



УДК 621.396.01

**ОБ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОДОБЛАСТЯХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ  
ИЗОБРАЖЕНИЙ**

**ABOUT INFORMATION ON SUBDOMAIN SPATIAL FREQUENCIES OF IMAGES**

**Е.Г. Жилияков, А.А. Черноморец, Е.В. Болгова  
E.G. Zhilyakov, A.A. Chernomorets, E.V. Bolgova**

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85*

*Belgorod State National Research University, 85 Pobeda St, Belgorod, 308015, Russia*

*e-mail: zhilyakov@bsu.edu.ru, chernomorets@bsu.edu.ru, bolgova\_e@bsu.edu.ru*

*Аннотация.* В статье показано как использование понятия доли энергии в заданных подобластях пространственных частот позволяет построить субполосные модели изображений в виде разделения на информационные и неинформационные подобласти пространственных частот на основе вычисления и анализа распределения долей их энергий по заданным подобластям, что позволяет разбивать множество подобластей пространственных частот на классы по уровням сосредоточенных в них долей энергий.

*Resume.* In the article we show how the using of the concept of energy shares in the specified subdomains of spatial frequencies allows you to build subband model images as the division to information and non-information subdomains of spatial frequencies on the basis of calculation and analysis of the distribution of shares of the energy on the set subdomains. This allows to divide the plurality of subdomains of spatial frequencies into classes by levels of energy concentrated in the subdomains.

*Ключевые слова:* изображения, подобласть пространственных частот, доли энергии, субполосная матрица.

*Keywords:* images, subdomain spatial frequencies, shares of energy, subband matrix.

Изображения являются одной из наиболее естественных для человека форм обмена информацией. В настоящее время применяются различные методы обработки изображений как в пространственной (области оригиналов), так и в частотной (области преобразований) областях [Прэтт, 1982; Гонсалес, 2006]. Одним из перспективных подходов к обработке изображений является субполосный подход [Жилияков, 2016], при котором анализ осуществляется, исходя из разбиения частотной плоскости на непересекающиеся подобласти, полностью ее покрывающие. Такой подход позволяет анализировать отдельные свойства изображений, которые в области оригиналов, зачастую, не представляется возможности исследовать, например, сосредоточенность энергии в подобластях пространственных частот (ПЧ) достаточно малых размеров.

В различных подобластях пространственных частот (ППЧ) [Черноморец, 2011] значения соответствующих долей энергии изображения могут существенно отличаться. Для формального описания значимости различных ППЧ с точки зрения значений соответствующих долей энергии изображений введем понятия классов информационных и неинформационных подобластей ПЧ, содержащих различный объем энергии изображения, которые в дальнейшем могут быть использованы при решении задач субполосного анализа изображений.

Для описания указанных классов предлагается использовать значения частей  $E$  и долей  $P$  энергий изображения  $\Phi$  в отдельных подобластях  $V$  пространственных частот следующего вида [Жилияков, 2016]:

$$V_{sr} = V((u_{s1}, u_{s2}), (v_{r1}, v_{r2})) = \{ (u \in [-u_{s2}, -u_{s1}) \cup [u_{s1}, u_{s2})) \cap (v \in [-v_{r2}, -v_{r1}) \cup [v_{r1}, v_{r2})) \} \quad (1)$$

$$s = 1, 2, \dots, S, \quad r = 1, 2, \dots, R, \quad u_{11} = 0, \quad u_{S2} = \pi, \quad u_{s+1,1} = u_{s2}, \quad v_{11} = 0, \quad v_{R,2} = \pi, \quad v_{r+1,1} = v_{r2}.$$

Пусть  $\{W_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, S \cdot R$ , – одномерное множество ППЧ, полученное из множества  $\{V_{sr}\}$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ , в результате упорядочения соответствующих частей энергии по убыванию, то есть

$$E_i(\Phi) \geq E_{i+1}(\Phi), \quad i = 1, 2, \dots, S \cdot R - 1,$$

$$E_i(\Phi) \in \{E_{sr}(\Phi)\}, \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad r = 1, 2, \dots, R.$$



Пусть также

$$0 < m < 1.$$

Информационными подобластями пространственных частот изображения на уровне  $m$  назовем набор ППЧ  $\{W_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, D_m$ , где  $D_m$  – максимальное значение индекса и выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{D_m} E_i(\Phi) \leq m \|\Phi\|^2. \quad (2)$$

В соответствии с этим субполосные компоненты [Жиляков, 2016] изображения группируются на информационные и неинформационные, в различной степени отражающие информацию об изображении.

