УДК 517.9

О СВОЙСТВАХ ОДНОГО УСРЕДНЯЮЩЕГО ЯДРА В ВЕСОВОМ КЛАССЕ ЛЕБЕГА

ABOUT PROPERTIES OF THE AVERAGING KERNEL IN THE LEBESGUE WEIGHTED CLASS

Э.Л. Шишкина [1]
E.L. Shishkina [1]

[1] *Воронежский государственный университет, Россия, Воронеж, Университетская пл., д. 1*

Voronezh State University, Universitetskaya pl., 1, Voronezh, Russia

E-mail: ilina_dico@mail.ru

Аннотация. В работе показано, что рассматриваемое ядро является усредняющим в весовым классах Лебега и получено преобразование Фурье – Бесселя такого ядра. Ядро рассматриваемого вида может быть использовано при построении обратного оператора к гиперболическому потенциалу Рисса, порожденного многомерным обобщенным сдвигом.

Resume. It is shown that the considering kernel is the averaging kernel in the Lebesgue weight class of functions. The Fourier – Bessel transform of such kernel was obtained. This kernel can be used in the construction of the inverse operator for the hyperbolic Riesz potentials generated by multidimensional generalized translation.

Ключевые слова: усредняющее ядро, весовой класс функций Лебега.

Key words: averaging kernel, Lebesgue weight class of functions.

Введение

Исследование классических гиперболических уравнений опирается на интегральные операторы, называемые гиперболическими потенциалами. Такие потенциалы определяются на основе расстояния Лоренца. Их изучению посвящены многочисленные исследования [1–6]. Обращение гиперболических потенциалов опирается на операторы со специальными ядрами. Исследование сингулярных гиперболических уравнений также приводит к изучению весовых гиперболических потенциалов, которые мы называем *гиперболическими B-потенциалами*. Они представляют собой отрицательные вещественные степени оператора $\Omega_\gamma = B_{\gamma_1} - \sum\limits_{i=2}^{n} B_{\gamma_i}$, где $B_{\gamma_i} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \dfrac{\gamma_i}{x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ – сингулярный дифференциальный оператор Бесселя с произвольным положительным индексом γ_i, $i = 1,\dots,n$ [7, с. 3]. Дробные степени подобных операторов исследованы в источнике [8]. Исследование обращения таких операторов так же, как и в случае классических гиперболических потенциалов, требует изучения специальных ядер в весовых функциональных классах. Одно из таких ядер изучается в данной работе.

Отметим, что B-потенциалы Рисса с евклидовым расстоянием (эллиптические риссовы B-потенциалы, которые можно представить как отрицательные вещественные степени оператора $\Delta_\gamma = \sum_{k=1}^{n} B_{\gamma_k}$) достаточно хорошо изучены [9–12]. Однако, подходы к изучению эллиптических и гиперболических B-потенциалов отличаются, и мы будем использовать как инструменты, приспособленные для работы с потенциалами, порожденными обобщенным сдвигом T^y [13], разработанные в [9–12], так и методы работы с гиперболическими потенциалами, предложенные в [4, 5, 8].

Основные определения

Пусть $\mathrm{P}_n^+ = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathrm{P}_n, x_1 > 0, ..., x_n > 0\}$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ – мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел и $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$.

Следуя И. А. Киприянову [7, с.21], функцию определенную на P_n^+ будем называть x-чётной (по Киприянову), если она может быть продолжена на P_n четным образом по каждой переменной x_i с сохранением класса принадлежности функции. Примером функциональных множеств такого рода четности может служить множество ℓ раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на положительной полуоси $x > 0$, все производные которых нечетного порядка, меньшего или равного ℓ, равны нулю при $x = 0$.

Через $L_p^\gamma(\mathrm{P}_n^+) = L_p^\gamma$, $1 \le p < \infty$, будем обозначать замыкание по норме:

$$\| f \|_{L_p^\gamma(\mathrm{P}_n^+)} = \| f \|_{p,\gamma} = \left(\int_{\mathrm{P}_n^+} | f(x) |^p \, x^\gamma dx \right)^{1/p}, \quad x^\gamma = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i}.$$

множества измеримых на P_n^+, x-четных функций $f(x)$, определенных в области P_n^+. Хорошо известно, что это пространство банахово [7].

