ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 621.396.01

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ВЕКТОРОВ СУБПОЛОСНЫХ МАТРИЦ

ABOUT SOME PROPERTIES OF SUBBAND MATRIX EIGENVALUES AND EIGENVECTORS

Е.Г. Жиляков, А.А. Черноморец, Е.В. Болгова, В.А.Голощапова
E.G. Zhilyakov, A.A. Chernomorets, E.V. Bolgova, V.A.Goloschapova

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod State National Research University,
85 Pobeda St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: zhilyakov@bsu.edu.ru, chernomorets@bsu.edu.ru, bolgova_e@bsu.edu.ru, vgoloschapova@bsu.edu.ru

Аннотация. В статье исследованы некоторые свойства субполосных матриц, использование которых лежит в основе математического аппарата субполосного анализа/синтеза сигналов и изображений. Исследована взаимосвязь распределения энергии собственных векторов и значениями собственных чисел. Исследованы свойства собственных векторов соответствующих единичным собственным числам субполосных матриц.

Resume. We investigated some properties of subband matrix, whose using is in the basis of the mathematical apparatus of subband analysis/synthesis of signals and images, in this article. We investigated the relationship of the energy distribution of eigenvectors and the values of the eigenvalues. The properties are the eigenvectors relevant to the equal-to-one eigenvalues of subband matrix are investigated.

Ключевые слова: субполосный анализ, сигналы и изображения, частотная подобласть, субполосная матрица, собственные числа, собственные векторы.

Keywords: subband analysis, signals and images, frequency subdomain, subband matrix, eigenvalues, eigenvectors.

При решении многих проблем в экономике, управлении, охране окружающей среды, при решении технических задач в процессе создания и эксплуатации информационно-телекоммуникационных систем и в других сферах деятельности человека широко используются различные методы обработки сигналов и изображений, такие как выделение их компонент, значимых при решении конкретных задач (например, фильтрация, повышение качества), передискретизация (масштабирование) сигналов и изображений, сегментация, распознавание и др. Значительное количество методов обработки сигналов и изображений основано на их частотных представлениях [Голд Б., Рейдер Ч. 1973; Гонсалес Р., Вудс Р. 2006].

В большинстве известных методов в основе частотных представлений используют преобразование Фурье [Нуссбаумер Г. 1985].

Однако, в настоящее время известен подход, основанный на субполосной методологии обработки сигналов и изображений [Жиляков Е.Г. 2007; Жиляков Е.Г., Черноморец А.А. 2009; Жиляков Е.Г., Белов С.П., Черноморец А.А. 2010; Жиляков Е.Г., Черноморец А.А. 2010], обеспечивающий возможность построения методов получения оптимальных в смысле создаваемых функционалов результатов обработки сигналов и изображений.

Данный подход основан на представлении частотной области $-\pi \le u,v < \pi$ в виде объединения непересекающихся субполос (частотных подобластей, интервалов) [Жиляков Е.Г., Прохоренко Е.И. 2006.; Черноморец А.А. 2011]:

- в одномерном случае

$$D_s = \{\ u \in [-u_{s2}, -u_{s1}) \cup [u_{s1}, u_{s2})\ \}. \tag{1}$$

$$u_{11} = 0\ ,\ u_{S,2} = \pi\ ,\ u_{S+1,1} = u_{S2}\ ,\quad s = 1,2,\ldots,S \tag{2}$$

- в двумерном случае

$$V_{sr} = \{\ (u \in [-u_{s2}, -u_{s1}) \cup [u_{s1}, u_{s2})) \cap (v \in [-v_{r2}, -v_{r1}) \cup [v_{r1}, v_{r2}))\ \}. \tag{1}$$

$$u_{11} = 0\ ,\ u_{S,2} = \pi\ ,\ u_{S+1,1} = u_{S2}\ ,\ v_{11} = 0\ ,\ v_{R,2} = \pi\ ,\ v_{r+1,1} = v_{r2}\ , \tag{2}$$

$$s = 1,2,\ldots,S\ ,\ r = 1,2,\ldots,R\ ,$$

и анализе распределений долей энергий сигналов и изображений по заданным частотным подобластям [Черноморец А.А., Иванов О.Н. 2010].

