимо в виде суммы ряда*

$$\begin{gathered} u(x,y,t) = \frac{1}{4}(\varphi_{00} + F_{00}(t)) + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\varphi_{m0}\, e^{-\mu_m^2 a^2 t} + F_{m0}(t)\right) Z_{m0}(x,y) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{0n}\, e^{-\mu_n^2 a^2 t} + F_{0n}(t)\right) Z_{0n}(x,y) + \sum_{m,n=1}^{\infty}\left[\varphi_{mn}\, e^{-\mu_{mn}^2 a^2 t} + F_{mn}(t)\right] Z_{mn}(x,y) \end{gathered} \quad (21)$$

с коэффициентами, которые определяются по формулам (17) и

$$F_{mn}(t) = \iint_\Pi \int_0^t F(x,y,s) e^{-a^2 \mu_{mn}^2 (t-s)} ds\, Z_{mn}(x,y)\, dxdy,\ m,n = 0,1,\ldots. \quad (22)$$

Доказательство. Решение задачи с условиями (2–6) выше формально построено в виде суммы ряда (21), где коэффициенты $\varphi_{mn},\ F_{mn}(t)$ определяются по формулам (17) и (22). Если ряд (21) равномерно сходится на $\overline{D}$, также как ряды полученные из него почленным дифференцированием один раз по переменной t и по два раза по x, y, то его сумма будет удовлетворять условиям (2–6).

Предварительно проинтегрируем по частям интегралы (17), (22) два раза по x, y, и учитывая условия (19), (20), получим

$$\begin{gathered} \varphi_{mn} = \iint_\Pi \varphi(x,y) Z_{mn}(x,y)\, dxdy = \frac{1}{\sqrt{lq}} \int_0^q \cos\mu_n y\, dy \int_0^l \varphi(x,y) \cos\mu_m x\, dx + \\ + \frac{1}{\sqrt{lq}} \int_0^q \cos\mu_m y\, dy \int_0^l \varphi(x,y) \cos\mu_n x\, dx = -\frac{1}{\mu_m^2}\frac{1}{\sqrt{lq}} \int_0^q \cos\mu_n y\, dy \int_0^l \varphi''_{xx} \cos\mu_m x\, dx - \\ - \frac{1}{\mu_n^2}\frac{1}{\sqrt{lq}} \int_0^q \cos\mu_m y\, dy \int_0^l \varphi''_{xx} \cos\mu_n x\, dx = -\frac{1}{\mu_m^2}\frac{1}{\sqrt{lq}} \int_0^l \cos\mu_m x\, dx \int_0^q \varphi''_{xx} \cos\mu_n y\, dy - \\ - \frac{1}{\mu_n^2}\frac{1}{\sqrt{lq}} \int_0^l \cos\mu_n x\, dx \int_0^q \varphi''_{xx} \cos\mu_m y\, dy = \frac{1}{\mu_m^2 \mu_n^2}\frac{1}{\sqrt{lq}} \int_0^l \cos\mu_m x\, dx \int_0^q \varphi^{(4)}_{xxyy} \cos\mu_n y\, dy \\ + \frac{1}{\mu_m^2 \mu_n^2}\frac{1}{\sqrt{lq}} \int_0^l \cos\mu_n x\, dx \int_0^q \varphi^{(4)}_{xxyy} \cos\mu_m y\, dy = \frac{1}{\mu_m^2 \mu_n^2}\frac{1}{\sqrt{lq}} \iint_\Pi \varphi^{(4)}_{xxyy} \cos\mu_m x \cos\mu_n y\, dxdy \\ + \frac{1}{\mu_m^2 \mu_n^2}\frac{1}{\sqrt{lq}} \iint_\Pi \varphi^{(4)}_{xxyy} \cos\mu_n x \cos\mu_m y\, dxdy = \frac{1}{\mu_m^2 \mu_n^2} \iint_\Pi \varphi^{(4)}_{xxyy} Z_{mn}(x,y)\, dxdy = \frac{l^2 q^2}{\pi^4}\frac{\varphi^{(4)}_{mn}}{m^2 n^2}, \end{gathered} \quad (23)$$