Преобразование Фурье-Бесселя [13], рассматриваемое в данной работе, имеет вид:

$$F_B[f](\xi) = \int_{\mathrm{P}_n^+} \mathbf{j}_\gamma(x,\xi) f(x) x^\gamma \, dx,$$

где $\mathbf{j}_\gamma(x,\xi) = \prod_{i=1}^{n} j_{\frac{\gamma_i - 1}{2}}(x\xi)$, а $j_\nu(x)$ - j-функция Бесселя, связанная с функцией Бесселя первого рода J_ν формулой [13]

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu} J_\nu(x). \tag{1}$$

Многомерный оператор Пуассона имеет вид [7]

$$\Pi_x^\gamma f(x) = C(\gamma) \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi f(x_1 \cos\alpha_1, ..., x_n \cos\alpha_n) \prod_{j=1}^{n} \sin^{\gamma_j - 1} \alpha_j \, d\alpha_j, \tag{2}$$

$$C(\gamma) = \pi^{-n/2} \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_j - 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_j}{2}\right)}.$$

Свойства оператора (2) изучены в [14] и [15].

Приведем формулу интеграла по сфере от «весовой плоской волны» из [16].

$$\int\limits_{s_1^+(n)} \Pi_\xi^\gamma f(\langle \xi, x\rangle) x^\gamma d\omega_x = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, 2^{n-1} \Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \int\limits_{-1}^{1} f(|\xi|p)(1-p^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} dp, \tag{3}$$

где $f(t)(1-t^2)^{n+|\gamma|-32} \in L_1(-1,1)$.

Основной результат

Рассмотрим функцию:

$$N_\gamma(x,\varepsilon) = \frac{C(n,\gamma,\varepsilon)}{(x_1^2+\varepsilon^2)^{\frac{\gamma_1}{2}+1} (|x'|^2+\varepsilon^2)^{\frac{n+|\gamma'|}{2}}}, \tag{4}$$

где $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, $\varepsilon > 0$,

$$C(n,\gamma,\varepsilon) = \frac{2^n \varepsilon^2 \Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|}{2}\right)}{\pi \prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}.$$

Далее мы покажем, что функция (2) является усредняющим ядром (см. в ниже доказанной теореме) и найдем преобразование Фурье – Бесселя этого ядра (свойство 3 теоремы).

Изучаемое нами ядро (2) оказывается полезным при изучении B-потенциалов с лоренцевыми расстояниями.

В следующей теореме приводятся основные свойства ядра $N_\gamma(x,\varepsilon)$.

Теорема. *Функция* $N_\gamma(x,\varepsilon)$ *обладает свойствами*:

1. $\int\limits_{\mathrm{P}_n^+} N_\gamma(x,\varepsilon) x^\gamma dx = \int\limits_{\mathrm{P}_n^+} N_\gamma(x,1) x^\gamma dx = 1,$
2. $N_\gamma(x,\varepsilon) \in L_p^\gamma$, $1 \le p \le \infty$,
3. $F_B[N_\gamma(x,\varepsilon)](\xi) = e^{-\varepsilon\xi_1 - \varepsilon|\xi'|}$.

Доказательство

1. Легко проверить, что $\int\limits_{\mathrm{P}_n^+} N_\gamma(x,\varepsilon) x^\gamma dx = \int\limits_{\mathrm{P}_n^+} N_\gamma(x,1) x^\gamma dx$ (применить растяжение $x = \varepsilon y$).

Остается показать, что $\int\limits_{\mathrm{P}_n^+} N_\gamma(x,1) x^\gamma dx = 1$. Простейшие преобразования приводят к вычислению трех интегралов:

$$\int\limits_{\mathrm{P}_n^+} \frac{y^\gamma dy}{(y_1^2+1)^{\frac{\gamma_1}{2}+1} (|y'|^2+1)^{\frac{n+|\gamma'|}{2}}} = \int\limits_0^\infty \frac{y_1^{\gamma_1} dy_1}{(y_1^2+1)^{\frac{\gamma_1}{2}+1}} \int\limits_0^\infty \frac{r^{n+|\gamma'|-2}}{(r^2+1)^{\frac{n+|\gamma'|}{2}}} dr \int\limits_{S_{n-1}^+} \sigma^{\gamma'} dS,$$

где S_{n-1}^+ - поверхность "нагруженной сферы" $|\sigma|=1, \sigma_i > 0$ в P_{n-1}^+. Первые два из них вычисляются по формуле из источника [16], а площадь "нагруженной сферы":

$$|S_1(n)^+| = \frac{\prod_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-1}{2}\right)}$$

(источник [16, формула (1.2.5)]). Отсюда следует доказываемое равенство.

