УДК 517.9

О ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ДРОБНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

ABOUT THE WEIGHTED SPACES OF FRACTIONALLY DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

М.В. Кукушкин
M.V. Kukushkin

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, Нальчик, ул. Шортанова, д. 89/а.

Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 / a Shortanova St, Nalchik, Russia.

E-mail: Kukushkinmv@rambler.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается возможность построения Гильбертова пространства путем пополнения унитарного пространства, порожденного оператором дробного дифференцирования. Способ построения пространства аналогичен [1, с. 44], но в то же время в некотором смысле является более общим, поскольку в билинейной форме присутствует весовая функция. Доказывается теорема вложения построенного Гильбертова пространства в весовое пространство Лебега, суммируемых с квадратом функций, следствием которой является соответствующее оснащение весового пространства Лебега суммируемых с квадратом функций [8, с. 47] .

Resume. In this paper we consider the possibility of building the Hilbert space by completion of the unitary space generated by the fractional differentiation operator. A method of constructing this space is similar to [1, c. 44] but at the same time, is more general in a certain sense because a weighting function is present in the bilinear form. The embedding theorem for the constructed Hilbert space in the weighted Lebesgue space of square integrable functions is proved. The consequence of this theorem is the appropriate equipment of the weighted Lebesgue space of square integrable functions in the sense of [8, p. 47].

Ключевые слова: энергетическое пространство, дробное интегродифференцирование.

Keywords: energy space, fractional integrodifferentiation.

В работе [1, с. 44] А.М. Нахушевым описывается способ построения унитарных пространств с помощью операторов дробного дифференцирования и интегрирования. Вопрос построения пространств дробно дифференцируемых функций изучался И.А. Киприяновым, в данном направлении известна его работа [2, с. 166], в которой рассматриваются Банаховы пространства дробнодифференцируемых функций, доказываются теоремы вложения в пространство Соболева. Также известна работа Л.М. Энеевой [3]. В данной работе рассматривается возможность построения Гильбертова пространства путем пополнения унитарного пространства, порожденного оператором дробного дифференцирования. Способ построения пространства аналогичен [1, с. 44], но в то же время в некотором смысле является более общим поскольку в билинейной форме присутствует весовая функция. Доказывается теорема вложения пространства $N_{\alpha,c}(\Omega)$ в пространство $L_2(\Omega,\varphi)$, следствием которой является соответствующее оснащение пространства $L_2(\Omega,\varphi)$ [8, с. 47]. Если это не оговорено дополнительно, везде будем полагать: $\alpha\in(0,1),\ x\in\Omega.$ Интегрирование будем понимать в смысле Лебега. Будем использовать обозначения:

$$\Omega=\omega_{|r-d|}=\begin{cases} r<x<d,\ r<d \\ d<x<r,\ d<r \end{cases}\qquad r,d\in\mathrm{R}$$

$$\langle f,g\rangle_0\equiv\langle f,g\rangle_{L_2(\Omega)}=\int_\Omega f(x)g(x)dx,$$

$$\|\cdot\|_0=\|\cdot\|_{L_2(\Omega)},\quad \langle f,g\rangle_{0,\psi}\equiv\langle f,g\rangle_{L_2(\Omega,\psi)}=\int_\Omega f(x)g(x)\psi(x)dx.$$

Пространство $L_p(\Omega,\psi),\ 1\le p<\infty$ состоит из всех локально суммируемых с весом $\psi(x)>0,\ \psi(x)\in L_\gamma(\Omega),\ 1\le\gamma\le\infty$ на Ω функций $f(x)$ для которых конечна норма:

$$\|f\|_{L_p(\Omega,\psi)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \ \psi(x)dx\right]^{1/p}.$$

Следуя [4, с. 185] будем рассматривать классы:

$$I^\alpha_{r\pm}(L_p) = \{f(x) : f(x) = D^{-\alpha}_{rx}\varphi(t),\ \varphi(x) \in L_p(\Omega)\}, \tag{1}$$

$$I^\alpha_{d\mp}(L_p) = \{f(x) : f(x) = D^{-\alpha}_{dx}\varphi(t),\ \varphi(x) \in L_p(\Omega)\}, \tag{2}$$

$$I^\alpha_{d\mp}(L_p)^+ = \{f(x) : f(x) \in I^\alpha_{d\mp}(L_p),\ \varphi(x) > 0\}. \tag{3}$$

Допустим, что действительные числа θ, q удовлетворяют условиям:

$$\frac{2}{\theta} + \frac{1}{q} \le 1 + 2\alpha,\ \frac{2}{1+2\alpha} < \theta < \frac{1}{\alpha},\ 1 < q < \frac{1}{\alpha}, \tag{4}$$

и пусть $c(x) \in I^\alpha_{d\mp}(L_q)^+$. Рассмотрим линейное множество вида $I^\alpha_{r\pm}(L_\theta)$. Заметим, что данное множество является линейным пространством над полем действительных чисел. Определим на $I^\alpha_{r\pm}(L_\theta)$ билинейную форму

$$\langle u, v\rangle_{\alpha,c} = \frac{1}{2}\langle u, D^\alpha_{rx}v\rangle_{0,c} + \frac{1}{2}\langle v, D^\alpha_{rx}u\rangle_{0,c},\ u, v \in I^\alpha_{r\pm}(L_\theta). \tag{5}$$

Для этой билинейной формы выполнение аксиом скалярного произведения очевидно, кроме аксиомы

$$\langle u, u\rangle_{\alpha,c} > 0,\ u \ne 0. \tag{6}$$

Имеет место следующая лемма, позволяющая утверждать, что пара: билинейная форма (5) и линейное множество $I^\alpha_{r\pm}(L_\theta)$, образует унитарное пространство.