Рассмотрим понятие частотной сосредоточенности  $C_m$  на уровне  $m$  энергии изображения

$$C_m = K_m / (4\pi^2),$$

где  $K_m$  – суммарная площадь информационных ППЧ, значение которой в случае равновеликих ППЧ определяется соотношением

$$K_m = 4\pi^2 D_m / (S \cdot R),$$

где величина  $D_m$  использована в (2).

Из данного определения следует, что в случае разбиения области ПЧ на равновеликие подобласти, частотная сосредоточенность  $C_m$  на уровне  $m$  энергии изображения определяется отношением минимального количества  $l_m$  подобластей ПЧ, которые содержат не более  $m \cdot 100$  процентов энергии изображения, к общему числу подобластей ПЧ,

$$C_m = \frac{l_m}{SR}. \quad (3)$$

Далее исследование значений частотной сосредоточенности приведено для случая равновеликих подобластей ПЧ, что не влияет на общность получаемых результатов.

Обозначим  $M_{c_m}$  – подмножество подобластей ПЧ, в которых сосредоточена указанная доля энергии изображения.

Подобласть ПЧ  $V_{sr}$ , входящая в подмножество  $M_{c_m}$ , соответствующее сосредоточенности энергии  $C_m$  (3),

$$V_{sr} \subset M_{c_m}, \quad (4)$$

будем называть информационной подобластью пространственных частот.

Подобласти ПЧ, не включенные в подмножество  $M_{c_m}$ , естественно, называть неинформационными подобластями пространственных частот.

Подмножество  $M_{c_m}$  подобластей ПЧ будем называть классом информационных ППЧ.

Множество подобластей ПЧ, не входящих в подмножество  $M_{c_m}$ , будем называть классом неинформационных ППЧ.

Также, субполосные компоненты изображения, соответствующие информационным подобластям ПЧ, будем называть информационными субполосными компонентами, и неинформационными субполосными компонентами будем называть субполосные компоненты изображения, соответствующие неинформационным подобластям ПЧ.

Для определения значения  $l_m$ , количества подобластей ПЧ, в которых сосредоточено  $m \cdot 100$  процентов энергии изображения, необходимо решить задачу

$$l_m = \min l_{SR}, \quad (5)$$

где  $l_{SR}$  – произвольное количество подобластей ПЧ, в которых сосредоточена доля  $m$  энергии изображения  $\Phi$  при заданных значениях  $S$  и  $R$ . Значение  $l_{SR}$  предлагается определять на основании количества подобластей ПЧ, для которых выполняется неравенство,

$$\sum_{k=1}^{l_{SR}+1} P_{(sr)} \geq m, \quad (6)$$

где  $P_{sr}$  – элемент упорядоченного по убыванию множества значений долей энергий исследуемого изображения в соответствующих ППЧ,  $m$  – заданная доля энергии изображения, которая должна быть сосредоточена в указанном минимальном количестве ППЧ.

В качестве примера определения указанного выше минимального количества подобластей ПЧ на рисунке 1 приведено распределение значений энергии изображения, представленного на рисунке 2, по подобластям ПЧ (рисунок 1а) и множества ППЧ (отделены пунктирной линией), соответствующее различным значениям  $m$  (на рисунке 1б приведены упорядоченные значения долей энергии), в данном примере  $S=R=4$ . Здесь для удобства представления вдоль горизонтальной оси указана сквозная нумерация подобластей ПЧ и не отображено «подавляющее» значение доли энергии в подобласти  $V_{11}$ .

Как видно из рисунка 1, основная доля (99%) энергии изображения, сосредоточена менее чем в 1/3 подобластей пространственных частот.

Факт наличия значительного количества неинформационных подобластей ПЧ используется при решении многих задач обработки изображений на основе субполосных методов.