2. Свойство $N_\gamma(x,\varepsilon)\in L_p^\gamma$, $1\le p\le\infty$ – очевидно.

3. Найдем преобразование Фурье-Бесселя от $N_\gamma(x,\varepsilon)$. Имеем:

$$F_B[N_\gamma(x,\varepsilon)](\xi) = C(n,\gamma,\varepsilon)\int\limits_{\mathrm{P}_n^+}\frac{\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)}{(x_1^2+\varepsilon^2)^{\frac{\gamma_1+1}{2}}(|x'|^2+\varepsilon^2)^{\frac{n+|\gamma'|}{2}}}x^\gamma dx =$$

$$= C(n,\gamma,\varepsilon)\int\limits_{\mathrm{P}_n^+}\frac{\prod_{i=1}^{n} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)}{(x_1^2+\varepsilon^2)^{\frac{\gamma_1+1}{2}}(|x'|^2+\varepsilon^2)^{\frac{n+|\gamma'|}{2}}}x^\gamma dx =$$

$$= C(n,\gamma,\varepsilon)\int\limits_0^\infty\frac{j_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)}{(x_1^2+\varepsilon^2)^{\frac{\gamma_1+1}{2}}}x_1^{\gamma_1}dx_1\int\limits_{\mathrm{P}_{n-1}^+}\frac{1}{(|x'|^2+\varepsilon^2)^{\frac{n+|\gamma'|}{2}}}(\Pi_x^\gamma e^{-i(x',\xi')})(x')^{\gamma'}dx'.$$

Переходя в интеграле по x_1 к функции J_ν по формуле (1), получим

$$\int\limits_0^\infty\frac{j_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)}{(x_1^2+\varepsilon^2)^{\frac{\gamma_1+1}{2}}}x_1^{\gamma_1}dx_1 = 2^{\frac{\gamma_1-1}{2}}\xi_1^{\frac{1-\gamma_1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)\int\limits_0^\infty\frac{x_1^{\frac{\gamma_1+1}{2}}}{(x_1^2+\varepsilon^2)^{\frac{\gamma_1+1}{2}}}J_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)dx_1.$$

Для вычисления последнего интеграла применим формулу 2.12.4.28 со стр. 160 из [18], которая имеет вид:

$$\int\limits_0^\infty\frac{x^{\nu+1}}{(x^2+z^2)^\rho}J_\nu(cx)dx = \frac{c^{\rho-1}z^{\nu-\rho+1}}{2^{\rho-1}\Gamma(\rho)}K_{\nu-\rho+1}(cz), \tag{5}$$

$$c>0,\qquad \operatorname{Re} z>0;\qquad -1<\operatorname{Re}\nu<2,\qquad \operatorname{Re}\rho-\frac{1}{2},$$

где $K_\nu(x)$ – функция Макдональда:

$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\alpha}(x)-I_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)},$$

$$I_\alpha(x) = i^{-\alpha}J_\alpha(ix) = \sum_{m=0}^\infty\frac{1}{m!\Gamma(m+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$$

а функции $I_\alpha(x)$ и $K_\alpha(x)$ называются также гиперболическими функциями Бесселя первого и второго рода, соответственно. Очевидно, что

$$K_\alpha(x)=K_{-\alpha}(x).$$

Приведем также формулу из [18] вида:

$$K_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}. \qquad (6)$$

Имеем $\rho=\frac{\gamma_1}{2}+1$, $\nu=\frac{\gamma_1-1}{2}$, $c=\xi_1$, $z=\varepsilon$

$$\int\limits_0^\infty \frac{x_1^{\frac{\gamma_1+1}{2}}}{(x_1^2+\varepsilon^2)^{\frac{\gamma_1}{2}+1}} J_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)dx_1=$$

