МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПРОИЗВЕДЕНИЯ B_α
ON BOUNDARY VALUES OF PRODUCTS B_α

В.С. ЗАХАРЯН, Р.В. ДАЛЛАКЯН, И.В. ОГАНИСЯН
V.S. ZAKARYAN, R.V. DALLAKYAN, I.V. HOVHANNISYAN

Национальный политехнический университет Армении
National Polytechnic University of Armenia
E-mail: mathdep@seua.am; dallakyan@mail.ru; ishkhanh@gmail.com

Аннотация. Пользуясь аппаратом интегродифференцирования Римана–Лиувилля, М. М. Джрбашян обобщил класс мероморфных в единичном круге функций Р. Неванлинны, вводя также произведения $B_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$, которые в специальном случае $\alpha=0$ совпадают с произведениями Бляшке. При $-1<\alpha<0$ М. М. Джрбашяну и В. С. Захаряну удалось установить взаимосвязь между произведениями B_α и B Бляшке.

В настоящей работе, пользуясь теоремой о взаимосвязи произведений $B_\alpha(-1<\alpha<0)$ и $B=B_0$ доказывается, что бесконечные произведения B_α не могут принадлежать классу D_0^2 - аналитических в единичном круге функций с конечным интегралом Дирихле. Это означает, что производная произведения B_α не может принадлежать также классу H^1.

Resume. Using the Riemann-Liouville integration-differentiation operator M. M. Djrbashyan generalized the class of R. Nevanlinna's meromorphic functions in the unit circle including the product $B_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$, which in the special case of $\alpha=0$ coincide with the Blaschke product. Furthermore, when $-1<\alpha<0$, M. M. Djrbashyan and V. S. Zakaryan showed a connection between the products B_α and B of Blaschke.

In this work, using this connection theorem we prove that the infinite product $B_\alpha(-1<\alpha<0)$ doesn't belong to D_0^2 - the class of analytic functions in the unit circle with finite Dirichlet integral. This means that the derivative of B_α doesn't belong to the class H^1.

Ключевые слова: оператор интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля, произведение Бляшке, произведение Джрбашяна, ядра Джрбашяна, классы типа Дирихле.

Keywords: Riemann–Liouville integration-differentiation operator, Blaschke product, Djrbashyan product, Djrbashyan kernels, Dirichlet-type classes.

Введение

Пусть $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $0<p<+\infty$. Класс H^p определяется как множество тех аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций f для которых выполняется условие:

$$\sup_{0\le r<1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p d\varphi\right\}<+\infty.$$

О классах H^p можно читать в [1], [2].

Пусть $0<p<+\infty$, $-1<\alpha<+\infty$. Класс A_α^p определяется как множество тех аналитических в $\mathbb{D}$ функций для которых выполняется условие:

$$\|f\|_{A_\alpha^p}^p=\int_0^r\int_0^{2\pi}(1-r)^\alpha\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p rdrd\theta<+\infty.$$

Пусть $0<p<+\infty$, $-1<\alpha<+\infty$. Класс D_α^p определяется как множество тех аналитических в $\mathbb{D}$ функций для которых выполняется условие:

$$\|f\|_{D_\alpha^p}^p=\int_0^r\int_0^{2\pi}(1-r)^\alpha\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|^p rdrd\theta<+\infty.$$

В случае когда $\alpha+1<p$ классы D_α^p называются классами типа Дирихле. Класс D_0^2 называется классом аналитических в единичном круге функций с конечным интегралом Дирихле.
Пусть последовательность комплексных чисел $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-|z_n|\right)<+\infty.$$

Произведением Бляшке называется следующая функция:

$$B(z;\{z_n\})=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n-z}{1-\overline{z}_n z}\cdot\frac{|z_n|}{z_n},\ z\in\mathbb{D}.$$

О свойствах произведения Бляшке можно читать например в книгах [1], [2].
М. М. Джрбашяном [3, глава IX] введены в рассмотрение классы $N_\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ мероморфных в единичном круге функций и установлено их параметрическое представление.