$$\iint_{\Pi} F(x,y,t)Z_{mn}(x,y)\,dxdy = \frac{1}{\sqrt{lq}}\int_0^q \cos\mu_n y\,dy\int_0^l F(x,y,t)\cos\mu_m x\,dx +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{lq}}\int_0^q \cos\mu_m y dy\int_0^l F(x,y,t)\cos\mu_n x\,dx = -\frac{1}{\mu_m^2}\frac{1}{\sqrt{lq}}\int_0^q \cos\mu_n y\,dy\int_0^l F''_{xx}\cos\mu_m x\,dx -$$
$$-\frac{1}{\mu_n^2}\frac{1}{\sqrt{lq}}\int_0^q \cos\mu_m y\,dy\int_0^l F''_{xx}\cos\mu_n x\,dx = -\frac{1}{\mu_m^2}\frac{1}{\sqrt{lq}}\int_0^l \cos\mu_m x\,dx\int_0^q F''_{xx}\cos\mu_n y\,dy -$$
$$-\frac{1}{\mu_n^2}\frac{1}{\sqrt{lq}}\int_0^l \cos\mu_n x\,dx\int_0^q F''_{xx}\cos\mu_m y\,dy = \frac{1}{\mu_m^2\mu_n^2}\frac{1}{\sqrt{lq}}\int_0^l \cos\mu_m x\,dx\int_0^q F^{2,2}_{xy}\cos\mu_n y\,dy$$
$$+\frac{1}{\mu_m^2\mu_n^2}\frac{1}{\sqrt{lq}}\int_0^l \cos\mu_n x\,dx\int_0^q F^{(4)}_{xxyy}\cos\mu_m y\,dy = \frac{1}{\mu_m^2\mu_n^2}\frac{1}{\sqrt{lq}}\iint_{\Pi} F^{(4)}_{xxyy}\cos\mu_m x\cos\mu_n y\,dxdy$$
$$+\frac{1}{\mu_m^2\mu_n^2}\frac{1}{\sqrt{lq}}\iint_{\Pi} F^{(4)}_{xxyy}\cos\mu_n x\cos\mu_m y\,dxdy = \frac{1}{\mu_m^2\mu_n^2}\iint_{\Pi} F^{(4)}_{xxyy}Z_{mn}(x,y)\,dxdy = \frac{l^2q^2}{\pi^4}\frac{F^{(4)}_{mn}(t)}{m^2n^2}. \tag{24}$$

Поскольку $\varphi^{(2)}_{xx},\varphi^{(2)}_{yy},\varphi^{(4)}_{xxyy}, F^{(2)}_{xx}(t), F^{(2)}_{yy}(t), F^{(4)}_{xxyy}(t)$ и непрерывны в $\overline{\Pi}$, то в силу неравенства Бесселя следующие ряды сходятся:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}|\varphi^{(2)}_{mn}|^2 \le \frac{2}{lq}\int_0^l\int_0^q(\varphi^{(2)}_{xx})^2\,dxdy,\quad \sum_{m,n=1}^{\infty}|\varphi^{(2)}_{mn}|^2 \le \frac{2}{lq}\int_0^l\int_0^q(\varphi^{(2)}_{yy})^2\,dxdy,\quad \sum_{m,n=1}^{\infty}|\varphi^{(4)}_{mn}|^2 \le \frac{4}{lq}\int_0^l\int_0^q(\varphi^{(4)}_{xxyy})^2\,dxdy,$$
$$\sum_{m,n=1}^{\infty}|F^{(2)}_{mn}(t)|^2 \le \frac{2}{lq}\int_0^l\int_0^q(F^{(2)}_{xx}(t))^2\,dxdy,\quad \sum_{m,n=1}^{\infty}|F^{(2)}_{mn}(t)|^2 \le \frac{2}{lq}\int_0^l\int_0^q(F^{(2)}_{yy}(t))^2\,dxdy,$$
$$\sum_{m,n=1}^{\infty}|F^{(4)}_{mn}(t)|^2 \le \frac{4}{lq}\int_0^l\int_0^q(F^{(4)}_{xxyy}(t))^2\,dxdy.$$