В данном субполосном подходе для выполнения операций обработки сигналов и изображений (решения задач их субполосного анализа и синтеза) используется аппарат так называемых субполосных матриц [Жиляков Е.Г. 2007]. Представляется важным с точки зрения разработки эффективных алгоритмов исследовать свойства субполосных матриц, а также свойства их субственных чисел и векторов.

Субполосными в [Жиляков Е.Г. 2007] названы квадратные матрицы $A_s = \{a_{in}^s\},\ i,n = 1,2,..,N$, с элементами вида

$$a_{in}^s = \int_{u \in D_s} \exp(-ju(i-n))du/(2\pi) = \begin{cases} \dfrac{\sin(u_{s2}(i-n)) - \sin(u_{s1}(i-n))}{\pi(i-n)}, & i \neq n, \\ \dfrac{u_{s2} - u_{s1}}{\pi}, & i = n, \end{cases} \tag{3}$$

Основные свойства субполосных матриц вида, важные для задач субполосного анализа и синтеза сигналов и изображений, выводятся на основе определений (3).

Очевидно, что субполосная матрица A_s с элементами вида (3) является симметричной.

Субполосная матрица A_s с элементами вида (3) также является положительно определенной.

Тогда [Гантмахер Ф.Р. 2004], симметричная, положительно определенная субполосная матрица A_s с элементами вида (3) обладает полным набором ортонормальных собственных векторов $\{\vec{q}_k^s\}$, $k = 1,2,\ldots,N$, где $\vec{q}_k^s = (q_{1k}^s, q_{2k}^s, \ldots, q_{Nk}^s)$, соответствующих положительным собственным числам $\{\lambda_k^s\}$, $k = 1,2,\ldots,N$, для которых выполняются соотношения

$$\lambda_k^s \vec{q}_k^s = A_s \vec{q}_k^s, \quad k = 1,2,\ldots,N\ , \tag{4}$$

$$\lambda_k^s \geq \lambda_{k+1}^s > 0, \quad k = 1,2,\ldots,N-1\ , \tag{5}$$

$$(\vec{q}_k^s, \vec{q}_i^s) = \sum_{n=1}^{N} q_{nk}^s q_{ni}^s = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \tag{6}$$

здесь $(\ ,\ )$ – скалярное произведение векторов.

Непосредственно из уравнения (4) с учетом определения (3) получаем соотношения для отдельных компонент q_{nk}^s , $n = 1,2,\ldots,N$, собственных векторов $\vec{q}_k^s$, $k = 1,2,\ldots,N$,

$$\lambda_k^s q_{nk}^s = \int_{u \in D_s} F_{sk}^q(u) \exp(ju(n-1))du/(2\pi), \quad k = 1,2,\ldots,N\ ,\ n = 1,2,\ldots,N\ , \tag{7}$$

где

$$F_{sk}^q(u) = \sum_{i=1}^{N} q_{ik}^s \exp(-ju(i-1))\ ; \tag{8}$$

справедливость выражения (8) следует из соотношений,

$$\lambda_k^s q_{nk}^s = \sum_{i=1}^{N} a_{ni}^s q_{ik}^s = \sum_{i=1}^{N} q_{ik}^s \int_{u \in D_s} \exp(-ju(i-n))du/(2\pi) = \int_{u \in D_s} (\sum_{i=1}^{N} q_{ik}^s \exp(-ju(i-1))) \exp(ju(n-1))du/(2\pi)\ .$$

В виду свойства положительной определенности субполосных матриц следует неравенство для собственных чисел субполосных матриц

$$0 < \lambda_k^s \leq 1, \quad k = 1,2,\ldots,N\ , \tag{9}$$

которое можно доказать на основе следующих рассуждений.