Лемма 1.1 *Пусть выполнены условия (4),* $u(x) \in I^\alpha_{r\pm}(L_\theta)$. *Тогда имеет место (6).*

Доказательство. Воспользовавшись леммой 1 [5], изменив порядок интегрирования, а затем интегрируя по частям, имеем для $\{u_n\} \in I^\alpha_{r\pm}(C^\infty_0),\ u_n \ne 0$

$$\langle u_n, u_n\rangle_{\alpha,c} = \langle u_n, D^\alpha_{rx}u_n\rangle_{0,c} \ge \langle c, D^{\alpha-1}_{rx}u_n u_n'\rangle_0 = \langle u_n u_n', D^{\alpha-1}_{dx}c\rangle_0 = \frac{1}{2}\int_\Omega u_n^2(x)\varphi(x)dx > 0 \tag{7}$$

Пусть теперь $u \in I^\alpha_{r\pm}(L_\theta)$, тогда согласно теореме из источника [4, с. 64]

$$D^{-\alpha}_{rx} : L_\theta \to L_p,\ p = \frac{\theta}{1-\alpha\theta}. \tag{8}$$

Рассмотрим

$$\langle u_n^2, \varphi\rangle_0 - \langle u^2, \varphi\rangle_0 = \langle (u_n - u)(u_n + u), \varphi\rangle_0 \le \|u_n - u\|_{L_p} \|(u_n + u)\varphi\|_{L_\gamma} \le$$

$$\le \|u_n - u\|_{L_p} \|(u_n + u)\|_{L_{\gamma t}} \|\varphi\|_{L_{\gamma s}} \tag{9}$$

где $p, \gamma,$ и $t, s > 1$, соответственно взаимно сопряжены. Для доказательства ограниченности правой части (9), преобразуем условие (4):

$$\frac{2}{\theta} + \frac{1}{q} \le 1 + 2\alpha,$$

$$\frac{1}{\theta} - \alpha \le 1 + \alpha - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{q},\quad 0 < q(1-\alpha\theta) \le q(\theta(1+\alpha)-1) - \theta,$$

$$\frac{q(\theta(1+\alpha)-1)}{q(\theta(1+\alpha)-1)-\theta} \le \frac{\theta(1+\alpha)-1}{1-\alpha\theta},\quad t \le \frac{\theta}{(1-\alpha\theta)} \cdot \frac{(\theta(1+\alpha)-1)}{\theta},$$

$$t \ge \frac{q(\theta(1+\alpha)-1)}{q(\theta(1+\alpha)-1)-\theta} > 1,$$

$$\frac{1}{t} \le 1 - \frac{\theta}{q(\theta(1+\alpha)-1)},\quad 1 - \frac{1}{t} \ge \frac{\theta}{q(\theta(1+\alpha)-1)},\quad \frac{t}{t-1} \le \frac{q(\theta(1+\alpha)-1)}{\theta},$$

$$\frac{1}{\gamma}=1-\frac{1}{p}=\frac{(\theta(1+\alpha)-1)}{\theta},\quad \begin{cases} t\le\dfrac{\theta}{(1-\alpha\theta)}(1-\dfrac{1}{p}) \\ \dfrac{t}{t-1}\le q(1-\dfrac{1}{p}) \end{cases},\quad \begin{cases}\gamma t\le p \\ \gamma s\le q\end{cases},$$

из чего следует ограниченность правой части (9).

Поскольку, согласно теореме 3.5 [4, с. 64]

$$\|u_n-u\|_{L_p}=\|D_{ax}^{-\alpha}(\psi_n-\psi)\|_{L_p}\le C_1\|\psi_n-\psi\|_{L_\theta}$$

и так как $C_0^\infty(\Omega)$ всюду плотно в $L_\theta(\Omega)$ по норме L_θ, то

$$\lim_{n\to\infty}\langle u_n^2,\varphi\rangle_0=\langle u^2,\varphi\rangle_0. \tag{10}$$

Используя неравенство Коши–Шварца, имеем оценку

$$\langle u_n-u,u_n-u\rangle_{\alpha,c}\le\|(u_n-u)c\|_{L_\mu}\|\psi_n-\psi\|_{L_\theta}\le\|(u_n-u)\|_{L_{\mu s}}\|c\|_{L_{\mu t}}\|\psi_n-\psi\|_{L_\theta}, \tag{11}$$

где $\mu,\theta,$ и $s,t>1$, соответственно, взаимно сопряжены. Покажем, что правая часть (11) стремится к нулю, для этого преобразуем условие (4). Имеем:

$$\frac{2}{\theta}+\frac{1}{q}\le 1+2\alpha,$$

$$\frac{1}{q}-\alpha\le(1+\alpha)-\frac{2}{\theta},\quad 0<\frac{\theta(1-\alpha q)}{q}\le\theta(1+\alpha)-2,$$

$$t\le\frac{\theta-1}{\theta}\cdot\frac{q}{1-\alpha q},\quad t\ge\frac{\theta-1}{\theta(1+\alpha)-2}>1,$$

$$\begin{cases} t\dfrac{\theta}{\theta-1}\le\dfrac{q}{1-\alpha q} \\ \dfrac{t}{t-1}\dfrac{\theta}{\theta-1}\le\dfrac{\theta}{1-\alpha\theta}\end{cases},\quad \begin{cases}\mu t\le\dfrac{q}{1-\alpha q} \\ \mu s\le\dfrac{\theta}{1-\alpha\theta}=p\end{cases}.$$

Учитывая, что $C_0^\infty(\Omega)$ всюду плотно в $L_\theta(\Omega)$ делаем вывод, что правая часть (11) стремится к нулю, откуда из свойств скалярного произведения следует что

$$\lim_{n\to\infty}\langle u_n,u_n\rangle_{\alpha,c}=\langle u,u\rangle_{\alpha,c}. \tag{12}$$

Воспользовавшись (10–12), осуществив предельный переход в (7), имеем неравенство

$$0<\int_\Omega u^2(x)\varphi(x)dx\le 2\langle u,u\rangle_{\alpha,c}<\infty,\quad u\ne 0. \tag{13}$$

Лемма доказана.