Подставив (23) и (24) в ряд (21), получим

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4}(\varphi_{00}+F_{00}(t)) - \frac{\sqrt{2}lq}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\left((\varphi^{(2)}_{m0}+\varphi^{(2)}_{0m})e^{-\mu_m^2a^2t}+F^{(2)}_{m0}(t)+F^{(2)}_{0m}(t)\right)Z_{m0}(x,y) -$$
$$-\frac{\sqrt{2}lq}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left((\varphi^{(2)}_{0n}+\varphi^{(2)}_{n0})e^{-\mu_n^2a^2t}+F^{(2)}_{0n}(t)+F^{(2)}_{n0}(t)\right)Z_{0n}(x,y) +$$
$$+\frac{l^2q^2}{\pi^4}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}\left[\varphi^{(4)}_{mn}e^{-\mu_{mn}^2a^2t}+F^{(4)}_{mn}(t)\right]Z_{mn}(x,y). \tag{25}$$

Теперь оценим

$$\left|\int_0^t F^{(2)}_{m0}(s)e^{-\mu_m^2a^2(t-s)}ds\right| = \max_{0\le s\le T}|F^{(2)}_{m0}(s)|\int_0^t e^{-\mu_m^2a^2(t-s)}ds =$$
$$= \frac{\|F^{(2)}_{m0}\|_C(1-e^{-\mu_m^2a^2t_0})}{\mu_m^2a^2} < \frac{l^2}{a^2\pi^2}\frac{\|F^{(2)}_{m0}\|_C}{m^2},$$

$$\left|\int_0^t F^{(2)}_{0m}(s)e^{-\mu_m^2a^2(t-s)}ds\right| = \max_{0\le s\le T}|F^{(2)}_{0m}(s)|\int_0^t e^{-\mu_m^2a^2(t-s)}ds =$$
$$= \frac{\|F^{(2)}_{0m}\|_C(1-e^{-\mu_m^2a^2t_0})}{\mu_m^2a^2} < \frac{l^2}{a^2\pi^2}\frac{\|F^{(2)}_{0m}\|_C}{m^2},$$

$$\left|\int_0^t F^{(2)}_{0n}(s)e^{-\mu_m^2a^2(t-s)}ds\right| = \max_{0\le s\le T}|F^{(2)}_{0n}(s)|\int_0^t e^{-\mu_n^2a^2(t-s)}ds =$$

$$=\frac{\|F_{0n}^{(2)}\|_C\,(1-e^{-\mu_n^2a^2t_0})}{\mu_n^2a^2}<\frac{q^2}{a^2\pi^2}\frac{\|F_{0n}^{(2)}\|_C}{n^2},$$

$$\left|\int_0^t F_{n0}^{(2)}(s)e^{-\mu_m^2a^2(t-s)}ds\right|=\max_{0\le s\le T}|F_{n0}^{(2)}(s)|\int_0^t e^{-\mu_m^2a^2(t-s)}ds=$$

$$=\frac{\|F_{n0}^{(2)}\|_C\,(1-e^{-\mu_n^2a^2t_0})}{\mu_n^2a^2}<\frac{q^2}{a^2\pi^2}\frac{\|F_{n0}^{(2)}\|_C}{n^2},$$

$$\left|\int_0^t F_{mn}^{(4)}(s)e^{-\mu_{mn}^2a^2(t-s)}ds\right|=\max_{0\le s\le T}|F_{mn}^{(4)}(s)|\int_0^t e^{-\mu_{mn}^2a^2(t-s)}ds=$$

$$=\frac{\|F_{mn}^{(4)}\|_C\,(1-e^{-\mu_{mn}^2a^2t_0})}{\mu_{mn}^2a^2}<\frac{1}{a^2\pi^2}\frac{\|F_{mn}^{(4)}\|_C}{\dfrac{m^2}{l^2}+\dfrac{n^2}{q^2}},$$

где $\|F_{mn}^{(i)}\|_C=\max\limits_{0\le s\le T}|F_{mn}^{(i)}(s)|, i=\{2,4\}, m,n=0,1,\ldots$