Найдем значение интеграла

$$E_{sk}^q = \int_{u \in D_s} |\ F_{sk}^q(u)\ |^2\ du/(2\pi)\ , \tag{10}$$

который назовем частью энергии вектора $\vec{q}_k^s$, соответствующей частотной подобласти D_s вида (1), (2). Очевидно, что с учетом (7) и (8) справедливо следующее неравенство

$$\int_{u \in D_s} |F_{sk}^q(u)|^2 \, du/(2\pi) > 0, \ k = 1,2,...,N, \tag{11}$$

также очевидно, что

$$\int_{u \in D_s} |F_{sk}^q(u)|^2 \, du/(2\pi) \le \int_{-\pi}^{\pi} |F_{sk}^q|^2 \, du/(2\pi), \ k = 1,2,...,N, \tag{12}$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_{sk}^q|^2 \, du/(2\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=1}^{N} q_{ik}^s \exp(-ju(i-1)) \sum_{n=1}^{N} q_{nk}^s \exp(ju(n-1)) du/(2\pi) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=1}^{N} q_{ik}^s \exp(-ju(i-1)) \sum_{n=1}^{N} q_{nk}^s \exp(ju(n-1)) du/(2\pi) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} q_{ik}^s q_{nk}^s \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-ju(i-n)) du/(2\pi) = \sum_{i=1}^{N} q_{ik}^s q_{ik}^s = 1,$$

то есть

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_{sk}^q|^2 \, du/(2\pi) = 1. \tag{13}$$

Учитывая соотношения (3), (4), (6), (8) выполним следующие преобразования,

$$\int_{u \in D_s} |F_{sk}^q(u)|^2 \, du/(2\pi) = \int_{u \in D_s} F_{sk}^q(u) F_{sk}^q(-u) du/(2\pi) =$$

$$= \int_{u \in D_s} \sum_{i=1}^{N} q_{ik}^s \exp(-ju(i-1)) \sum_{n=1}^{N} q_{nk}^s \exp(ju(n-1)) du/(2\pi) = \sum_{i=1}^{N} q_{ik}^s \sum_{n=1}^{N} q_{nk}^s \int_{u \in D_s} \exp(-ju(i-n)) du/(2\pi) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} q_{ik}^s \sum_{n=1}^{N} q_{nk}^s a_{in}^s = \sum_{i=1}^{N} q_{ik}^s \lambda_k^s q_{ik}^s = \lambda_k^s \sum_{i=1}^{N} q_{ik}^s q_{ik}^s = \lambda_k^s. \tag{14}$$

Из соотношений (11)-(14) следует свойство (9).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. Величины всех собственных чисел λ_k^s, $k = 1,2,...,N$, субполосной матрицы A_s с элементами вида (3) равны части энергии соответствующего собственного вектора $\vec{q}_k^s$ в заданной частотной подобласти, положительны и не превосходят единицы,

$$0 < \lambda_k^s = E_{sk}^q = \int_{u \in D_s} |F_{sk}^q(u)|^2 \, du/(2\pi) \le 1, \quad k = 1,2,...,N, \tag{15}$$

где $F_{sk}^q(u)$ – трансформанта Фурье (8) вектора $\vec{q}_k^s$.

Также, поскольку норма собственных векторов равна 1 (13), то можно считать, что величины всех собственных чисел λ_k^s, $k = 1,2,...,N$, субполосной матрицы A_s вида (3) равны доле энергии соответствующего собственного вектора $\vec{q}_k^s$ в заданной подобласти ПЧ.