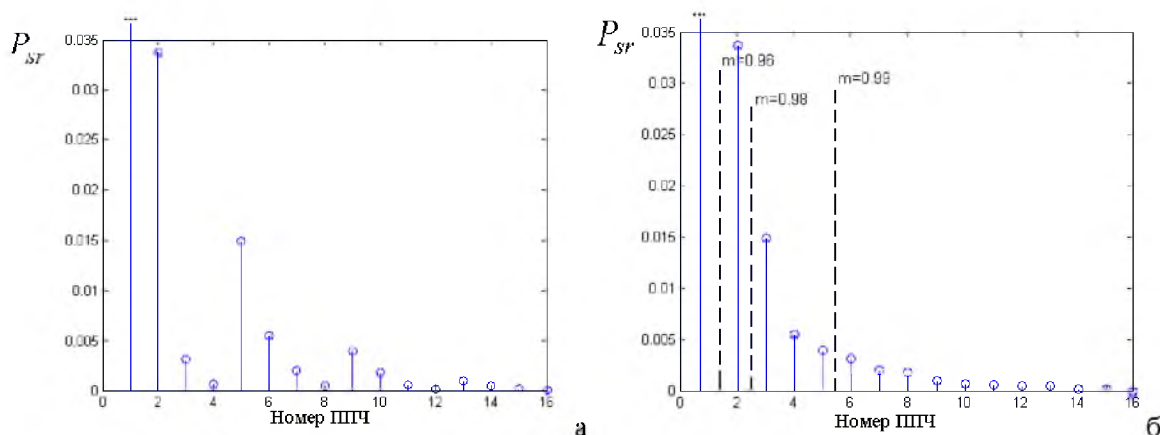


Рис. 1. Распределение значений долей энергии  $P_{sr}$  изображения по ППЧ (а) и множества ППЧ (отделены пунктирной линией), соответствующих различным значениям  $m$  (б), при  $S=R=4$

Fig. 1. Distribution of values of image energy shares  $P_{sr}$  on SSF (a) and the varieties of SSF (separated by a dotted line), corresponding to different values of  $m$  (b), with  $S=R=4$

Пример отображения множества информационных ППЧ при  $S=R=4$  и заданной доли энергии  $m=0.98$  изображения, при анализе которого получены распределения на рисунке 1, приведен на рисунке 2в. На рисунках 2а и 2б приведено анализируемое изображение и распределение значений его долей энергии по подобластям ПЧ (для наглядности на рисунке 2в значение доли энергии в подобласти  $V_{11}$  не отображено).

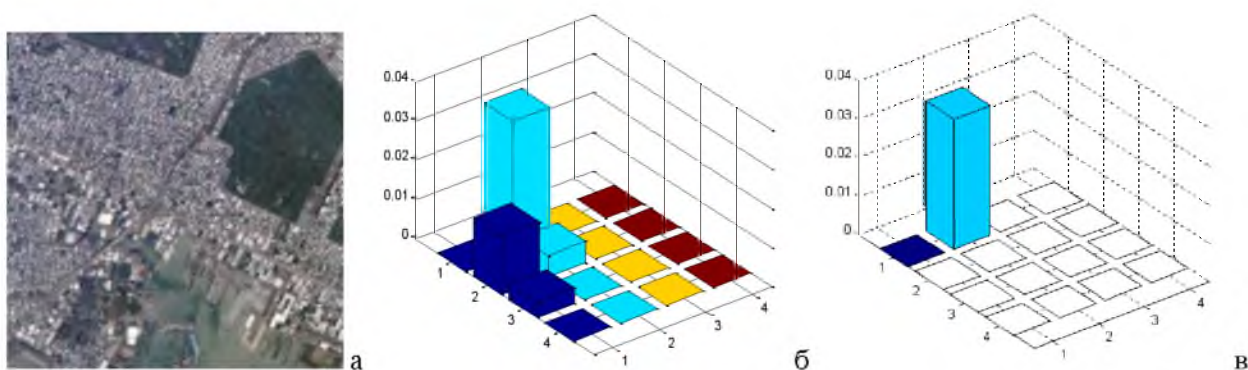


Рис. 2. Отображение информационных подобластей ПЧ:

а) изображение, б) распределение его долей энергии при  $S=R=4$ , в) доли энергии, соответствующие информационным подобластям ПЧ при  $m=0.98$

Fig. 2. Displaying of information subdomains of SF: а) image, б) distribution of its energy shares with  $S=R=4$ , в) the shares of energy corresponding to the information subdomains of SF at  $m=0.98$

Рассмотренные понятия частотной сосредоточенности энергии, информационных подобластей ПЧ и информационных субполосных компонент изображения являются новыми инструментами для анализа его частотных свойств.



