УДК 517.926.4

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

A PRIORI ESTIMATE OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A HIGH ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH TWO DEGENERATING ELLIPTIC OPERATORS

А.В. Глушак
A.V. Glushak

Белгородский национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia.

E-mail: Glushak@.bsu.edu.ru

Аннотация
Устанавливается априорная оценка решения задачи Дирихле для линейного дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами, позволяющая исследовать однозначную разрешимость этой задачи.

Abstract
A priori estimate of the solution of the Dirichlet problem for a linear differential equation of high order with two degenerate elliptic operators is established, which makes it possible to investigate the unique solvability of this problem.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения высокого порядка, задача Дирихле, априорная оценка решения.
Keywords: degenerate differential equations of high order, the Dirichlet problem, a priori estimate of the solution.

Введение

Дифференциальные уравнения с обращающимся в нуль коэффициентом при старшей производной не вписываются в рамки стандартной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и давно привлекали внимание широкого круга исследователей. Отдельные виды таких уравнений, например, обыкновенные дифференциальные уравнения Эйлера, Бесселя и др., подробно и глубоко изучены. Обзор уравнений с неотрицательной характеристической формой, которые, в частности, включают вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных можно найти в [1]. По данной тематике отметим также работы [2 – 6], появившиеся в последнее время. Подробная библиография работ по вырождающимся эллиптическим уравнениям высокого порядка содержится в [7]. Однако и до настоящего времени для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка определенные моменты разрешимости исследованы не полностью.

Из теории регулярных эллиптических задач известно, что эти задачи устойчивы по отношению к младшим членам входящих в формулировку задач операторов. Аналогичная ситуация возникает, если к вырождающемуся эллиптическому оператору порядка $2m$ прибавить вырождающийся эллиптический оператор порядка $2p < 2m$ с не меньшей скоростью вырождения. Если же к такому оператору прибавить оператор порядка $2p$ с меньшим порядком вырождения, то полученный оператор уже не будет подчинённым по отношению к исходному, и доказательство разрешимости граничных задач для суммы операторов такого вида становится нетривиальной задачей.

В настоящей статье в пространствах типа Соболева с весом устанавливается априорная оценка решения задачи Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами, позволяющая в дальнейшем исследовать однозначную разрешимость этой задачи.

Постановка задачи

В полосе $D=[0,d]\times R_n$ рассмотрим задачу Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка, содержащего два вырождающихся эллиптических оператора также высокого порядка и с постоянными коэффициентами

$$L_{2m}(D_\alpha, D_y)U(x,y)+L_{2p}(D_\beta, D_y)U(x,y)=F(x,y), \tag{1}$$

$$U(d,y)=\partial_x U(d,y)=\cdots=\partial_x^{m-1}U(d,y)=0, \tag{2}$$

где $p<m$ – натуральные числа, $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ – мультииндекс,

$$L_{2m}(D_\alpha, D_y)U(x,y)=\sum_{j+|\mu|\le 2m} a_{j\mu} D_\alpha^j D_y^\mu U(x,y), \qquad L_{2p}(D_\beta, D_y)U(x,y)=\sum_{j+|\mu|\le 2p} b_{j\mu} D_\beta^j D_y^\mu U(x,y),$$

$$D_y^\mu U(x,y)=\partial_{y_1}^{\mu_1}\cdots\partial_{y_n}^{\mu_n}U(x,y), \quad D_\alpha U(x,y)=i\sqrt{\alpha(x)}\partial_x\left(\sqrt{\alpha(x)}U(x,y)\right), \quad \alpha(x)\in C^{2m}[0,d], \quad \alpha(0)=0, \quad \alpha(x)>0$$

при $x>0$. Аналогично D_α определяется оператор D_β.

Коэффициенты $a_{j\mu}$ $(j+|\mu|\le 2m)$, $b_{j\mu}$ $(j+|\mu|\le 2p)$ – действительные постоянные числа.

Условие 1. Многочлены $L_{2m}(\tau,\xi), L_{2p}(\tau,\xi)$ положительны при любых $(\tau,\xi)\in R_{n+1}$.

Условие 2. Пуст $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, $\alpha(x), \beta(x)\in C^{2m}[0,d]$, а функция $\omega(x)=\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ такова, что $\omega^{p/((m-p)}(x)\in C^{2p}[0,d]$.

Введём в рассмотрение функциональные пространства, в которых будет доказываться априорная оценка, а затем и разрешимость граничной задачи (1), (2).

Обозначим через $H_{\alpha,\beta}^{2m,2p}(D)$ пространство функций $U(x,y)\in L_2(D)$, для которых конечен квадрат нормы

$$\|U(x,y)\|_{2m,\alpha,2p,\beta}^2=\sum_{j=0}^{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^d\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left|D_\alpha^j u(x,\xi)\right|^2 dxd\xi+\sum_{j=0}^{2p}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^d\left(1+|\xi|^2\right)^{2p-j}\left|D_\beta^j u(x,\xi)\right|^2 dxd\xi,$$

где $u(x,\xi)=F_{y\to\xi}[U(x,y)]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}U(x,y)\exp(-i\xi y)dy$ – преобразование Фурье функции $U(x,y)\in L_2(D)$ по переменной $y\in R_n$.