Очевидно, для симметричной, положительно определенной субполосной матрицы справедливо следующее разложение на основе ее собственных чисел и векторов

$$A_s = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^s \vec{q}_n^s (\vec{q}_n^s)^T = Q_s^A L_s^A (Q_s^A)^T, \tag{16}$$

где $Q_s^A = (\vec{q}_1^s,..,\vec{q}_N^s)$ – матрица, столбцы которой составлены из собственных векторов матрицы A_s, $L_s^A = diag(\lambda_1^s,..,\lambda_N^s)$ – диагональная матрица, содержащая соответствующие собственные числа, которые предполагаются упорядоченными по убыванию,

$$\lambda_1^s > \lambda_1^s > .. > \lambda_N^s.$$

Кроме того, найдется такое значение J_s,

$$J_s = 2[N(u_{s_2} - u_{s_1})/(2\pi)] + 2, \tag{17}$$

где [ ] – целая часть числа,

что с большой точностью будут вычисляться приближенные равенства

$$\lambda_{J_s+k}^s \approx 0, \quad k = 1,2,..., N - J_s, \tag{18}$$

то есть начиная с некоторого $J_s + 1$-го собственные числа близки к нулю.

Данное свойство собственных чисел субполосных матриц используется при субполосном сжатии данных [Жиляков Е.Г., Черноморец А.А., Голощапова В.А. 2011a].

Также, экспериментально установлено, что оценка количества близких к единице (единичных) собственных чисел определяется соотношением

$$J_s^* = 2([N \cdot \Delta u_s/(2\pi)] - 3). \tag{19}$$

В таблице приведены результаты вычислительных экспериментов по оцениванию значений собственных чисел субполосных матриц, соответствующих различным частотным подобластям $[u_{s1}, u_{s2}]$ при N=256 и $\Delta u_s = \pi / 32$. В данном примере оценка количества J_s^* единичных собственных чисел в соответствии с выражением (19) равняется 2.

Таблица
Table

Значения собственных чисел λ_k, $k = 1,2,...,N$, субполосных матриц, соответствующих различным частотным подобластям при N=256 и $\Delta u_s = \pi / 32$ (первые 10 значений)
Subband matrices eigenvalues λ_k, $k = 1,2,...,N$, corresponding to different frequency subdomains at N = 256 and $\Delta u_s = \pi / 32$ (the first 10 values)

k	Частотные подобласти				
	u_{s1} =0, u_{s2} =π/32	u_{s1} =7π/32, u_{s2} =8π/32	u_{s1} =15π/32, u_{s2} =16π/32	u_{s1} =23π/32, u_{s2} =24π/32	u_{s1} =31π/32, u_{s2} =π
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	0.998	0.998	0.998	1
4	1	0.998	0.998	0.998	1
5	0.999	0.96	0.959	0.96	0.999
6	0.993	0.959	0.959	0.959	0.993
7	0.937	0.722	0.722	0.722	0.937
8	0.699	0.722	0.722	0.722	0.699
9	0.299	0.275	0.275	0.275	0.299
10	0.0642	0.274	0.275	0.274	0.0642
...	...	...	...	...	...

Значительный интерес представляет исследование свойств собственных векторов, соответствующих единичным собственным числам различных субполосных матриц.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. Произведение субполосной матрицы A_s и собственного вектора $\vec{q}_k^r$, соответствующего единичному собственному числу λ_k^r субполосной матрицы A_r, дает нулевой вектор,

$$A_s \vec{q}_k^r = \vec{0} \tag{20}$$

(при выполнении реальных расчетов данное равенство становится приближенным: $A_s \vec{q}_k^r \cong \vec{0}$),
где

$$\lambda_k^r \vec{q}_k^r = A_r \vec{q}_k^r, \quad \lambda_k^r = 1, \tag{21}$$

$\vec{0}$ – нулевой вектор, соответствующей размерности, при условии, что субполосные матрицы A_s и A_r соответствуют непересекающимся частотным подобластям D_s и D_r вида (1), (2),

$$D_s \cap D_r = \varnothing .$$

В основе доказательства справедливости данного утверждения используется представление (15) значения собственного числа λ_k^r субполосной матрицы A_r как части энергии соответствующего собственного вектора.

Пусть непересекающимся частотным подобластям D_s и D_r вида (1), (2),соответствуют субполосные матрицы A_s и A_r. Также пусть единичному собственному числу λ_k^r субполосной матрицы A_r,

$$\lambda_k^r = 1,$$

соответствует собственный вектор $\vec{q}_k^r$ (21).