Для определения информационных под областей ПЧ изображения, соответствующих заданной доле  $m$  энергии изображения, разработан алгоритм, основанный на вычислении такого наименьшего количества под областей, в которых сосредоточено не менее  $100m\%$  энергии.

Первоначально сформулируем алгоритм вычисления оценки частотной сосредоточенности  $C_m$  порядка  $m$  энергии изображения, соответствующей заданной доле  $m$  энергии. Данный алгоритм можно представить в виде следующих этапов:

1) Вычислить субполосные матрицы  $A_s = (a_{i_1 i_2}^s)$ ,  $i_1, i_2 = 1, \dots, N$ , и  $B_r = (a_{k_1 k_2}^r)$ ,  $k_1, k_2 = 1, \dots, M$ , [Жильяков, 2016] соответствующие разбиению области ПЧ на  $S \times R$  под областей ПЧ  $V_{sr}$  вида (2),  $s = 1, 2, \dots, S$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ , при размерности анализируемого изображения  $N \times M$ .

2) Для изображения  $\Phi = (f_{ik})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ , вычислить доли энергии  $P_{sr}$ , в каждой под области ПЧ вида (2)  $V_{sr}$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ .

$$P_{sr}(\Phi) = \frac{\text{tr}(A_s \Phi B_r \Phi^T)}{\text{tr}(\Phi \Phi^T)}, \quad (7)$$

Значения долей энергии следует представить в виде матрицы  $P = (P_{sr})$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ , (пример анализируемого изображения и значения элементов соответствующей матрицы  $P$  приведены на рисунке 3).

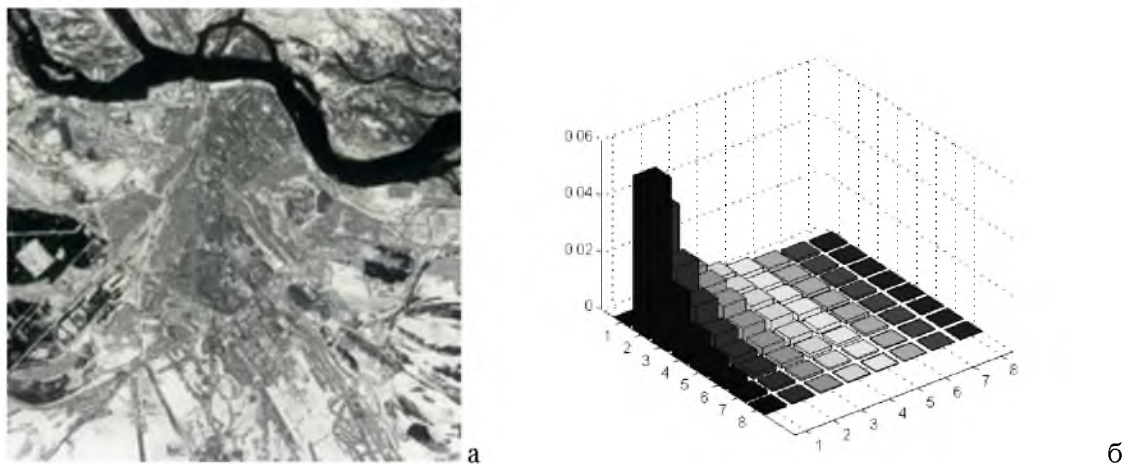


Рис. 3. Анализируемое изображение и матрица  $P$  долей его энергии:

а) изображение, б) значения соответствующих долей энергии при  $S = R = 8$  в виде диаграммы (для наглядности значение доли энергии в под области  $V_{11}$  не отображено)

Fig. 3. The analyzed image and matrix  $P$  of its energy shares:

a) image, b) values of the respective shares of energy with  $S = R = 8$  in the form of a diagram (for clarity, the value of energy share is not displayed in the subdomain  $V_{11}$ )

3) Упорядочить значения долей энергий  $P_{sr}$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ , по убыванию, упорядоченные значения сохранить в вектор  $Z = \{z_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, SR$ ,

$$z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_{SR}.$$

4) Найти минимальное количество  $l_m$  под областей ПЧ, в которых сосредоточена заданная доля  $m$  энергии изображения  $\Phi$ , то есть найти значение  $l_m$ , удовлетворяющее следующим условиям:

$$\sum_{i=1}^{l_m+1} z_i \geq m,$$

$$\sum_{i=1}^{l_m} z_i < m, \quad 0 < l_m \leq SR.$$

5) Присвоить пороговому значению  $T_m^*$  долей энергии изображения значение  $z_{l_m}$

$$T_m^* = z_{l_m}. \quad (8)$$

6) Вычислить оценку  $C_m$  частотной сосредоточенности энергии,

$$C_m = \frac{l_m}{SR}.$$

7) Конец.