Ряд (25) при любых $(x,y,t)\in\overline{D}$ мажорируется сходящимся рядом

$$\frac{\sqrt{2}lq}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^2}(|\varphi_{m0}^{(2)}|+|\varphi_{0m}^{(2)}|)+\frac{l^2}{a^2\pi^2}\left(\frac{\|F_{m0}^{(2)}\|_C}{m^2}+\frac{\|F_{0m}^{(2)}\|_C}{m^2}\right)\right)+$$
$$+\frac{\sqrt{2}lq}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}(|\varphi_{0n}^{(2)}|+|\varphi_{n0}^{(2)}|)+\frac{q^2}{a^2\pi^2}\left(\frac{\|F_{0n}^{(2)}\|_C}{n^2}+\frac{\|F_{n0}^{(2)}\|_C}{n^2}\right)\right)+$$
$$+\frac{l^2q^2}{\pi^4}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}|\varphi_{mn}^{(4)}|+\frac{l^2q^2}{\pi^6a^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\dfrac{m^2}{l^2}+\dfrac{n^2}{q^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|F_{mn}^{(4)}\|_C}{m^2n^2}. \qquad (26)$$

Тогда ряд (21) в силу признака Вейерштрасса сходится равномерно в $\overline{D}$. Следовательно, функция $u(x,y,t)$ непрерывна в $\overline{D}$, как сумма равномерно сходящегося ряда (21).

Теперь докажем возможность почленного дифференцирования ряда (21) по переменным x, y два раза и по t один раз в D. Для этого покажем, что полученные при почленном дифференцировании ряды сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{D}_0=\overline{D}\cap\{t\ge t_0>0\}$, где t_0 – достаточно малое положительное число. Формально из (25) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_{xx}=\frac{\sqrt{2}lq}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_m^2}{m^2}\left((\varphi_{m0}^{(2)}+\varphi_{0m}^{(2)})e^{-\mu_m^2a^2t}+F_{m0}^{(2)}(t)+F_{0m}^{(2)}(t)\right)Z_{m0}(x,y)+$$
$$+\frac{\sqrt{2}lq}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{n^2}\left((\varphi_{0n}^{(2)}+\varphi_{n0}^{(2)})e^{-\mu_n^2a^2t}+F_{0n}^{(2)}(t)+F_{n0}^{(2)}(t)\right)Z_{0n}(x,y)-$$
$$-\frac{l^2q^2}{\pi^4}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\mu_{mn}^2}{m^2n^2}\left[\varphi_{mn}^{(4)}e^{-\mu_{mn}^2a^2t}+F_{mn}^{(4)}(t)\right]Z_{mn}(x,y), \qquad (27)$$

$$u_{yy}=\frac{\sqrt{2}lq}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_m^2}{m^2}\left((\varphi_{m0}^{(2)}+\varphi_{0m}^{(2)})e^{-\mu_m^2a^2t}+F_{m0}^{(2)}(t)+F_{0m}^{(2)}(t)\right)Z_{m0}(x,y)+$$
$$+\frac{\sqrt{2}lq}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{n^2}\left((\varphi_{0n}^{(2)}+\varphi_{n0}^{(2)})e^{-\mu_n^2a^2t}+F_{0n}^{(2)}(t)+F_{n0}^{(2)}(t)\right)Z_{0n}(x,y)-$$
$$-\frac{l^2q^2}{\pi^4}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\mu_{mn}^2}{m^2n^2}\left[\varphi_{mn}^{(4)}e^{-\mu_{mn}^2a^2t}+F_{mn}^{(4)}(t)\right]Z_{mn}(x,y), \qquad (28)$$

$$u_t=-\frac{\sqrt{2}lq}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\Big(-\mu_m^2a^2(\varphi_{m0}^{(2)}+\varphi_{0m}^{(2)})e^{-\mu_m^2a^2t}-a^2\mu_m^2(F_{m0}^{(2)}(t)+F_{0m}^{(2)}(t))+\widetilde{F}_{m0}^{(2)}(t)+\widetilde{F}_{0m}^{(2)}(t)\Big)Z_{m0}(x,y)-$$
$$-\frac{\sqrt{2}lq}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big(-\mu_n^2a^2(\varphi_{0n}^{(2)}+\varphi_{n0}^{(2)})e^{-\mu_n^2a^2t}-a^2\mu_n^2(F_{0n}^{(2)}(t)+F_{n0}^{(2)}(t))+\widetilde{F}_{0n}^{(2)}(t)+\widetilde{F}_{n0}^{(2)}(t)\Big)Z_{0n}(x,y)+$$
$$+\frac{l^2q^2}{\pi^4}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}\Big[-\mu_{mn}^2a^2\varphi_{mn}^{(4)}e^{-\mu_{mn}^2a^2t}-a^2\mu_{mn}^2F_{mn}^{(4)}(t)+\widetilde{F}_{mn}^{(4)}(t)\Big]Z_{mn}(x,y), \tag{29}$$