Класс $N_\alpha\ (-1<\alpha<+\infty)$ определяется посредством α-характеристики $T_\alpha(r,F)=m_\alpha(r,F)+N_\alpha(r,F)$ как множество тех мероморфных в круге $|z|<1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1}\left\{T_\alpha(r,F)\right\}<+\infty.$$

При этом функции $m_\alpha(r,F)$, $N_\alpha(r,F)$ и $T_\alpha(r,F)$ представляют своеобразные аналоги известных неванлинновских функций $m(r,F)$, $N(r,F)$ и $T(r,F)$, совпадая с ними при значении параметра $\alpha=0$, так что класс N_0 совпадает с классов N Неванлинны.

Вместе с тем, важной особенностью классов N_α является то обстоятельство, что для любых значений $-1<\alpha_1<\alpha_2<+\infty$ имеет место строгое включение $N_{\alpha_1}\subset N_{\alpha_2}$ и, в частности

$$N_\alpha\subset N_0=N,\ (-1<\alpha<0).$$

Оператор интегродифференцирования $D^{-\alpha}$ (при $-1<\alpha<+\infty$) в смысле Риммана – Лиувилля с началом в нулевой точке определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha}\{\varphi(r)\}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r(r-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt,\ \ (0<\alpha<+\infty),$$

$$D^0\{\varphi(r)\}=\varphi(r),$$

$$D^{-\alpha}\{\varphi(r)\}=\frac{d}{dr}D^{-(1+\alpha)}\{\varphi(r)\},\quad(-1<\alpha<0).$$

Для аналитических функций принадлежащих классу N_α функция $T_\alpha(r,F)$ определяется следующим образом:

$$T_\alpha(r,f)=\int_{-\pi}^{\pi}D_{(+)}^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta,$$

где

$$D_{(+)}^{-\alpha}\{\varphi(r)\}==\max\left\{D^{-\alpha}\{\varphi(r)\};0\right\}.$$

Известно, что аналитическая функция класса N_α имеет вид:

$$f(z)=e^{i\gamma+\lambda k_\alpha}z^\lambda B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}s_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\psi(\theta)\right\},$$

где γ-произвольное вещественное число, λ- произвольное натуральное число, $K_\alpha=\alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}$, $\psi(\theta)$ - вещественная функция с конечным полным изменением на $[-\pi;\pi]$,

$$B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{-W_\alpha(z;a_n)},$$

$$W_\alpha(z,\xi)=\int\limits_{|\xi|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left[\xi^{-k}\int\limits_0^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-\bar{\xi}^k\int\limits_{|\xi|}^{1}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx\right]z^k,\ |z|<1,\ |\xi|<1,$$

$$S_\alpha(z)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right],\ |z|<1.$$

Функция $S_\alpha(z)$ называется ядром Джрбашяна типа Шварца. $\operatorname{Re}S_\alpha(z)$ называется ядром Джрбашяна типа Пуассона. При $\alpha=0$ эти ядра совпадают с ядрами Шварца и Пуассона соответственно.

$B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)$ называется произведением Джрбашяна. В специальном случае $\alpha=0$ произведение B_α совпадает с произведением Бляшке.

$$B_0\left(z;\{a_n\}\right)=B\left(z;\{a_n\}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}\frac{|a_n|}{a_n}.$$

В работе [4] М. М. Джрбашяну и В. С. Захаряну удалось доказать следующее утверждение.

Теорема. *(О взаимосвязи произведений B_α и B). При условии*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-|a_n|\right)^{1+\alpha}<+\infty,\quad(-1<\alpha<0)$$

имеет место представление:

$$B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)=B\left(z;\{a_n\}\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}s_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\},$$

где $\omega(\theta)$ - невозрастающая функция ограниченной вариации на $[0,2\pi]$ имеющая вид:

$$\omega(\theta)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\theta D^{-\alpha}\log\left|\frac{B_\alpha\left(r_ne^{i\theta};\{a_n\}\right)}{B\left(r_ne^{i\theta};\{a_n\}\right)}\right|d\theta$$

$$\left(0<r_1<r_2<\ldots<r_n<\ldots,\ r_n\uparrow 1\right).$$

Основные результаты

Лемма 1. *Пусть $-1<\alpha<0$ и пусть последовательность $\{z_n\}\subset D$ такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-|z_n|\right)^{1+\alpha}<+\infty.$$

Тогда если произведение $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)$ не принадлежит классу D^2_β, $0<\beta+1<2$, то этому классу не принадлежит также произведение $B^*_\alpha=\tilde{B}_\alpha\cdot B_\alpha$, где

$$\tilde{B}_\alpha\left(z;\{z_k\}\right)=\prod_{k=1}^{N} b_\alpha\left(z;z'_k\right),$$

конечное произведение Джрбашяна $\left(\{z'_k\}_{k=1}^{N}\subset \mathbb{D}\right)$.