$$=\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\xi_1^{\frac{\gamma_1}{2}}}{2^{\frac{\gamma_1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)}K_{-\frac{1}{2}}(\varepsilon\xi_1)=\frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\xi_1^{\frac{\gamma_1}{2}}}{2^{\frac{\gamma_1+1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}+1\right)}\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon\xi_1}}e^{-\varepsilon\xi_1}=\frac{\sqrt{\pi}\,\xi_1^{\frac{\gamma_1-1}{2}}}{2^{\frac{\gamma_1+1}{2}}\varepsilon\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}+1\right)}e^{-\varepsilon\xi_1}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty \frac{j_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1)}{(x_1^2+\varepsilon^2)^{\frac{\gamma_1}{2}}}x_1^{\gamma_1}dx_1=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)}{2\varepsilon\,\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}+1\right)}e^{-\varepsilon\xi_1}. \qquad (7)$$

В интеграле:

$$\int\limits_{\mathrm{P}_{n-1}^+}\frac{1}{(|x'|^2+\varepsilon^2)^{\frac{n+|\gamma'|}{2}}}(\Pi_x^\gamma e^{-i\langle x',\xi'\rangle})(x')^{\gamma'}dx'$$

перейдем к сферическим координатам $x'=r\theta$, $\theta=\frac{x'}{|x'|}\in\mathrm{P}_{n-1}^+$, получим:

$$\int\limits_{\mathrm{P}_{n-1}^+}\frac{1}{(|x'|^2+\varepsilon^2)^{\frac{n+|\gamma'|}{2}}}(\Pi_x^\gamma e^{-i\langle x',\xi'\rangle})(x')^{\gamma'}dx'=$$

$$=\int\limits_0^\infty\frac{r^{n+|\gamma'|-2}}{(r^2+\varepsilon^2)^{\frac{n+|\gamma'|}{2}}}dr\int\limits_{\Sigma_1^+(n-1)}(\Pi_x^\gamma e^{-ir\langle\theta,\xi'\rangle})\theta^{\gamma'}dS.$$

Для вычисления интеграла $\int\limits_{\Sigma_1^+(n-1)}(\Pi_x^\gamma e^{-ir\langle\theta,\xi'\rangle})\theta^{\gamma'}dS$ воспользуемся формулой (3), получим:

$$\int\limits_{\Sigma_1^+(n-1)}(\Pi_x^\gamma e^{-ir\langle\theta,\xi'\rangle})\theta^{\gamma'}dS=\frac{\prod\limits_{i=2}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-2}{2}\right)}\int\limits_{-1}^1 e^{-irp|\xi'|}(1-p^2)^{\frac{n+|\gamma'|-4}{2}}dp=$$

$$=\frac{\prod_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-2}{2}\right)}\int_{-1}^{1}e^{irp|\xi'|}(1-p^2)^{\frac{n+|\gamma'|-4}{2}}\,dp.$$

Применяя формулу 4 из [19] вида

$$J_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{itz}\,dt,$$

будем иметь:

$$\int_{\Sigma_1^+(n-1)}(\Pi_x^{\gamma}e^{-ir\langle\theta,\xi'\rangle})\theta^{\gamma'}dS=\frac{\prod_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-2}{2}\right)\left(\frac{r|\xi'|}{2}\right)^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}}J_{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}(r|\xi'|)=$$

$$=\frac{\prod_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}}\left(\frac{2}{r|\xi'|}\right)^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}J_{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}(r|\xi'|).$$

Получим:

$$\int_{\mathrm{P}_{n-1}^+}\frac{1}{(|x'|^2+\varepsilon^2)^{\frac{n+|\gamma'|}{2}}}(\Pi_x^{\gamma}e^{-i\langle x',\xi'\rangle})(x')^{\gamma'}dx'=$$

$$=\frac{\prod_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}}\left(\frac{2}{|\xi'|}\right)^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}\int_0^{\infty}\frac{r^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}}{(r^2+\varepsilon^2)^{\frac{n+|\gamma'|}{2}}}J_{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}(r|\xi'|)\,dr.$$