где

$$\widetilde{F}_{mn}^{(k+h)}(t)=\iint_{\Pi}F_{xy}^{(k,h)}(x,y,t)Z_{mn}(x,y)dxdy,\ k,h\in\{0,2\},m,n=0,1,\ldots$$

Ряды (27-29) при любых $(x,y,t)\in\overline{D}_0$ мажорируются соответственно числовыми рядами

$$+\frac{\sqrt{2}lq}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{n^2}\Big((|\varphi_{0n}^{(2)}|+|\varphi_{n0}^{(2)}|)e^{-\mu_n^2a^2t_0}+\frac{lq}{a^2\pi^2n^2}(\|F_{0n}^{(2)}(t)\|_C+\|F_{n0}^{(2)}(t)\|_C)\Big)+$$
$$+\frac{l^2q^2}{\pi^4}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\mu_{mn}^2}{m^2n^2}\left[|\varphi_{mn}^{(4)}|e^{-\mu_{mn}^2a^2t_0}+\frac{1}{a^2\pi^2(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{q^2})}\|F_{mn}^{(4)}(t)\|_C\right], \tag{30}$$

$$\frac{\sqrt{2}lq}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu_m^2}{m^2}\Big((|\varphi_{m0}^{(2)}|+|\varphi_{0m}^{(2)}|)e^{-\mu_m^2a^2t_0}+\frac{l^2}{a^2\pi^2m^2}(\|F_{m0}^{(2)}(t)\|_C+\|F_{0m}^{(2)}(t)\|_C)\Big)+$$
$$+\frac{\sqrt{2}lq}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^2}{n^2}\Big((|\varphi_{0n}^{(2)}|+|\varphi_{n0}^{(2)}|)e^{-\mu_n^2a^2t_0}+\frac{l^2}{a^2\pi^2n^2}(\|F_{0n}^{(2)}(t)\|_C+\|F_{n0}^{(2)}(t)\|_C)\Big)+$$
$$+\frac{l^2q^2}{\pi^4}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\mu_{mn}^2}{m^2n^2}\left[|\varphi_{mn}^{(4)}|e^{-\mu_{mn}^2a^2t_0}+\frac{l^2}{a^2\pi^2(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{q^2})}\|F_{mn}^{(4)}(t)\|_C\right], \tag{31}$$

$$\frac{\sqrt{2}lq}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\Big(\mu_m^2a^2(|\varphi_{m0}^{(2)}|+|\varphi_{0m}^{(2)}|)e^{-\mu_m^2a^2t_0}+\frac{l^2\mu_m^2}{\pi^2m^2}(\|F_{m0}^{(2)}(t)\|_C+\|F_{0m}^{(2)}(t)\|_C)+|\widetilde{F}_{m0}^{(2)}(t)|+|\widetilde{F}_{0m}^{(2)}(t)|\Big)+$$
$$+\frac{\sqrt{2}lq}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big(\mu_n^2a^2(|\varphi_{0n}^{(2)}|+|\varphi_{n0}^{(2)}|)e^{-\mu_n^2a^2t_0}+\frac{l^2\mu_n^2}{\pi^2n^2}(\|F_{0n}^{(2)}(t)\|_C+\|F_{n0}^{(2)}(t))\|_C)+|\widetilde{F}_{0n}^{(2)}(t)|+|\widetilde{F}_{n0}^{(2)}(t)|\Big)+$$
$$+\frac{l^2q^2}{\pi^4}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}\left[\mu_{mn}^2a^2|\varphi_{mn}^{(4)}|e^{-\mu_{mn}^2a^2t_0}+\frac{\mu_{mn}^2}{\pi^2(\frac{m^2}{l^2}+\frac{n^2}{q^2})}\|F_{mn}^{(4)}(t)\|_C+|\widetilde{F}_{mn}^{(4)}(t)|\right]. \tag{32}$$

Ряды (30-32) сходятся. Тогда ряды (27-29) на основании признака Вейерштрасса сходятся равномерно на $\overline{D}$. Следовательно, функции $u_{xx},u_{yy},u_t\in C(D)$ и подставляя ряды в уравнение (21), убеждаемся в том, что функция $u(x,y,t)$, определяемая рядом (21), является его решением в D.