Из соотношений (15) и (21) имеем, что

$$\lambda_k^r = \int_{u \in D_r} |F_{rk}^q(u)|^2 \, du/(2\pi) = 1, \tag{22}$$

где $F_{rk}^q(u)$ – трансформанта Фурье (8) вектора $\vec{q}_k^r$.

Тогда, из соотношений (13) и (22) следует, что

$$\int_{u \notin D_r} |F_{rk}^q(u)|^2 \, du/(2\pi) = 0. \tag{23}$$

Очевидно, что равенство (23) выполняется в случае, когда

$$F^{q}_{rk}(u)=0\text{, при } \forall u \notin D_r .$$

Тогда, учитывая соотношение (8), можем записать

$$F^{q}_{rk}(u)=\sum_{n=1}^{N} q^{r}_{nk} e^{-ju(n-1)}=0\text{, при } \forall u \notin D_r . \qquad (24)$$

Решение соотношения (24) не изменится при умножении на ненулевое число, например, $e^{ju(m-1)}$, $m=1,2,...,N$.

Тогда,

$$\sum_{n=1}^{N} q^{r}_{nk} e^{-ju(n-m)}=0\text{, при } \forall u \notin D_r ,\ m=1,2,...,N . \qquad (25)$$

Так как частотные подобласти D_s и D_r не пересекаются, то учитывая соотношение (25), справедливым является следующее соотношение:

$$\int_{u\in D_s} \sum_{n=1}^{N} q^{r}_{nk} e^{-ju(n-m)} du/(2\pi)=0, \quad m=1,2,...,N . \qquad (26)$$

Левая часть выражения (26), учитывая соотношение (3) и симметричность субполосных матриц, преобразуется следующим образом

$$\int_{u\in D_s} \sum_{n=1}^{N} q^{r}_{nk} e^{-ju(n-m)} du/(2\pi)=\sum_{n=1}^{N} q^{r}_{nk} \int_{u\in D_s} e^{-ju(n-m)} du/(2\pi)=\sum_{n=1}^{N} q^{r}_{nk} a^{s}_{nm}=\sum_{n=1}^{N} q^{r}_{nk} a^{s}_{mn} .$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{N} a^{s}_{mn} q^{r}_{nk}=0, \quad m=1,2,...,N . \qquad (27)$$

Так как соотношение (27) выполняется для всех $m=1,2,...,N$, то справедливо равенство (20). Таким образом, утверждение доказано.

Соотношение (20) показывает, что если вектор $\vec{q}^{\,r}_k$ является собственным вектором, соответствующим единичному собственному числу λ^r_k субполосной матрицы A_r, то его часть энергии, соответствующая частотной подобласти D_s равна нулю в случае, когда субполосные матрицы A_s и A_r соответствуют непересекающимся частотным подобластям D_s и D_r вида (1), (2).

Докажем также справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3. Собственный вектор $\vec{q}^{\,r}_k$, соответствующий единичному собственному числу λ^r_k субполосной матрицы A_r, ортогонален собственным векторам $\vec{q}^{\,s}_i$, $i=1,2,...,N$, субполосной матрицы A_s,

$$(\vec{q}^{\,r}_k, \vec{q}^{\,s}_i)=0, \qquad (28)$$

где

$$\lambda^r_k \vec{q}^{\,r}_k = A_r \vec{q}^{\,r}_k, \quad \lambda^r_k=1, \qquad (29)$$

$$\lambda^s_i \vec{q}^{\,s}_i = A_s \vec{q}^{\,s}_i, \qquad (30)$$

при условии, что субполосные матрицы A_s и A_r соответствуют непересекающимся частотным подобластям D_s и D_r вида (1), (2).