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим задачу

$$L_{2m}(D_\alpha,\xi)u(x,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)u(x,\xi)=f(x,\xi), \tag{3}$$

$$u(d,\xi)=\partial_x u(d,\xi)=\cdots=\partial_x^{m-1}u(d,\xi)=0, \tag{4}$$

полученную из задачи (1), (2) после применения преобразования Фурье $F_{y\to\xi}[\cdot]$ по переменной $y\in R_n$.

Через $FH_{\alpha,\beta}^{2m,2p}(D)$ мы будем обозначать пространство образов Фурье по переменной $y\in R_n$ функций из пространства $H_{\alpha,\beta}^{2m,2p}(D)$.

Априорная оценка

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда для функции $u(x,\xi)\in FH^{2m,2p}_{\alpha,\beta}(D)$, являющейся решением задачи (3), (4), выполнена оценка

$$\sum_{i=0}^{2m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-i}\int_0^d\left|D^i_\alpha u(x,\xi)\right|^2dx+\sum_{j=0}^{2p}\left(1+|\xi|^2\right)^{2p-j}\int_0^d\left|D^j_\beta u(x,\xi)\right|^2dx\le c_1\int_0^d\left|f(x,\xi)\right|^2dx, \tag{5}$$

с постоянной $c_1>0$ не зависящей от $u(x,\xi)$ и $f(x,\xi)\in FL_2(D)$.

Доказательство. На функциях $v(x)\in L_2(0,d)$ определим (см. [7]) интегральное преобразование F_α по формуле

$$[F_\alpha v](\tau)=\int_0^d v(x)\exp\left(-i\tau\int_x^d\frac{ds}{\alpha(s)}\right)\frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)}}. \tag{6}$$

Преобразование F_α обладает (см. [7]) следующими свойствами:

а) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_\alpha v|^2d\tau=\int_0^d|v|^2dx$ (равенство Парсеваля),

б) для функций $v(x)\in C^p[0,d]$, удовлетворяющих условиям $v(d)=\partial_x v(d)=\cdots=\partial_x^{p-1}v(d)=0$, справедливо равенство $\left[F_\alpha\left(D^p_\alpha v\right)\right](\tau)=\tau^p[F_\alpha v](\tau)$.

Поскольку функции класса $C^{2m+p}[0,d]$ плотны в $H^{2m}_\alpha(0,d)$ (см. [8]), то в дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что $u(x,\xi)\in C^{2m+p}[0,d]$ при почти всех $\xi\in R_n$.

Умножим уравнение (3) на функцию $\overline{u}(x,\xi)$ и проинтегрируем полученное равенство по $x\in(0,d)$. В результате получим

$$\left(L_{2m}(D_\alpha,\xi)u(x,\xi),u(x,\xi)\right)+\left(L_{2p}(D_\beta,\xi)u(x,\xi),u(x,\xi)\right)=\left(f(x,\xi),u(x,\xi)\right),$$

где скалярное произведение определено равенством $\left(f(x,\xi),u(x,\xi)\right)=\int_0^d f(x,\xi)\,\overline{u}(x,\xi)\,dx$.

Из перечисленных ранее свойств интегрального преобразования (6) для $s\le m$ вытекает

$$\left(D^{2s}_\alpha u(x,\xi),u(x,\xi)\right)\equiv\int_0^d D^{2s}_\alpha u(x,\xi)\,\overline{u}(x,\xi)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{2s}[F_\alpha u](\tau,\xi)\,\overline{[F_\alpha u]}(\tau,\xi)\,d\tau$$

и, следовательно,

$$\left(L_{2m}(D_\alpha,\xi)u(x,\xi),u(x,\xi)\right)+\left(L_{2p}(D_\beta,\xi)u(x,\xi),u(x,\xi)\right)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}L_{2m}(\tau,\xi)|F_\alpha u|^2d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}L_{2p}(\tau,\xi)|F_\beta u|^2d\tau=\left(f(x,\xi),u(x,\xi)\right). \tag{7}$$

Заметим, что из условия 1 вытекает (см. [9]) справедливость неравенств

$$\left|L_{2m}(\tau,\xi)\right|\ge M\left(1+|\xi|^2+|\tau|^2\right)^m,\qquad\left|L_{2p}(\tau,\xi)\right|\ge M\left(1+|\xi|^2+|\tau|^2\right)^p,$$

поэтому из (7) получим оценку

$$\sum_{i=0}^{2m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-i}\int_0^d\left|D^i_\alpha u(x,\xi)\right|^2dx+\sum_{j=0}^{2p}\left(1+|\xi|^2\right)^{2p-j}\int_0^d\left|D^j_\beta u(x,\xi)\right|^2dx\le$$
$$\le M_1\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\xi|^2+|\tau|^2\right)^m|F_\alpha u|^2d\tau+M_2\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|\xi|^2+|\tau|^2\right)^p|F_\beta u|^2d\tau\le c_0\left|\left(f(x,\xi),u(x,\xi)\right)\right|. \tag{8}$$