Последний интеграл найдем по формуле (5) при $\rho=\frac{n+|\gamma'|}{2}$, $\nu=\frac{n+|\gamma'|-3}{2}$, $c=|\xi'|$, $z=\varepsilon$ и используем формулу (6):

$$\int_0^{\infty}\frac{r^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}}{(r^2+\varepsilon^2)^{\frac{n+|\gamma'|}{2}}}J_{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}(r|\xi'|)\,dr=\frac{|\xi'|^{\frac{n+|\gamma'|}{2}-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n+|\gamma'|}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|}{2}\right)}K_{-\frac{1}{2}}(\varepsilon|\xi'|)=$$

$$=\frac{|\xi'|^{\frac{n+|\gamma'|}{2}-1}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{n+|\gamma'|}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|}{2}\right)}\sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon|\xi'|}}e^{-\varepsilon|\xi'|}=\frac{\sqrt{\pi}\,|\xi'|^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}}{2^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}\varepsilon\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|}{2}\right)}e^{-\varepsilon|\xi'|}.$$

Тогда

$$\int_{\mathrm{P}_{n-1}^+}\frac{1}{(|x'|^2+\varepsilon^2)^{\frac{n+|\gamma'|}{2}}}(\Pi_x^{\gamma}e^{-i\langle x',\xi'\rangle})(x')^{\gamma'}dx'=$$

$$
=\frac{\prod_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2}}\left(\frac{2}{|\xi'|}\right)^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}\,|\xi'|^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}}{2^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}}\varepsilon\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|}{2}\right)}e^{-\varepsilon|\xi'|}=
$$

$$
=\frac{\sqrt{\pi}\prod_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\varepsilon\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|}{2}\right)}e^{-\varepsilon|\xi'|}. \qquad (8)
$$

Пользуясь (7) и (8) имеем:

$$
F_B[N_\gamma(x,\varepsilon)](\xi)=C(n,\gamma,\varepsilon)\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)}{2\varepsilon\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}+1\right)}\frac{\sqrt{\pi}\prod_{i=2}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\varepsilon\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|}{2}\right)}e^{-\varepsilon\xi_1-\varepsilon|\xi'|}=
$$

$$
=\frac{2^n\varepsilon^2\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|}{2}\right)}{\pi\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\frac{\pi\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^n\varepsilon^2\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|}{2}\right)}e^{-\varepsilon\xi_1-\varepsilon|\xi'|}=e^{-\varepsilon\xi_1-\varepsilon|\xi'|}.
$$

Доказательство закончено.

Список литературы

1. Riesz M. L'intégrale de Riemann-Liouville et le probléme de Cauchy / M. Riesz // Acta Math. – 1949. – V. 81. – № 1–2. – P. 1–223.

2. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
Samko S.G. Integrals and Fractional Derivatives and Some of Their Applications / S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev. – Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987. – 687 p.

3. Ногин В.А. Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p-плотностями / В.А. Ногин, Е.В. Сухинин // Докл. РАН. – 1993. – Т. 329. – № 5. – С. 550–552.
Nogin V.A. Inversion and characterization of hyperbolic potentials in Lp-spaces / V.A. Nogin, E.V. Sukhinin // Dokl. Acad. Nauk. – 1993. – V. 329 – № 5. – P. 550–552.

4. Ногин В.А. Дробные степени оператора Клейна-Гордона-Фока в L_p-пространствах / В.А. Ногин, Е.В. Сухинин // ДАН. – 1995. – Т. 341. – № 2. – С. 166–168.
Nogin V.A. Fractional powers of the Klein-Gordon-Fock-spaces / V.A. Nogin, E.V. Sukhinin // Dokl. Acad. Nauk. – 1995. – V. 341. – № 2. – С. 166–168.

5. Киприянов И.А. Потенциалы Рисса на пространствах Лоренца / И.А. Киприянов, Л.А. Иванов // Матем. сб. – 1986. – Т. 130(172). – № 4(8).– С. 465–474.
Kipriyanov I.A. Riesz potentials on Lorentz spaces / I.A. Kipriyanov, L.A. Ivanov // Mat. Sb. (N.S.). – V. 130(172). – № 4(8). – 1986. – P. 465–474.

6. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. – М.: Наука, 1997. – 200 с.
Kipriyanov I.A. Singular Elliptic Boundary Value Problems / I.A. Kipriyanov. – M.: Nauka, 1997. – 200 p.

7. Киприянов И.А. Преобразование Фурье-Бесселя и дробные степени дифференциальных операторов / И.А. Киприянов // ДАН. – 2000. – Т. 373. – № 1. – С. 17–20.
Kipriyanov I.A. The Fourier-Bessel transform and fractional powers of differential operators / I.A. Kipriyanov // Dokl. Math. 2000. – V. 373. – № 1. – P. 17–20.