3. Критерий единственности решения обратной задачи

Рассмотрим теперь обратную задачу с условиями (2–7). Полагая в формуле (21) $x=x_0$, $y=y_0$ с учётом условия (7), получим относительно неизвестной функции $\varphi(x,y)$ уравнение:

$$\frac{1}{4}\varphi_{00}+\sum_{\substack{m,n=0\\m+n>0}}^{\infty}\iint_{\Pi}\lambda_{mn}\varphi(\xi,\eta)Z_{mn}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\, e^{-\mu_{mn}^2 a^2 t}Z_{mn}(x_0,y_0)=h(t)-\frac{1}{4}F_{00}(t)-$$

$$-\sum_{\substack{m,n=0\\m+n>0}}^{\infty}\int_0^t\lambda_{mn}F_{mn}(s)e^{-\mu_{mn}^2a^2(t-s)}ds\,Z_{mn}(x_0,y_0)=h_0(t),\ t_0\le t\le t_1, \quad (33)$$

где

$$\lambda_{mn}=\begin{cases}1/2,\ m>0,\ n=0,\\ 1/2,\ m=0,\ n>0,\\ 1,\ m>0,\ n>0.\end{cases}$$

Теорема 3. *Если* $Z_{mn}(x_0,y_0)\neq 0$ *при всех* $m,n\in N_0$, *то решение интегрального уравнения (33) единственно в* $L_2(\overline{\Pi})$.

Доказательство. Следуя [1, с. 119], [7, 9], в силу линейности уравнения (33) достаточно показать, что оно имеет только нулевое решение при $h_0(t)=0$. Положив в (33) $h(t)=0$ и $F(x,y,t)\equiv 0$, имеем

$$\frac{1}{4}\varphi_{00}+\sum_{\substack{m,n=0\\m+n>0}}^{\infty}\lambda_{mn}\iint_{\Pi}\varphi(\xi,\eta)Z_{mn}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\, e^{-\mu_{mn}^2 a^2 t}Z_{mn}(x_0,y_0)=0. \quad (34)$$

Рассмотрим в комплексной полуплоскости $Re\ z\ge\alpha$, где постоянная $\alpha\in(0,t_0)$, функцию комплексной переменной

$$\Phi(z)=\frac{1}{4}\varphi_{00}+\sum_{\substack{m,n=0\\m+n>0}}^{\infty}\lambda_{mn}\varphi_{mn}e^{-\mu_{mn}^2a^2z}Z_{mn}(x_0,y_0). \quad (35)$$

Так как при $Re\ z\ge\alpha$

$$|\lambda_{mn}\varphi_{mn}Z_{mn}(x_0,y_0)e^{-\mu_{mn}^2a^2z}|\le Ce^{-\mu_{mn}^2a^2\alpha}, \quad (36)$$

здесь $C=const>0$, то в этой полуплоскости ряд, стоящий в правой части соотношения (36), сходится равномерно. Учитывая то, что каждый член этого ряда является аналитической функцией при $Re\ z\ge\alpha$, и применяя теорему Вейерштрасса, получаем, что функция $\Phi(z)$ является аналитической при $Re\ z\ge\alpha$. Поскольку в силу (35) $\Phi(z)=0$ на отрезке $[t_0,t_1]$ действительной оси t из области аналитичности $\Phi(z)$, но на основании теоремы единственности для аналитических функций следует $\Phi(z)\equiv 0$ при $Re\ z\ge\alpha$. Отсюда следует равенство при всех $t\ge t_0$. Переходя здесь к пределу при $t\to+\infty$, получим

$$\varphi_{00}=0. \quad (37)$$

В силу (37) равенство (34) принимает вид

$$\sum_{\substack{m,n=0\\m+n>0}}^{\infty}\lambda_{mn}\varphi_{mn}e^{-\mu_{mn}^2a^2t}Z_{mn}(x_0,y_0)=0. \quad (38)$$