Доказательство. Из вида произведения B^*_α следует, что

$$\left|\left(B^*_\alpha\right)'\right|\geq\left\|\tilde{B}'_\alpha\cdot B_\alpha\right|-\left|B'_\alpha\cdot\tilde{B}_\alpha\right\|.$$

Значит

$$\left|\left(B^*_\alpha\right)'\right|^2\geq\left|B'_\alpha\cdot\tilde{B}_\alpha\right|^2-2\left|B'_\alpha\cdot\tilde{B}_\alpha\right|\cdot\left|\tilde{B}'_\alpha\cdot B_\alpha\right|+\left|\tilde{B}'_\alpha\cdot B_\alpha\right|^2.$$

Следовательно, имея ввиду что $\left|\tilde{B}'_\alpha\cdot B_\alpha\right|\leq 1$, будем иметь

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|\left(B^*_\alpha\right)'\right|^2 d\varphi dr\geq\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|B'_\alpha\cdot\tilde{B}_\alpha\right|^2 d\varphi dr-$$

$$-2\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|B_\alpha{}'\right|\cdot\left|\tilde{B}'_\alpha\right|d\varphi dr+\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^2\left|\tilde{B}'_\alpha\cdot B_\alpha\right|^2 d\varphi dr. \tag{1}$$

Так как $\tilde{B}_\alpha$ - конечное произведение Джрбашяна, то нетрудно установить, что

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|B'_\alpha\cdot\tilde{B}_\alpha\right|^2 d\varphi dr\geq C_1\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|B'_\alpha\right|^2 d\varphi dr. \tag{2}$$

Пусть $1<p<2$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Пользуясь неравенством Юнга (см [5], стр. 53) будем иметь

$$2\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|B'_\alpha\right|\cdot\left|\tilde{B}'_\alpha\right|d\varphi dr\leq\frac{2}{p}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|B'_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^p d\varphi dr+$$

$$+\frac{2}{q}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|\tilde{B}'_\alpha\left(re^{i\varphi};z'_n\right)\right|^q d\varphi dr.$$

Второй интеграл правой части последнего неравенства конечен, так как $\tilde{B}_\alpha$ - конечное произведение. Значит

$$2\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|B'_\alpha\right|\cdot\left|\tilde{B}'_\alpha\right|d\varphi dr\leq\frac{2}{p}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|B'_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^p d\varphi dr+C_2 \tag{3}$$

Из (1) пользуясь неравенствами (2) и (3) получаем:

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|\left(B^*_\alpha\right)'\right|^2 d\varphi dr\geq C_1\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|B'_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^2 d\varphi dr-$$

$$-\frac{2}{p}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|B'_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^p d\varphi dr-C_2, \tag{4}$$

где $1<p<2$, C_1 и C_2 – некоторые положительные числа.

Так как B_α не принадлежит классу D^2_β, то

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|B'_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^2 d\varphi dr=+\infty.$$

Далее, нетрудно установить, что

$$C_1\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|B'_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^2 d\varphi dr-\frac{2}{p}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|B'_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^p d\varphi dr-C_2\geq$$

$$\geq C_3\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^\beta\left|B'_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^2 d\varphi dr.$$

Из (4), пользуясь последним неравенством и следует справедливость утверждения леммы.

Теорема 1. *Пусть* $-1<\alpha\leq 0$ *и пусть последовательность* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-|z_n|\right)^{1+\alpha}<+\infty.$$

Тогда если произведение $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)$ имеет конечный интеграл Дирихле, то B_α является конечным произведением.