Поскольку на линейном пространстве $I_{r\pm}^\alpha(L_\theta)$ определено скалярное произведение, то данное пространство является унитарным. Согласно общей теории, [7, с.14], норму в этом пространстве можно определить стандартным образом:

$$\|u\|_{\alpha,c}=\langle u,u\rangle_{\alpha,c}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим это пространство $\widetilde{N}_{\alpha,c}(\Omega)$ пополняя его относительно введенной нормы, получим гильбертово пространство $N_{\alpha,c}(\Omega)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2 *Пространство* $N_{\alpha,c}(\Omega)$ *ограничено вложено в* $L_2(\Omega,\varphi)$.

Доказательство. Докажем, что между элементами пространства $N_{\alpha,c}(\Omega)$ и $L_2(\Omega,\varphi)$ можно установить линейное соответствие, такое, что:

1) каждому элементу $u\in N_{\alpha,c}(\Omega)$ приводится в соответствие единственный элемент $u'\in L_2(\Omega,\varphi)$;

2) если элементам $u,v\in N_{\alpha,c}(\Omega)$ приведены в соответствие $u',v'\in L_2(\Omega,\varphi)$, то линейной комбинации $\eta u+\mu v\in N_{\alpha,c}(\Omega)$ приводится в соответствие элемент $\eta u'+\mu v'\in L_2(\Omega,\varphi)$;

Для любого элемента $u \in N_{\alpha,c}(\Omega)$ можно построить последовательность элементов $\{u_n\} \in \widetilde{N}_{\alpha,c}(\Omega)$, такую, что $\|u_n - u\|_{\alpha,c} \to 0,\ n \to \infty$. Заметим, что $u_n - u_m \in \widetilde{N}_{\alpha,c}(\Omega)$, $\|u_n - u_m\|_{\alpha,c} \to 0,\ n,m \to \infty$. Согласно (13) имеем

$$\|u_n - u_m\|_{0,\varphi} \le K\|u_n - u_m\|_{\alpha,c},\ K = const. \tag{14}$$

В силу полноты пространства $L_2(\Omega,\varphi)$ существует элемент $u' \in L_2(\Omega,\varphi)$, такой, что $\|u_n - u_m\|_{0,\varphi} \to 0$. Поставим этот элемент в соответствие элементу $u \in N_{\alpha,c}(\Omega)$. Докажем единственность элемента u'. Предположим, что другая последовательность $\{v_n\} \in \widetilde{N}_{\alpha,c}(\Omega)$ сходится к u по норме пространства $N_{\alpha,c}(\Omega)$. Проведя аналогичные рассуждения, получим, что существует элемент $v' \in L_2(\Omega,\varphi)$, такой, что последовательность v_n сходится к v' по норме пространства $L_2(\Omega,\varphi)$. Покажем, что $v' = u'$. Согласно неравенству треугольника

$$\|u_n - v_n\|_{0,c} = \|u_n - u - (v_n - u)\|_{0,c} \le \|u_n - u\|_{0,c} + \|u - v_n\|_{0,c} \to 0. \tag{15}$$

Поскольку $u_n - v_n \in \widetilde{N}_{\alpha,c}(\Omega)$, то

$$\|u_n - v_n\|_{0,\varphi} \le K\|u_n - v_n\|_{\alpha,c} \to 0, \tag{16}$$

из чего, осуществив предельный переход, получим:

$$\|u' - v'\|_{0,\varphi} = \lim\|u_n - v_n\|_{0,\varphi} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Допустим, что элементам $u_1, u_2 \in N_{\alpha,c}(\Omega)$ соответствуют последовательности $\{u_{1n}\},\{u_{2n}\} \in \widetilde{N}_{\alpha,c}(\Omega)$, такие, что

$$\|u_{1n} - u_1\|_{\alpha,c} \to 0, \quad \|u_{2n} - u_2\|_{\alpha,c} \to 0.$$

Пусть этим элементам соответствуют элементы $u_1', u_2' \in L_2(\Omega,\varphi)$, такие, что: $\|u_{1n} - u_1'\|_{0,\varphi} \to 0$, $\|u_{2n} - u_2'\|_{0,\varphi} \to 0$. Тогда, согласно неравенству треугольника, получим

$$\|(\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2) - (\eta_1 u_{1n} + \eta_2 u_{2n})\|_{\alpha,c} = \|\eta_1(u_1 - u_{1n}) + \eta_2(u_2 - u_{2n})\|_{\alpha,c} \le$$
$$\eta_1\|u_1 - u_{1n}\|_{\alpha,c} + \eta_2\|u_2 - u_{2n}\|_{\alpha,c} \to 0,\ n \to \infty, \tag{17}$$

$$\|(\eta_1 u_1' + \eta_2 u_2') - (\eta_1 u_{1n} + \eta_2 u_{2n})\|_{0,\varphi} = \|\eta_1(u_1' - u_{1n}) + \eta_2(u_2' - u_{2n})\|_{0,\varphi} \le$$
$$\eta_1\|u_1' - u_{1n}\|_{0,\varphi} + \eta_2\|u_2' - u_{2n}\|_{0,\varphi} \to 0,\ n \to \infty. \tag{18}$$

Соотношения (17–18) означают, что элементу $\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2$ пространства $N_{\alpha,c}(\Omega)$ соответствует элемент $\eta_1 u_1' + \eta_2 u_2'$ пространства $L_2(\Omega,\varphi)$. Линейность соответствия доказана.