8. Ляхов Л.Н. Обращение В-потенциалов Рисса / Л.Н.Ляхов // Докл. АН СССР. – 1991 . – Т. 321. – № 3 . — С. 466–469.

Lyakhov L.N. Inversion of Riesz B-potentials / L.N. Lyakhov // Dokl. Acad. Nauk USSR, 1994. V. 334. – № 3. P. 278–280.

9. Ляхов Л.Н. Пространства B-потенциалов Рисса / Л.Н.Ляхов // Докл. АН СССР. – 1994. – Т. 334. – № 3 .— С. 278–280.

Lyakhov L.N. Spaces of Riesz B-potentials / L.N. Lyakhov // Dokl. Acad. Nauk USSR, 1991. V. 321. – № 3. P. 466–469.

10. Ляхов Л.Н. О символе интегрального оператора типа B-потенциала с однократной характеристикой / Л.Н. Ляхов // Докл. РАН. – 1996. – Т. 351. – № 2 .— С. 164–168.

Lyakhov L.N. On the symbol of the B-potentials' type integral operator of with a single characteristic / L.N. Lyakhov // Dokl. RAN, 1996. V. 351. – № 2. P. 164–168.

11. Ляхов Л.Н. Обобщенные B-потенциалы Рисса смешанного типа / Л.Н. Ляхов, Э.Л. Шишкина ДАН, 2006. – Т. 406. – № 3. – С. 303–307.

Lyakhov L.N., Shishkina E. L., Generalized Riesz B-potentials of the mixed type, Doklady Mathematics. – V. 73. – № 1. – P. 42–45.

12. Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б.М. Левитан // Успехи математических наук. – Т. VI. – Вып. 2 (42). – 1951. – С. 102–143.

Levitan B.M. Expansion in Fourier Series and Integrals with Bessel Functions / B.M. Levitan // Uspekhi Mat. Nauk. 1951. V. 6. – № 2(42). – P. 102–143.

13. Ситник С.М. Операторы преобразования и их приложения / С.М. Ситник // Исследования по современному анализу и математическому моделированию: сборник; отв. ред.: Ю.Ф. Коробейник, А.Г. Кусраев. – Владикавказ, 2008. – С. 226–293.

Sitnik S.M. Transmutations and Applications / S.M. Sitnik // Contemporary Studies in Mathematical Analysis. Eds. Yu.F. Korobeinik, A.G. Kusraev. – Vladikavkaz, 2008. – P. 226–293.

14. Ситник С.М. Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина–Пуассона / С.М. Ситник // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2010. – Т. 5. – № 18. – С. 135 –153.

Sitnik S.M. A Solution to the Problem of Unitary Generalization of Sonine–Poisson Transmutations / S.M. Sitnik // Belgorod State University Scientific Bulletin, Mathematics and Physics, – V. 5. – № 18. – P. 135 –153.

15. Ляхов Л.Н. B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию пространств Киприянова дробной B-гладкости и интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами / Л.Н. Ляхов. – Липецк: Издательство ЛГПУ, 2007. – 234 с.

Lyakhov L.N. B-hypersingular integrals and their applications to the description of the Kipriyanovs' spaces with fractional B-smoothness and integral equations with B-potential kernels / Lipetsk: Lyakhov L.N. LGPU publishing, 2007. – 234 p.

16. Прудников А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – Т. 1. Элементарные функции. Изд. 2-е, исправ. — М.: Физматлит, 2002. – 632 с.

Prudnikov A.P. Integrals and Series /A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev. V. 1. – Elementary functions, 2-d edition, FML. – 2002. – 632 p.

17. Прудников А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – Т. 2. Специальные функции. Изд. 2-е. – М.: Физматлит, 2003. – 664 с.

Prudnikov A.P. Integrals and Series / A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev. V. 2. Special functions, 2-d edition, FML. 2003. – 664 p.

18. Ватсон Г.И. Теория Бесселевых функций / Г.И. Ватсон. – Ч. 1 – М.: ИЛ, 1949. – 798 с.

Watson G.N. A treatise on the theory of Bessel functions / G.N. Watson. – First part. – M: IL, 1949. – 798 p.