Для доказательства данного утверждения представим скалярное произведение векторов в виде произведения вектор-строки и вектор-столбца. Тогда, учитывая свойства (9), (29), (30) собственных чисел и соответствующих собственных векторов субполосных матриц и их симметричность, а также соотношение (20), имеем

$$(\vec{q}^{\,r}_k)^T \vec{q}^{\,s}_i=(\vec{q}^{\,r}_k)^T \frac{1}{\lambda^s_i} A_s \vec{q}^{\,s}_i=\frac{1}{\lambda^s_i}(A^T_s \vec{q}^{\,r}_k)^T \vec{q}^{\,s}_i=\frac{1}{\lambda^s_i}(A_s \vec{q}^{\,r}_k)^T \vec{q}^{\,s}_i=\frac{1}{\lambda^s_i}\vec{0}^T \vec{q}^{\,s}_i=0,$$

где $\bar{0}$ – нулевой вектор, соответствующей размерности. Таким образом, утверждение доказано.

Данные свойства собственных векторов, соответствующих единичным собственным числам, используются при решении задач внедрения данных в сигналы и изображения [Жиляков Е.Г., Черноморец А.А., Голощапова В.А. 2011б; Жиляков Е.Г., Черноморец А.А., Белов А.С., Болгова Е.В. 2013].

Таким образом, исследованы свойства специального класса матриц, называемых субполосными матрицами, которые применяются для построения математического аппарата оптимальной субполосной обработки изображений. Использование свойств этих матриц, а также свойств их собственных чисел и собственных векторов позволяет разработать эффективные алгоритмы обработки изображений. Получены соотношения, определяющие количество собственных чисел данных матриц, которые можно использовать для упрощения соответствующих вычислений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-07-01570.

Список литературы
References

Жиляков Е.Г., Черноморец А.А., Голощапова В.А. 2011. Метод сжатия изображений, основанный на разложении квазициклических компонент изображения по собственным векторам соответствующих субполосных матриц. Научные ведомости БелГУ. Серия История. Политология. Экономика. Информатика. 19(108): 191-195.

Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., Goloschapova V.A. 2011. Metod szhatija izobrazhenij, osnovannyj na razlozhenii kvaziciklicheskih komponent izobrazhenija po sobstvennym vektoram sootvetstvujushhih subpolosnyh matric. Nauchnye vedomosti BelGU. Serija Istorija. Politologija. Jekonomika. Informatika [Image compression method based on the expansion of quasi-cyclic image components in eigenvectors subband matrix. Belgorod State University Scientific Bulletin. History. Political science. Economics. Information technologies] 19(108): 191-195. (in Russian)

Жиляков Е.Г., Черноморец А.А., Голощапова В.А. 2011. Реализация алгоритма внедрения изображений на основе использования неинформационных частотных интервалов изображения-контейнера. Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. 4(1): 96-104.

Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., Goloschapova V.A. 2011. Realizacija algoritma vnedrenija izobrazhenij na osnove ispol'zovanija neinformacionnyh chastotnyh intervalov izobrazhenija-kontejnera [Computer Implementation of the Image Embedding Algorithm Based On Non-Informative Frequency Intervals of Container Image] Voprosy radiojelektroniki. Ser. JeVT. 4(1): 96-104. (in Russian)

Черноморец А.А., Иванов О.Н. 2010. Метод анализа распределения энергий изображений по заданным частотным интервалам. Научные ведомости БелГУ. Серия История. Политология. Экономика. Информатика. 19(90): 161-166.

Chernomorets A.A., Ivanov O.N. 2010. Metod analiza raspredelenija jenergij izobrazhenij po zadannym chastotnym intervalam. Nauchnye vedomosti BelGU. Istorija Politologija Jekonomika Informatika [Method of analysis of image energy distribution in specified frequency intervals. Belgorod State University Scientific Bulletin. History. Political science. Economics. Information technologies]. 19(90): 161-166. (in Russian)

Жиляков Е.Г., Прохоренко Е.И. 2006. Частотный анализ речевых сигналов. Научные ведомости БелГУ. Серия: информатика и прикладная математика. 2 (31):201-208.