Умножим равенство (38) на $e^{(\mu_{01}a)^2t}$ и в полученном равенстве, переходя к пределу при $t\to+\infty$, получим

$$\varphi_{01}Z_{01}(x_0,y_0)+\varphi_{10}Z_{10}(x_0,y_0)=2\varphi_{01}Z_{01}(x_0,y_0)=0.$$

Отсюда с учетом того, что $Z_{10}(x_0,y_0)\neq 0$, имеем

$$\varphi_{01}=\varphi_{10}=0. \quad (39)$$

Снова с учетом (39), умножив равенство (38) на $e^{(\mu_{11}a)^2 t}$, и, в полученном равенстве переходя к пределу при $t \to +\infty$, найдем

$$\varphi_{11} = 0. \tag{40}$$

Затем, учитывая равенства (39-40), умножим равенство (38) на $e^{(\mu_{02}a)^2 t}$ и, переходя к пределу при $t \to \infty$, будем иметь

$$\varphi_{02} = \varphi_{20} = 0. \tag{41}$$

Затем в силу (39) – (41), получим:

$$\varphi_{12} = \varphi_{21} = 0.$$

Рассуждая далее аналогично вышеизложенному, получим

$$\varphi_{nm} = 0,\ m,n = 0,1,2,\ldots. \tag{42}$$

Из равенства (42), в силу полноты системы функций $\{Z_{mn}(x,y)\}_{m,n\geq 0}$ в пространстве $L_2(\overline{\Pi})$, следует, что $\varphi(x,y) = 0$ почти всюду в Π. Отсюда в силу непрерывности функции $\varphi(x,y)$ на $\overline{\Pi}$ получим, что $\varphi(x,y) = 0$.

Тогда из теорем 3 и 2 следует единственность решения обратной задачи 1.

Пусть при некоторых $\tilde{x}_0 = \dfrac{x_0}{l}$, $\tilde{y}_0 = \dfrac{y_0}{l}$ и $m = p, n = s \in \mathrm{N}$ нарушено условие теоремы 3, то есть

$$Z_{ps}(x_0, y_0) = \cos\pi p\tilde{x}_0 \cos\pi s\tilde{y}_0 + \cos\pi s\tilde{x}_0 \cos\pi p\tilde{y}_0 = 0. \tag{43}$$

Тогда обратная задача с условиями (2–7)при $h(t) = 0$ и $F(x,y,t) \equiv 0$ имеет ненулевое решение:

$$u_{ps}(x,y,t) = Z_{ps}(x,y)e^{-(\mu_{ps}a)^2 t},\ \varphi_{ps}(x,y) = u_{ps}(x,y,0) = Z_{ps}(x,y).$$

Из уравнения (43) найдем рациональные значения

$$\tilde{x}_0 = \frac{1}{2p} + \frac{k_1}{p},\ \tilde{y}_0 = \frac{1}{2p} + \frac{k_2}{p},\ k_1, k_2 \in \mathrm{N},\ k_1 < p,\ k_2 < p,$$

или

$$\tilde{x}_0 = \frac{1}{2s} + \frac{k_3}{s},\ \tilde{y}_0 = \frac{1}{2s} + \frac{k_4}{s},\ k_3, k_4 \in \mathrm{N},\ k_3 < s,\ k_4 < s,$$

при которых нарушается условие теоремы 3, то есть нарушается единственность решения задачи 1.

Следовательно, установлен следующий критерий единственности решения обратной задачи с условиями (2–7).

Теорема 4. *Условия $Z_{mn}(x_0, y_0) \neq 0$ при всех $m,n \in \mathrm{N}_0$ необходимы и достаточны для единственности решения* обратной задачи с условиями (2–7).

Рассматриваемая обратная задача может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Действительно, поменяв местами порядок интегрирования и суммирования в левой части уравнения (33), получим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$G\varphi \equiv \iint_{\Pi} G(t,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = h_0(t),\ t_0 \leq t \leq t_1, \tag{44}$$

с гладким ядром

$$G(t,\xi,\eta) = 1 + \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^{\infty} \lambda_{mn} e^{-\mu_{mn}^2 a^2 t} Z_{mn}(\xi,\eta) Z_{mn}(x_0, y_0)$$

в параллелепипеде $\overline{\Pi} \times [t_0, t_1]$. Следовательно, интегральный оператор G, рассматриваемый действующим из $L_2(\overline{\Pi})$ в $L_2[t_0, t_1]$, вполне непрерывен. Задача решения уравнения (44) в этой паре пространств некорректна.