Выше нами было получено неравенство (13), устанавливающее соотношение между двумя нормами элемента унитарного пространства $\widetilde{N}_{\alpha,c}(\Omega)$. Покажем, что это неравенство верно для любого элемента пространства $N_{\alpha,c}(\Omega)$. Пусть $u \in N_{\alpha,c}(\Omega)$, существует последовательность элементов $\{u_n\} \in \widetilde{N}_{\alpha,c}(\Omega)$ такая, что

$$\|u_n - u'\|_{0,\varphi} \to 0,\ \|u_n - u\|_{\alpha,c} \to 0,\ n \to \infty.$$

Для элементов $u_n \in \widetilde{N}_{\alpha,c}(\Omega)$ имеет место неравенство (13):

$$\|u_n\|_{0,\varphi} \le K\|u_n\|_{\alpha,c}.$$

Воспользовавшись непрерывностью скалярного произведения, осуществив предельный переход в (13), для любого элемента $u \in N_{\alpha,c}(\Omega)$ получим

$$\|u'\|_{0,\varphi} \le K\|u\|_{\alpha,c}, \ u' \in L_2(\Omega,\varphi), u \in N_{\alpha,c}(\Omega). \tag{19}$$

Это означает, что $N_{\alpha,c}(\Omega)$ ограничено вкладывается в $L_2(\Omega,\varphi)$. Теорема полностью доказана.

Следствие 1. 3 *В силу доказанной теоремы на* $N_{\alpha,c}(\Omega)$ *определен линейный ограниченный оператор вложения:*

$$O : N_{\alpha,c}(\Omega) \to L_2(\Omega,\varphi).$$

Определение 1. 4 *Рассмотрим билинейную форму от* $f \in L_2(\Omega,\varphi), u \in N_{\alpha,c}(\Omega),$ *задающую линейный непрерывный функционал* l_f *над* $N_{\alpha,c}(\Omega)$

$$l_f(u) = \langle Ou, f\rangle_{0,\varphi} \le K\|f\|_{0,\varphi}\|u\|_{\alpha,c}, K = const. \tag{20}$$

Следуя [8, с. 46], определим на $L_2(\Omega,\varphi)$ оператор I, ставящий в соответствие каждому элементу из $L_2(\Omega,\varphi)$ линейный непрерывный функционал

$$I : L_2(\Omega,\varphi) \to N_{\alpha,c}(\Omega), \langle Ou, f\rangle_{0,\varphi} = \langle u, If\rangle_{\alpha,c}. \tag{21}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.5 *Пусть действительные числа* θ, q *удовлетворяют условиям:*

$$\frac{2}{\theta} + \frac{1}{q} \le 1 + \alpha,\ \theta > \frac{2}{1+2\alpha},\ q > 1,$$
$$c(x) \in I^{\alpha}_{d\mp}(L_q)^{+},$$

оператор

$$\tilde{P} : L_2(\Omega,c) \to L_2(\Omega,c),\ \tilde{P} = OI$$

обратим на $\mathrm{R}(\tilde{P})$. Тогда множество $I^{\alpha}_{r\pm}(L_\theta)$ всюду плотно в $L_2(\Omega,c)$ и

$$D^{\alpha}_{rx} : I^{\alpha}_{r\pm}(L_\theta) \to L_2(\Omega,c)$$

является положительным оператором.

Доказательство. Для удобства введем обозначения:

$$L_2(\Omega,c) = H_0,\ N_{\alpha,\mu}(\Omega) = H_+,\ \mu(x) = D^{-\alpha}_{dx}c,$$

тогда поскольку $\mu(x) \in L_\gamma$, $\gamma = \dfrac{q}{1-\alpha q} > q$, используя (19), с учетом следствия 1 имеем

$$\|Ou\|_{H_0} \le K\|u\|_{H_+}, u \in H_+, K = const. \tag{22}$$

Согласно условию данной теоремы оператор $\tilde{P}$ обратим на $\mathrm{R}(\tilde{P})$, покажем, что $\mathrm{R}(\tilde{P}) = \mathrm{D}(\tilde{P}^{-1})$ всюду плотно в H_0. Пусть $h \perp \mathrm{R}(\tilde{P})$, тогда

$$0 = \langle h, \tilde{P}f\rangle_{H_0} = \langle Ih, If\rangle_{H_+} = \langle \tilde{P}h, f\rangle_{H_0}.$$

Поскольку последнее равенство имеет место $\forall f \in H_0$, то $\tilde{P}h = 0$, откуда, учитывая обратимость $\tilde{P}$ на $\mathrm{R}(\tilde{P})$,получим $h = 0$, следовательно в силу леммы 2 [9, с. 88] делаем вывод, что $\mathrm{R}(\tilde{P})$ всюду плотно в H_0. Так как в свою очередь в силу теоремы 1 $I^{\alpha}_{r\pm}(L_\theta)$ плотно в $\mathrm{R}(\tilde{P})$ по норме H_0, то $I^{\alpha}_{r\pm}(L_\theta)$ всюду плотно в пространстве H_0.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Имеем:

$$\|D^{\alpha}_{rx}u\|^2_{0,c} = \int_{\Omega} |\psi(x)|^2 c(x)dx \le \|\psi\|^2_{L_{2\gamma'}}\|c\|_{L_\gamma},\ u(x) \in I^{\alpha}_{r\pm}(L_\theta),\ \gamma = \frac{q}{1-\alpha q}.$$