Вычисленная оценка частотной сосредоточенности энергии позволяет оценить долю суммарной площади подобластей ПЧ, в которых сосредоточена заданная доля энергии анализируемого изображения.

Используя величины, найденные в ходе вычисления оценки  $C_m$ , сформулируем алгоритм определения информационных подобластей ПЧ и информационных субполосных компонент изображения, соответствующих заданной доле  $m$  энергии изображения на множестве подобластей ПЧ, основные шаги которого состоят в следующем:

1) Вычислить пороговое значение  $T_m$  (8) долей энергии изображения при условии, что значения долей  $P_{sr}$  энергии изображения в подобластях ПЧ  $V_{sr}$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ , представлены в виде матрицы  $P = (P_{sr})$ .

2) Вычислить матрицу-маску  $P^{Mask} = (P_{sr}^{Mask})$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ , элементы которой определяются на основании соотношения

$$P_{sr}^{Mask} = \begin{cases} 1, & P_{sr} \geq T_m, \\ 0, & P_{sr} < T_m \end{cases} \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad r = 1, 2, \dots, R. \quad (9)$$

3) Подобласть ПЧ  $V_{sr}$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ , и соответствующая субполосная компонента  $Y_{sr}$  изображения,  $s = 1, 2, \dots, S$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ , будут являться информационными при заданной доле  $m$  энергии изображения на всем множестве подобластей ПЧ, если

$$P_{sr}^{Mask} = 1, \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad r = 1, 2, \dots, R,$$

в противном случае – неинформационной подобластью ПЧ и неинформационной субполосной компонентой.

4) Конец.

Пример распределения значений долей энергии изображения, представленного на рисунке 3, по информационным подобластям пространственных частот приведен на рисунке 4. Здесь для удобства представления по горизонтали дана сквозная нумерация подобластей ПЧ (по строкам матрицы  $P^{Mask}$  (9)) и не отображено «подавляющее» значение доли энергии в подобласти ПЧ  $V_{11}$ .

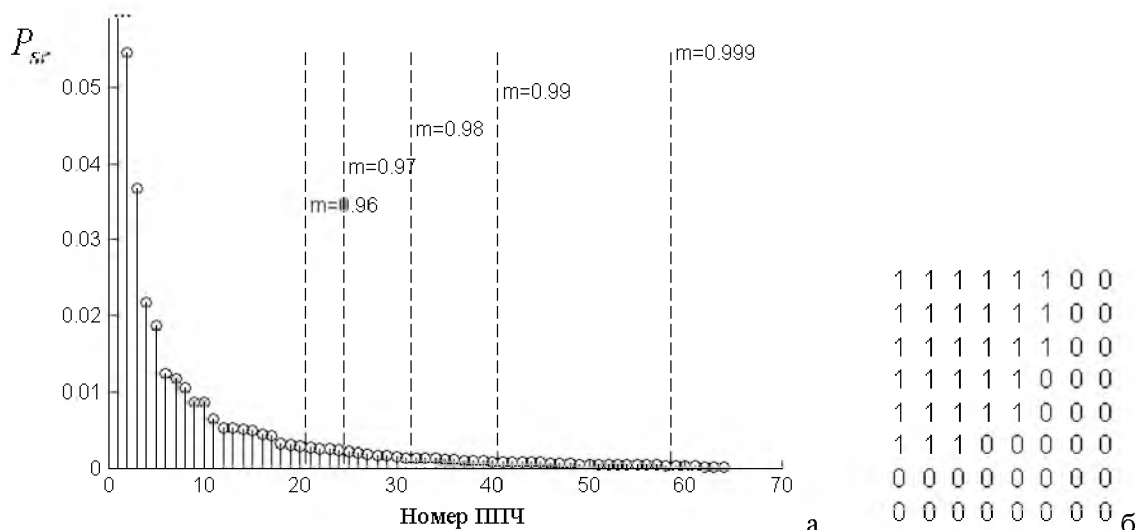


Рис. 4. Распределение значений долей энергии  $P_{sr}$  изображения по подобластям ПЧ и маска