В заключение отметим, что обратные задачи для уравнений параболического типа, как правило, являются некорректными. Для их решения обычно привлекается теория некорректных задач, разработанная в работах Тихонова А.Н., Лаврентьева М.М., Иванова В.К. и их учеников [10–12]. В данной работе, в отличие от других работ, предлагается спектральный метод для обоснования единственности решения обратной задачи (2–7).

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ – Поволжье, № 14-01 - 97003.

Список литературы

1. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.

Denisov A.M. Introduction to Inverse Problems / A.M. Denisov. – M.: Izd. MGU, 1994. – 208 p.

2. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.Н. Самарский. – М.: Физматлит, 1966. – 724 с.

Tikhonov A.N. Equations of mathematical physics / A.N. Tikhonov, A.N. Samaraski. – M: Izd. Fizmatlit, 1966. – 724 p.

3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1966. – 444 с.

Sobolev S.L. Equations of mathematical physics / S.L. Sobolev. – M: Nauka. 1966. – 444 p.

4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. – М.: Высшая школа, 2003. – 256 с.

Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics / V.S. Vladimirov, V.V. Zharinov. – M.: Visshaya shkola, 2003. – 256 p.

5. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.

Koshlakov N.S. Partial differential equations of mathematical physics / N.S. Koshlakov, E.B. Gliner, M.M. Smirnov. – M.: Visshaya shkola, 1970. – 712 p.

6. Годунов С.К. Уравнения математической физики / С.К. Годунов. 2–е изд. – М.: Наука, 1979. – 392 с.

Godunov S.K. Equations of mathematical physics / S.K. Godunov. 2-nd iss. – M.: Nauka, 1979. – 392 p.

7. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с.

Sabitov K.B. Equations of mathematical physics / K.B. Sabitov. – M: Izd. Fizmatlit, 2013. – 352 p.

8. Юнусова Г.Р. Обоснование единственности и существования начально–граничной задачи для уравнения мембраны методом спектрального анализа / Г.Р.Юнусова // Труды Стерлитамакского филиала Академии наук Республики Башкортостан. Серия "Физико-математические и технические науки". – Уфа: Гилем, 2009. Вып. 6. – С. 176–181.

Unusova G.R. Justification for existence and uniqueness of solutions of the initial – boundary value problem for the equation of the membrane method of spectral analysis / G.R. Unusova // Trudi Sterlitamakskogo fifliala Akademii nauk RB. Seriya "Phiziko-matematicheskie i tehnicheskie nauki". – Ufa:Gilem, 2009. Issue 6. – P. 172–181.

9. Зайнуллов А.Р. Обратные задачи для уравнения теплопроводности / А.Р. Зайнуллов // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучнаясерия. – 2015. – №6 (128). –С. 62–75.

Zaynullov A.R. Inverse problems for the heat equation. / A.R. Zaynullov // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnayaseriya. – 2015. – №6. – P. 62–75.

10. ТихоновА.Н.Методырешениянекорректныхзадач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука: Главнаяредакцияфизико-математическойлитературы, 1979. — 285 с.

Tikhonov A.N., Arsenin V.J. Methods of solving ill-posed problems / A.N. Tikhonov, V.J. Arsenin. – M .: Nauka: Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoi literaturi, 1979. – 285 p.

11. Лавретьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лавретьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. — 286 с.

Lavrent'ev M.M.Ill-posed problems of mathematical physics and analysis / M.M. Lavrent'ev, V.G. Romanov, S.P. Shishatskiy. – M.: Nauka. 1980. – 286 p.

12. Иванов В.К. Теория линейных некорректных задач и её приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. — 206 с.

Ivanov V.K. The theory of linear ill-posed problems and its applications / V.K. Ivanov, V.V. Vasin, V.P. Tanana. – M.: Nauka, 1978. – 206 p.