Покажем, что в силу условия теоремы $2\gamma' \le \theta$:

$$\frac{2}{\theta} + \frac{1}{q} \le 1 + \alpha,\ \frac{2}{\theta} - \frac{1}{q'} \le \alpha,\ 2q' \le (1+\alpha q')\theta,\ 2\gamma' = \frac{2q'}{1+\alpha q'} \le \theta,$$

откуда следует, что

$$D^{\alpha}_{rx} : I^{\alpha}_{r\pm}(L_\theta) \to L_2(\Omega,c). \tag{23}$$

В силу теоремы 1 будем иметь для $u \in I^{\alpha}_{r\pm}(L_\theta)$:

$$\langle u(x), D^{\alpha}_{rx} u(t)\rangle_{0,c} \geq 0,$$

причем

$$\langle u(x), D^{\alpha}_{rx} u(t)\rangle_{0,c} = 0$$

тогда и только тогда, когда $u(x)=0$. В доказательстве первой части данной теоремы было показано, что множество $I^{\alpha}_{r+}(L_\theta) \subset \mathrm{D}(D^{\alpha}_{rx})$ всюду плотно в $L_2(\Omega, c)$. Заметим, что для того чтобы оператор обладал свойством положительности в классическом смысле, необходимо еще выполнение условия симметричности. Поскольку согласно [1, с. 46] при определении свойства положительности оператора дробного интегродифференцирования, не требуется выполнение условия симметричности, то согласно такому определению оператор положительный. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим условия, наложенные на весовую функцию, при которых операторы O и I обратимы. Имеют место следующие теоремы:

Теорема 3. 6 *Пусть относительно* $\varphi(x)$ *выполнены условия:*

$$\varphi(x) > h > 0, \left(\int_{\Omega} |\varphi(t+\delta) - \varphi(t)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq M\delta, M = const,$$

действительные числа $\theta \leq q$ *удовлетворяют условиям (4). Тогда оператор* I *обратим на* $\mathrm{R}(I)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор I, согласно (21) для $f_1, f_2 \in L_2(\Omega, \varphi)$, $If_1 = If_2$, $u \in N_{\alpha,c}(\Omega)$ имеет место

$$\langle Ou, f_1 - f_2\rangle_{0,\varphi} = \langle u, I(f_1 - f_2)\rangle_{\alpha,c} = 0,$$

откуда согласно лемме 2 [9, с. 88] немедленно следует, что будет выполнятся равенство $f_1 = f_2$, в случае когда $\overline{\mathrm{R}(O)} = L_2(\Omega, \varphi)$.

Рассмотрим множество $U = \{u(x) : u(x) = v(x)/\sqrt{\varphi(x)},\, v(x) \in C_0^{\infty}(\Omega)\}$. Имеем для $u_n \in U, u \in L_2(\Omega, \varphi)$:

$$\|u_n - u\|^2_{0,\varphi} = \left\|v_n - u\sqrt{\varphi}\right\|^2_0.$$

Поскольку $u \in L_2(\Omega, \varphi)$ равносильно $u\sqrt{\varphi} \in L_2(\Omega)$, то отсюда следует, что множество U всюду плотно в $L_2(\Omega, \varphi)$. Покажем, что при условиях данной теоремы $U \subset I^{\alpha}_{a+}(L_\theta)$. Заметим, что с учетом теоремы 13.7 [4, с. 186] достаточно показать, что $1/\sqrt{\varphi} \in I^{\alpha}_{a+}(L_\theta)$. Из условия данной теоремы следует:

$$\left(\int_{\Omega} \left|1/\sqrt{\varphi(x)} - 1/\sqrt{\varphi(x+t)}\right|^{\theta} dx \right)^{\frac{1}{\theta}} < \frac{1}{2h^{\frac{3}{2}}} \left(\int_{\Omega} |\varphi(x) - \varphi(x+t)|^{\theta} \, dx \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq$$

$$\leq \frac{(mes\Omega)^{\frac{q-\theta}{\theta q}}}{2h^{\frac{3}{2}}} \left(\int_{\Omega} |\varphi(x) - \varphi(x+t)|^{q} \, dx \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{24}$$

Покажем, что последовательность $\{\psi_{\varepsilon}(x)\}$ (см. теорему 13.7 [4, с. 181]) фундаментальна в $L_\theta(\Omega)$. Использовав обобщенное неравенство Минковского, а затем оценку (24) и условие данной теоремы, имеем для $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$:

$$\left(\int_{r}^{d} |\psi_{\varepsilon_1}(x) - \psi_{\varepsilon_2}(x)|^{\theta} \, dx \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\int_{r}^{d} \left| \int_{x+\varepsilon_1}^{d} \frac{1/\sqrt{\varphi(x)} - 1/\sqrt{\varphi(\tau)}}{(\tau - x)^{\alpha+1}} d\tau - \int_{x+\varepsilon_2}^{d} \frac{1/\sqrt{\varphi(x)} - 1/\sqrt{\varphi(\tau)}}{(\tau - x)^{\alpha+1}} d\tau \right|^{\theta} dx \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$=\left(\int_r^d\left|\int_{x+\varepsilon_1}^{x+\varepsilon_2}\frac{1/\sqrt{\varphi(x)}-1/\sqrt{\varphi(\tau)}}{(\tau-x)^{\alpha+1}}d\tau\right|^\theta dx\right)^{\frac{1}{\theta}}=\left(\int_r^d\left|\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{1/\sqrt{\varphi(x)}-1/\sqrt{\varphi(x+t)}}{t^{\alpha+1}}dt\right|^\theta dx\right)^{\frac{1}{\theta}}\le$$

$$\le\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}t^{-\alpha-1}\left(\int_r^d\left|1/\sqrt{\varphi(x)}-1/\sqrt{\varphi(x+t)}\right|^\theta dx\right)^{\frac{1}{\theta}}dt\le M_1\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}t^{-\alpha}dt=$$

$$=\frac{M_1}{-\alpha+1}\left(\varepsilon_1^{-\alpha+1}-\varepsilon_2^{-\alpha+1}\right),\; M_1=M\frac{(mes\Omega)^{\frac{q-\theta}{\theta q}}}{2h^{\frac{3}{2}}},$$