Доказательство. Как было отмечено выше, в специальном случае $\alpha=0$ произведения Джрбашяна и Бляшке совпадают. Для произведений Бляшке теорема доказана в [6, стр. 176]. Теперь пусть $-1<\alpha<0$. Из леммы 1 следует, что можно предполагать что последовательность $\{z_n\}$ такая, что

$$\exp\left\{-\frac{2\alpha^2}{(1+\alpha)(2+\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-|z_n|\right)^{1+\alpha}\right\}\le\frac{q}{2},$$

где q - некоторое положительное число. В работе [7] доказано, что при $-1<\alpha<0$ имеет место неравенство:

$$\left|B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)\right|\le\exp\left\{-\frac{2\alpha^2}{(1+\alpha)(2+\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-|z_n|\right)^{1+\alpha}\right\}\cdot\left|B\left(z;\{z_n\}\right)\right|.$$

Значит справедливо следующее неравенство:

$$\left|B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)\right|\le\frac{q}{2}\left|B\left(z;\{z_n\}\right)\right| \tag{5}$$

Из теоремы о взаимосвязи произведений Джрбашяна и Бляшке, имеем:

$$B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)=B\left(z;\{z_n\}\right)\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\},$$

где $\omega(\theta)$ - невозрастающая функция конечной вариации на $[0,2\pi]$. Значит

$$B_\alpha'\left(z;\{z_n\}\right)=B'\left(z;z_n\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\}+B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha'\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta).$$

Откуда следует справедливость следующего неравенства:

$$\left|B_\alpha'\left(z;\{z_n\}\right)\right|\ge\left\|B'\left(z;\{z_n\}\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\}\right|-\left|B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha'\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\|.$$

Следовательно, учитывая неравенство (5) и пользуясь неравенством Юнга при $p=q=2$, получаем:

$$\left|B_\alpha'\left(z;\{z_n\}\right)\right|^2\ge\left|B'\left(z;\{z_n\}\right)\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\}\right|^2-$$

$$-2\left|B'\left(z;\{z_n\}\right)\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\}\right|\cdot\left|B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)\right|\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha'\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right|+$$

$$+\left|B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)\right|^2\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha'\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right|^2\ge\left|B'\left(z;\{z_n\}\right)\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\}\right|^2-$$

$$-q\left|B'\left(z;\{z_n\}\right)\right|\cdot\left|\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\}\right|\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha'\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right|+$$

$$+\left|B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)\right|^2\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha'\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right|^2\ge$$

$$\ge\frac{1}{2}\left|B'\left(z;\{z_n\}\right)\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\}\right|^2+\left(\left|B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)\right|^2-\frac{q^2}{2}\right)\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha'\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right|^2.$$

Умножая полученное неравенство на $\left|\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\}\right|^2$ будем иметь:

$$\left|\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\}\right|^2\left|B_\alpha'\left(z;\{z_n\}\right)\right|^2\ge\frac{1}{2}\left|B'\left(z;\{z_n\}\right)\right|^2+$$

$$+\left(\left|B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)\right|^2-\frac{q^2}{2}\right)\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S'_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right|^2\cdot\left|\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S'_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\}\right|^2.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства получаем:

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|B'_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^2\cdot\left|\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(re^{i(\varphi-\theta)}\right)d\omega(\theta)\right\}\right|^2 d\varphi dr\geq\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|B'\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^2 d\varphi dr+$$

$$+\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\left|B_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^2-\frac{q^2}{2}\right)\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S'_\alpha\left(re^{i(\varphi-\theta)}\right)d\omega(\theta)\right|^2\cdot\left|\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(re^{i(\varphi-\theta)}\right)d\omega(\theta)\right\}\right|^2 d\varphi dr. \tag{6}$$

Нетрудно установить, что для любого значения r, $0<r<1$, число q можно подобрать таким образом, чтобы

$$\int_0^{2\pi}\left(\left|B_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^2-\frac{q^2}{2}\right)\cdot\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S'_\alpha\left(re^{i(\varphi-\theta)}z\right)d\omega(\theta)\right|\cdot\left|\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(re^{i(\varphi-\theta)}z\right)d\omega(\theta)\right\}\right|d\varphi>0$$
.