Zhilyakov E.G., Prokhorenko E.I. 2006. Chastotnyj analiz rechevyh signalov. Nauchnye vedomosti BelGU. Serija: informatika i prikladnaja matematika [The frequency analysis of speech signals. Belgorod State University Scientific Bulletin. Informatics and Applied Mathematics] 2 (31): 201-208. (in Russian)

Черноморец А.А. 2011. Метод разбиения частотных субинтервалов на классы в задачах частотного анализа изображений. Информационные системы и технологии. 4(66): 31-38.

Chernomorets A.A. Metod razbienija chastotnyh subintervalov na klassy v zadachah chastotnogo analiza izobrazhenij. Informacionnye sistemy i tehnologii [Classification of frequency subintervals in image frequency analysis. Information Systems and Technologies] 4(66): 31-38. (in Russian)

Жиляков Е.Г., Белов С.П., Черноморец А.А. 2010. Вариационные методы синтеза сигналов на основе частотных представлений. Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. 4(1): 5-10.

Zhilyakov E.G., Belov S.P., Chernomorets A.A. 2010. Variacionnye metody sinteza signalov na osnove chastotnyh predstavlenij [Variational methods of signal synthesis on basis of frequency representation] Voprosy radiojelektroniki. Ser. JeVT. 4(1): 5-10. (in Russian)

Жиляков Е.Г., Черноморец А.А. 2010. О частотном анализе изображений. Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. 4(1): 94-103.

Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A. 2010 O chastotnom analize izobrazhenij [About frequency image analysis] Voprosy radiojelektroniki. Ser. JeVT. 4(1): 94-103. (in Russian)

Жиляков Е.Г. 2007. Методы анализа и построения функций по эмпирическим данным на основе частотных представлений. Белгород, БелГУ, 160.

Zhilyakov E.G. 2007. Metody analiza i postroenija funkcij po jempiricheskim dannym na osnove chastotnyh predstavlenij [Methods of analysis and features from empirical data based on frequency representations]. Belgorod, Belgorod State University, 160. (in Russian)

Жиляков Е.Г., Черноморец А.А. 2009. Вариационные алгоритмы анализа и обработки изображений на основе частотных представлений. Белгород, ГИК, 146.

Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A. 2009. Variacionnye algoritmy analiza i obrabotki izobrazhenij na osnove chastotnyh predstavlenij [The Variational algorithms for image processing and analysis based on frequency representations]. Belgorod, GIK, 146. (in Russian)

Нуссбаумер Г. 1985. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. М., Радио и связь, 248.

Nussbaumer G. 1985. Bystroe preobrazovanie Fur'e i algoritmy vychislenija svertok [Fast Fourier Transform algorithms and computation of convolutions]. Moscow, Radio and Communications, 248. (in Russian)

Голд Б., Рейдер Ч. 1973. Цифровая обработка сигналов– М., Сов. Радио, 376.

Gold B., Rader C. 1973. Cifrovaja obrabotka signalov [Digital signal processing] Moscow, Soviet Radio, 376. (in Russian)

Гонсалес Р., Вудс Р. 2006. Цифровая обработка изображений. М., Техносфера, 1072.

Gonzalez R, Woods R. Cifrovaja obrabotka izobrazhenij [Digital image processing] Moscow, Tehnosfera, 1072. (in Russian)

Гантмахер Ф.Р. 2004. Теория матриц М., Физматлит, 560.

Gantmaher F.R. 2004. Teorija matric [The theory of matrices] M., Fizmatlit, 560. (in Russian)

Жиляков Е.Г., Черноморец А.А., Белов А.С., Болгова Е.В. 2013. О субполосных свойствах изображений. Научные ведомости БелГУ. Серия История. Политология. Экономика. Информатика. 8(151): 175-182.

Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., Belov A.S., Bolgova E.V. 2016. O subpolosnyh svojstvah izobrazhenij. Nauchnye vedomosti BelGU. Serija Istorija. Politologija. Jekonomika. Informatika [About image subband properties. Belgorod State University Scientific Bulletin. History. Political science. Economics. Information technologies] 8(151): 175-182. (in Russian)