что доказывает фундаментальность $\{\psi_\varepsilon(x)\}$. В силу полноты $L_\theta(\Omega)$, $\exists\psi(x)\in L_\theta(\Omega):\psi_\varepsilon(x)\xrightarrow{L_\theta}\psi(x)$, из чего в силу теоремы 13.2 [4, с. 183] следует: $1/\sqrt{\varphi(x)}\in I_{a+}^\alpha(L_\theta)$. Как было замечено выше, в силу теоремы 13.7 [4, с. 186] $U\subset I_{a+}^\alpha(L_\theta)$. Поскольку $I_{a+}^\alpha(L_\theta)\subset \mathrm{R}(O)$, то из этого следует, что $\overline{\mathrm{R}(O)}=L_2(\Omega,\varphi)$. Теорема доказана.

Теорема 4. 7 *Пусть* $\varphi(x)=\chi(x)-\chi(r)>h>0,\ \chi(x)\in \mathrm{H}^\lambda(\overline{\Omega}),\ \lambda+\alpha<1,\ 2/(1+2\alpha)<\theta<1/\alpha$. *Тогда оператор* O *обратим на* $\mathrm{R}(O)$.

Доказательство. Заметим, что при условии данной теоремы справедлива теорема 1, таким образом, для доказательства обратимости оператора O достаточно показать в обозначениях теоремы 1, что если элементам $u_1,u_2\in N_{\alpha,c}(\Omega)$ приводится в соответствие один элемент $u'\in L_2(\Omega,\varphi)$, то $u_1=u_2$. Допустим противное, обозначим $u_1-u_2=v$. Поскольку в силу теоремы 1.2 соответствие между элементами пространств $N_{\alpha,c}(\Omega)$ и $L_2(\Omega,\varphi)$ линейное, то $\|v\|_{0,\varphi}=0$. Существует последовательность:

$$\{v_n\}\subset\widetilde{N}_{\alpha,c}(\Omega):\lim_{n\to\infty}\|v_n\|_{0,\varphi}=0,\lim_{n\to\infty}\|v_n-v\|_{\alpha,c}=0.$$

Пусть $\eta\in\widetilde{N}_{\alpha,c}(\Omega)$, тогда

$$\langle v_n,\eta\rangle_{\alpha,c}=\frac{1}{2}\langle v_n,D_{rx}^\alpha\eta\rangle_{0,c}+\frac{1}{2}\langle D_{rx}^\alpha v_n,\eta\rangle_{0,c}.$$

С учетом следствия 1 теоремы 3.1 [4, с. 58] $c(x)\in \mathrm{H}^{\alpha+\lambda}(\overline{\Omega})$,

$$|\langle v_n,D_{rx}^\alpha\eta\rangle_{0,c}|=\left|\int_\Omega v_n(x)c(x)D_{rx}^\alpha\eta dx\right|\le C_1\int_\Omega|v_n(x)D_{rx}^\alpha\eta|\,dx\le C_1\left(\int_\Omega|v_n(x)|^2\varphi(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\int_\Omega\left|D_{rx}^\alpha\eta\right|^2\varphi^{-1}(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\le C_1\|v_n\|_{0,\varphi}\cdot\|D_{rx}^\alpha\eta\|_{L_\theta}\cdot\sqrt{\|\varphi^{-1}\|_{L_\gamma}}\le\frac{C_1(mes\Omega)^{\frac{1}{2\gamma}}}{\sqrt{h}}\|v_n\|_{0,\varphi}\cdot\|D_{rx}^\alpha\eta\|_{L_\theta}\to 0.$$

Поскольку из условия $1<\theta<1/\alpha$, согласно [4, с. 185] следует $I_{r\pm}^\alpha(L_\theta)=I_{d\mp}^\alpha(L_\theta)$, то в силу теоремы 13.7 [4, с. 186], и следствия 2 [4, с. 51] имеем:

$$|\langle D_{rx}^\alpha v_n,\eta\rangle_{0,c}|=\left|\int_\Omega v_n(x)D_{dx}^\alpha c\eta dx\right|\le\left(\int_\Omega|v_n(x)|^2\varphi(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\left|D_{dx}^\alpha c\eta\right|^2\varphi^{-1}(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\|v_n\|_{0,\varphi}\cdot\|D_{dx}^\alpha c\eta\|_{L_\theta}\cdot\sqrt{\|\varphi^{-1}\|_{L_\gamma}}\le\frac{(mes\ \Omega)^{\frac{1}{2\gamma}}}{\sqrt{h}}\|v_n\|_{0,\varphi}\cdot\|D_{dx}^\alpha c\eta\|_{L_\theta}\to 0.$$

Следовательно в силу непрерывности скалярного произведения

$$\langle v_n,\eta\rangle_{\alpha,c}\to\langle v,\eta\rangle_{\alpha,c}=0,n\to\infty,\eta\in I_{r\pm}^\alpha(L_\theta),$$

поскольку множество $I_{r\pm}^\alpha(L_\theta)$ является всюду плотным в пространстве $N_{\alpha,c}$, то согласно лемме 2 [9, с. 88]: $\|v\|_{\alpha,c}=0$, следовательно $u_1=u_2$. Теорема доказана.