Следовательно из (6) будем иметь:

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|B'\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^2 d\varphi dr\leq\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|B'_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^2\cdot\left|\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(re^{i(\varphi-\theta)}\right)d\omega(\theta)\right\}\right|^2 d\varphi dr\leq$$

$$\leq\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|B'_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^2\left\{1+\left|1-\exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}S_\alpha\left(re^{i(\varphi-\theta)}\right)d\omega(\theta)\right]\right|\right\}^2 d\varphi dr.$$

Отсюда, имея ввиду, что когда $\operatorname{Re}z\geq 0$, то имеет место следующее неравенство:

$$\left|1-e^{-z}\right|\leq|z|,$$

и вспоминая, что $\operatorname{ReS}_\alpha(z)\geq 0$ при $-1<\alpha\leq 0$, получаем:

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|B'\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^2 d\varphi dr\leq\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|B'_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^2\left\{1+\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}S_\alpha\left(re^{i(\varphi-\theta)}\right)d\omega(\theta)\right|\right\}^2 d\varphi dr \tag{7}$$

Так как $\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\}\in N_\alpha$ (см. [3, гл. IX]), следует, что функция $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)$ везде на окружности имеет конечный предел, кроме, быть может, некоторого множества E, для которой $Cap_{1+\alpha}E=0$ (см. [8]). Пользуясь этим фактом, нетрудно установить справедливость следующего неравенства:

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|B'\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^2 d\varphi dr\leq C\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|B'_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|^2 d\varphi dr$$
.

Отсюда и следует справедливость утверждения теоремы.

Из этой теоремы, если $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$, то

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|z|<1}\left|f'(z)\right|^2 dxdy=\sum n\left|a_n\right|^2$$
,

следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $-1<\alpha\leq 0$ *и пусть последовательность* $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ *удовлетворяет условию Бляшке-Джрбашяна. Тогда коэффициенты Тейлора любого бесконечного произведения* $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)$ *удовлетворяют условию:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat{B}_\alpha(n)\right|^2 n=+\infty.$$

Теорема 3. *Пусть* $-1<\alpha\leq 0$ *и пусть последовательность* $\{z_n\}\subset \mathbb{D}$ *удовлетворяет условию Бляшке-Джрбашяна. Тогда производное бесконечного произведения* $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)$ *не принадлежит классу* H^1.

Утверждение теоремы следует из следующего факта: $H^1\subset A_0^2$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 15T-1A083.

Литература

1. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций / И.И. Привалов. – М.– Л: Гос. изд. технико-теоретический лит., 1950.
Privalov I.I. Boundery properties of analytical functions / I.I. Privalov. – GITTL, 1950.
2. Duren P.L. Theory of H^p Spaces / P.L. Duren; Academic Puss. – New York-London, 1970.
3. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. – М.: Наука, 1966.
Djrbashyan M.M. Integral transformations and representations of functions on the complex domain / M.M. Djrbashyan. – M.: Nauka, 1966.
4. Джрбашян М.М. О факторизации функций B_α / М.М. Джрбашян, В.С. Захарян // Мат. заметки. – 1968. – Т. 4. – №1. – С. 3–10.
Djrbashyan M.M. On factorization of functions B_α / M.M. Djrbashyan, V.S. Zakaryan // Mat. Zametki. – 1968. – Vol 4. – №1. – P. 3–10.
5. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1981.
Kolmogorov A.N. Elements theory of functions and functional analysis / A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin. – M.: Nauka, 1981.
6. Kim H.O. Derivatives of Blashke products / H.O. Kim // Pacific journal of Math. – Vol. 114. – № 1. – 1984.
7. Захарян В.С. Об одной оценке для произведения М.М. Джрбашяна / В.С. Захарян // Изв. АН Арм. ССР, Математика. – Т. XXIII. – № 2. – 1988.
Zakaryan V.S. On an estimation for Djrbashyan's product / V.S. Zakaryan // IAN Arm SSR, Matematika. – Vol. XXIII. – № 2. – 1988.
8. Захарян В.С. О радиальных предельных значениях функции B_α / В.С. Захарян // Изв. АН Арм. ССР, Математика. – Т. 3. – № 4–5. – 1968.
Zakaryan V.S. On radial boundary values of functions B_α / V.S. Zakaryan // IAN Arm SSR, Matematika. – Vol. 3. – № 4–5. – 1968.