информационных классов ПЧ: а) для различных значений величины  $m = 0.96 - 0.999$ ,  $S = R = 8$ ;

б) маска информационных подобластей ПЧ и информационных субполосных компонент при  $m = 0.98$

Fig. 4. Distribution of values of image energy shares on subdomains of SF and mask of information classes of SSF:

a) for different values of  $m = 0.96 - 0.999$ ,  $S = R = 8$ ;

b) mask of information subdomains of SF and information subband components with  $m = 0.98$

На рисунке 4а пунктирной линией отмечены множества информационных подобластей ПЧ, соответствующие различным значениям величины  $m$ , на рисунке 4б цифрой «1» отмечены



информационные подобласти ПЧ и информационные субполосные компоненты при  $m=0.98$  на всем множестве подобластей ПЧ, цифрой «0» – неинформационные подобласти ПЧ и субполосные компоненты.

Результаты вычислительных экспериментов разбиения множества субполосных компонент, а также подобластей пространственных частот на информационные классы, приведенные на рисунке 4, показывают, что при выборе различных значений  $m$  можно получать различное количество информационных и неинформационных подобластей в каждом классе. Различные разбиения на информационные классы могут влиять на трудоемкость вычислений и информативность получаемых результатов с точки зрения конкретной задачи анализа/синтеза изображений.

Описанные алгоритмы определения классов информационных подобластей пространственных частот и субполосных компонент позволяют выделять соответствующие субполосные компоненты изображения, в различной степени отражающие информацию о нем. Данный подход является основой для разработки эффективных методов отбора субполосных компонент, несущих основную информацию об изображениях, что является важным, например, в задачах внедрения данных в изображения.

Таким образом, можно отметить следующее.

Использование понятия доли энергии в заданных подобластях пространственных частот позволяет построить субполосные модели изображений в виде разделения на информационные и неинформационные подобласти пространственных частот на основе вычисления и анализа распределения долей их энергий по заданным подобластям, что позволяет разбивать подобласти пространственных частот на классы по уровням сосредоточенных в них долей энергий.

Классы, соответствующие подобластям ПЧ со значительной долей энергии изображения, являются важными с точки зрения решения задач выделения значимых компонент, например, для повышения резкости или комплексирования изображений, компенсации искажений, а также задач сжатия данных и др. Выделение классов, соответствующих незначительным долям энергии изображения, позволяет решать задачу скрытного внедрения в подобласти ПЧ, изменение информации в которых не вносит заметных искажений в изображение, и др.

**Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-07-01570.**

### Список литературы References

- Гонсалес Р., Вудс Р. 2006. Цифровая обработка изображений. М., Техносфера, 1072.  
Gonzalez R, Woods R. 2006. Cifrovaja obrabotka izobrazhenij [Digital image processing] Moscow, Tehnosfera, 1072. (in Russian)
- Жиляков Е.Г., Черноморец А.А., Болгова Е.В., Голощапова В.А. 2016. О некоторых свойствах собственных чисел и векторов субполосных матриц. Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика. 16(237): 180-186.  
Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., Bolgova E.V., Goloschapova V.A. 2016. O nekotoryh svojstvah sobstvennyh chisel i vektorov subpolosnyh matric. Nauchnye vedomosti BelGU. Jekonomika Informatika [About some properties of subband matrix eigenvalues and eigenvectors. Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics Information technologies]. 16(237): 180-186. (in Russian)
- Прэтт, У. 1982. Цифровая обработка изображений: Кн.1., Кн.2; пер. с англ. М., Мир, 792.  
Pratt W. 1982. Digital Image Processing; Book 1, Book 2.; translate from English. Moscow, Mir, 792. (in Russian)
- Черноморец А.А. Голощапова В.А., Лысенко И.В., Болгова Е.В. 2011. О частотной концентрации энергии изображений. Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 1 (96): 146-151.  
Chernomorets A.A., Goloschapova V.A., Lysenko I.V., Bolgova E.V. 2011. O chastotnoj koncentracii jenergii izobrazhenij. Nauchnye vedomosti BelGU. Istorija Politologija Jekonomika Informatika [On frequency concentration of image energy. Belgorod State University Scientific Bulletin. History Political science Economics Information technologies]. 1(96): 146-151. (in Russian)