Таким образом теорема 1 и теорема 4 дают возможность установить линейно изоморфное соответствие между пространствами $N_{\alpha,c}(\Omega)$ и $L_2(\Omega,\varphi)$, теорема 3 дает достаточные условия обратимости оператора I (см. определение 1). При выполнении условий теорем 1, 3, 4 имеет место теорема 2. Можно показать, что при выполнении условий теорем 1, 4 и дополнительном условии $\lambda > \alpha$, также имеет место теорема 2. Это будет следовать из полностью аналогичного повтора доказательства теоремы 3.

Следуя работе [6, с. 72], определим функционал энергии следующим образом:

Определение 2. 8 *Функционал*

$$F_f(u) = \|u\|_{\alpha,c} - 2\langle u, f\rangle_{0,\varphi}, \tag{25}$$

$$u \in N_{\alpha,c}, f \in L_2(\Omega,\varphi)$$

будем называть функционалом энергии оператора дробного дифференцирования.

Аналогично [6, с. 73] имеет место теорема 5.

Теорема 5. 9 *В энергетическом пространстве существует единственный элемент, на котором функционал энергии достигает минимума.*

Доказательство. Используя неравенство Коши-Буняковского, а так же соотношение между нормами пространств: $L_2(\Omega,\varphi)$, и $N_{\alpha,c}$ имеем следующую оценку:

$$|\langle u, f\rangle_{0,\varphi}| \le \|u\|_{0,\varphi}\|f\|_{0,\varphi} \le K\|f\|_{0,\varphi}\|u\|_{\alpha,c},\ u \in N_{\alpha,c},\ f \in L_2(\Omega,\varphi), \tag{26}$$

из чего следует, что функционал $\langle u, f\rangle_{0,\varphi}$ ограничен на $N_{\alpha,c}$. По теореме Рисса о представлении линейного функционала в Гильбертовом пространстве существует единственный элемент u_0 пространства $N_{\alpha,c}$, такой, что

$$\langle u, f\rangle_{0,\varphi} = \langle u, u_0\rangle_{\alpha,c},\ u \in N_{\alpha,c}. \tag{27}$$

С помощью формулы (27) преобразуем выражение (25) для функционала F_f :

$$F_f(u) = \|u\|_{\alpha,c} - 2\langle u,u_0\rangle_{\alpha,c} = \|u\|_{\alpha,c} - 2\langle u,u_0\rangle_{\alpha,c} + \|u_0\|_{\alpha,c} - \|u_0\|_{\alpha,c} = \|u-u_0\|_{\alpha,c} - \|u_0\|_{\alpha,c}.$$

Из чего следует, что в пространстве $N_{\alpha,c}$ существует единственный элемент u_0 на котором функционал F_f достигает своего минимума. Теорема доказана.

Определение 3. 10 *Элемент* u_0 *реализующий минимум функционала* F_f *в пространстве* $N_{\alpha,c}$ *будем называть минимальным элементом этого пространства, соответствующим элементу* f .

Следуя работе [6, с. 74], оценим норму минимального элемента. Полагая в формуле (27) $u = u_0$, оценив аналогично формулу (26), имеем

$$\|u_0\|_{\alpha,c} \le K\|f\|_{0,\varphi}. \tag{28}$$

Используя неравенство (19), получаем оценку нормы минимального элемента пространства $N_{\alpha,c}$ в пространстве $L_2(\Omega,\varphi)$:

$$\|u_0\|_{0,\varphi} \le K^2\|f\|_{0,\varphi}. \tag{29}$$

Следующая лемма используется в доказательстве важнейшей теоремы, которая дает достаточное условие сепарабельности энергетического пространства.

Теорема 6.11 *Если при условиях теоремы 4 относительно* φ, *система* $\{f_n\}$ *полна в пространстве* $L_2(\Omega,\varphi)$, *и если* $\{\rho_n\}$ *система минимальных элементов, соответствующих* $\{f_n\}$, *то система* $\{\rho_n\}$ *полна в энергетическом пространстве* $N_{\alpha,c}$.

Доказательство. Положим $u \in \widetilde{N}_{\alpha,c}(\Omega)$ Введем обозначения:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k f_k = s_N, \tag{30а}$$

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \rho_k = \sigma_N. \tag{30б}$$

Оценим квадрат нормы разности

$$\|u-\sigma_N\|^2_{\alpha,c} = \langle u-\sigma_N, u-\sigma_N\rangle_{\alpha,c} = \langle u,\mu\rangle_{\alpha,c} - \langle \sigma_N,\mu\rangle_{\alpha,c}, \tag{31}$$
$$\mu = u-\sigma_N \in N_{\alpha,c}.$$

Заметим, что $\forall \mu \in N_{\alpha,c}, \exists\{\mu_n\} \subset \widetilde{N}_{\alpha,c}$:

$$\lim_{n\to\infty} \langle u,\mu_n\rangle_{\alpha,c} = \langle u,\mu\rangle_{\alpha,c}. \tag{32}$$

поскольку $\{\mu_n\} \subset \widetilde{N}_{\alpha,c}$, $c(x) \in H^{\lambda+\alpha}(\overline{\Omega})$, то согласно теореме 13.7 [4, с. 186], следствию 2 [4, с. 51] имеет место

$$2\langle u,\mu_n\rangle_{\alpha,c} = \langle D_{rx}u,\mu_n\rangle_{0,c} + \langle u, D_{rx}\mu_n\rangle_{0,c} = \langle c\varphi^{-1}D_{rx}u,\mu_n\varphi\rangle_0 + \langle \varphi^{-1}D_{dx}cu,\mu_n\varphi\rangle_0 =$$
$$= \langle c\varphi^{-1}D_{rx}u + \varphi^{-1}D_{dx}cu, \mu_n\rangle_{0,\varphi}, \tag{33}$$

так как, используя условия данной теоремы, несложно убедится в том, что

$$\zeta(x) = \frac{1}{2\varphi(x)}\left[c(x)D_{rx}u + D_{dx}cu\right] \in L_2(\Omega,\varphi).$$

В силу непрерывности скалярного произведения, из выполнения неравенства

$$\|O\mu-\mu_n\|_{0,\varphi} \le K\|\mu-\mu_n\|_{\alpha,c},$$

следует :

$$\lim_{n\to\infty}\langle \zeta,\mu_n\rangle_{0,\varphi} = \langle \zeta, O\mu\rangle_{0,\varphi}.$$

Следовательно, осуществив в обеих частях равенства (33) предельный переход, имеем

$$\langle u,\mu\rangle_{\alpha,c} = \langle \zeta, O\mu\rangle_{0,\varphi}, \tag{34}$$

Используя условие данной леммы, имеем:

$$\langle \sigma_N,\mu\rangle_{\alpha,c} = \sum_{k=1}^{N} a_k\langle \rho_k,\mu\rangle_{\alpha,c},$$

поскольку ρ_k - минимальные элементы, то $\langle \rho_k,\mu\rangle_{\alpha,c} = \langle f_k,\mu\rangle_{0,\varphi}$. Следовательно,

$$\langle \sigma_N,\mu\rangle_{\alpha,c} = \sum_{k=1}^{N} a_k\langle f_k, O\mu\rangle_{0,\varphi} = \langle S_N, O\mu\rangle_{0,\varphi}. \tag{35}$$

Используя равенства (34, 35), перепишем (31) в следующем виде:

$$\|u-\sigma_N\|^2_{\alpha,c} = \langle \zeta, O\mu\rangle_{0,\varphi} - \langle S_N, O\mu\rangle_{0,\varphi} = \langle \zeta - S_N, O\mu\rangle_{0,\varphi} \le K\|\zeta - S_N\|_{0,\varphi}\|u-\sigma_N\|_{\alpha,c},$$

поскольку $\mu = u-\sigma_N$, и в силу неравенства (19). Следовательно,

$$\|u-\sigma_N\|_{\alpha,c} \le K\|\zeta - S_N\|_{0,\varphi}.$$

Поскольку система $\{f_n\}$ полна в $L_2(\Omega,\varphi)$, то для элемента ζ всегда можно подобрать S_N так, что

$$\|\zeta - S_N\|_{0,\varphi} < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Поскольку для любого $u_1 \in N_{\alpha,c}$ существует $u \in \widetilde{N}_{\alpha,c}$, такой, что

$$\|u_1 - u\|_{\alpha,c} < \frac{\varepsilon}{2},$$

то используя неравенство треугольника, имеем:

$$\|u_1 - \sigma_N\|_{\alpha,c} < \varepsilon.$$

Из чего следует полнота системы $\{\rho_n\}$ в пространстве $N_{\alpha,c}$. Теорема доказана.
Имеет место следующее следствие:

Следствие 2. 12 *При условиях теоремы 4 пространство* $N_{\alpha,c}(\Omega)$ *сепарабельно.*

Это следует из доказательства достаточности теоремы 4.6.1. [6, с. 51] и основано на том, что при условии теоремы 4 имеет место сепарабельность исходного пространства $L_2(\Omega,\varphi)$, и справедлива теорема 6.

Список литературы

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

Nahushev A.M. Fractional calculus and its application / A.M. Nahushev. – M.: FIZMATLIT, 2003. – 272 p.

2. Бжихатлов Х.Г. Избранные вопросы дифференциальных и интегральных уравнений / Х.Г. Бжихатлов, И.М. Карасев, И.П. Лесковский, А.М. Нахушев. – Нальчик: КБГУ, 1972. – 290 с.

Bzhihatlov H.G. Selected problems of differential and integral equations / H.G. Bzhihatlov, I.M. Karasev, I.P. Leskovsky, A.M. Nahushev. – Nalchik: KBSU, 1972. – 290 p.

3. Энеева Л.М. О пространстве, порожденном оператором дробного интегродифференцирования / Л.М. Энеева //Материалы международного Российско-Казахского симпозиума, 2003. – С. 191–192.

Eneeva L.M. The space generated by the operator of fractional integrodifferentiation / L.M. Eneeva // Proceedings of the International Kazakh-Russian symposium, 2003. – С. 191–192.

4. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

Samko S.G. Integrals and derivatives of fractional order, and some applications / S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev. – Minsk: Science and Technology, 1987. – 688 p.

5. Алиханов А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка / А.А. Алиханов // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46. – С. 658–664.

Alikhanov A.A. A priori estimates of solutions of the equations of fractional order / A.A. Alikhanov // Differential Equations. – 2010.– T. 46. – P. 658–664.

6. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г. Михлин. – М.: Высшая школа, 1977. – 431 с.

Mikhlin S.G. Linear partial differential equations / S.G. Mikhlin. – M .: Higher School, 1977. – 431 p.

7. Морен К. Методы гильбертого пространства / К. Морен. – М.: Мир, 1965. – 570 с.

Moren K. Hilbert space methods. – M.: Mir, 1965. – 570 p.

8. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский: Наукова-думка. – Киев, 1965. – 798 с.

Berezanskii Y.M. The decomposition on eigenfunction of self-adjoint operators / Y.M. Berezanskii. – Kiev: Naukova Dumka, 1965. – 798 p.

9. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука. Физматлит, 1965. – 520 с.

Lyusternik L.A. Elements of functional analysis / L.A. Lyusternik, V.I. Sobolev. – M.: The science. FIZMATLIT, 1965. – 520 p.