Теперь для доказательства априорной оценки (5) достаточно в (8) воспользоваться очевидным неравенством

$$\left|\left(f(x,\xi),u(x,\xi)\right)\right|\le\varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^m\int_0^d|u(x,\xi)|^2dx+\frac{c(\varepsilon)}{\left(1+|\xi|^2\right)^m}\int_0^d|f(x,\xi)|^2dx$$

и выбрать $0<\varepsilon<\frac{c_0}{2}$. Лемма доказана.

Лемма 2 [10]. Пусть $v(x) \in C^s[0,d]$. Тогда при любых $\varepsilon > 0,\ 0 < m < s$ справедливо мультипликативное неравенство

$$\left\|D_\alpha^m v(x)\right\|_0 \le \varepsilon^{s-m}\left\|D_\alpha^s v(x)\right\|_0 + c\left(\varepsilon^{-m} + \varepsilon^{s-m}\right)\left\|v(x)\right\|_0 \tag{9}$$

где $\|v(x)\|_0^2 = \int_0^d |v(x)|^2\,dx$, $c > 0$ не зависит от $v(x)$ и ε.

Следствие 1 [10]. Пусть $v(x) \in C^{2m}[0,d]$. Тогда при любых $\varepsilon > 0,\ 0 < s < 2m, \xi \in R_n$ справедлива оценка

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-s}\left\|D_\alpha^s v(x)\right\|_0^2 \le \varepsilon^{-2(s-2m)}\left\|D_\alpha^{2m} v(x)\right\|_0^2 + c\left(\varepsilon^{-s} + \varepsilon^{2m-s}\right)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\left\|v(x)\right\|_0^2, \tag{10}$$

где $c > 0$ не зависит от $v(x)$ и ε.

Лемма 3. Пусть $0 < k < 2m$ и $\partial_x\alpha(0) = \partial_x\beta(0) = 0$. Тогда для любой функции $w(x) \in C^{2m+1}[0,d]$ справедливо тождество

$$D_\beta D_\alpha^k w(x) = D_\alpha^k D_\beta w(x) + \sum_{j=0}^{k-1} S_j^k(x) D_\alpha^j D_\beta w(x) + \sum_{j=0}^{k} Q_j^k(x) D_\alpha^j w(x),$$

где функции $S_j^k(x)$ и $Q_j^k(x)$ зависят лишь от функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ и их производных, причём $S_j^k(0) = Q_j^k(0) = 0$.

Доказательство леммы не представляет больших трудностей и проводится по индукции.

Для дальнейших оценок введём в рассмотрение функцию $\varphi(x) \in C^\infty[0,d]$ равную числу 1 при $0 \le x \le \frac{d}{4}$ и равную нулю при $\frac{3d}{4} \le x \le d$. Обозначим через $u_1(x,\xi) = \varphi(x)u(x,\xi)$, через $u_2(x,\xi) = (1-\varphi(x))u(x,\xi)$ и рассмотрим скалярное произведение $\left(D_\alpha^{2m}u(x,\xi), D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right)$.

Лемма 4. Пусть $u(x,\xi) \in FH_{\alpha,\beta}^{2m,2p}(D)$. Тогда справедливо представление

$$\begin{aligned}\left(D_\alpha^{2m}u(x,\xi), D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right) &= \left\|D_\alpha^m D_\beta^p u_1(x,\xi)\right\|_0^2 + J\left(u_1(x,\xi), u_1(x,\xi)\right) + \int_0^d D_\alpha^m D_\beta^p u_1(x,\xi)\,\overline{D_\alpha^m D_\beta^p u_2(x,\xi)}\,dx + \\ &+ J\left(u_1(x,\xi), u_2(x,\xi)\right) + \int_0^d D_\alpha^m D_\beta^p u_2(x,\xi)\,\overline{D_\alpha^m D_\beta^p u_1(x,\xi)}\,dx + J\left(u_2(x,\xi), u_1(x,\xi)\right) + \\ &+ \int_{d/4}^d \alpha^{2m}(x)\beta^{2p}(x)\left|\partial_x^{m+p}u_2(x,\xi)\right|^2 dx + J_1\left(u_2(x,\xi)\right) + R\left(u_2(x,\xi)\right),\end{aligned} \tag{11}$$

где для $2 \le i+j < 4$

$$J\left(u_i(x,\xi), u_j(x,\xi)\right) = \int_0^d D_\beta^p D_\alpha^{2m} u_i(x,\xi)\,\overline{D_\beta^p u_j(x,\xi)}\,dx - \int_0^d D_\alpha^{2m} D_\beta^p u_i(x,\xi)\,\overline{D_\beta^p u_j(x,\xi)}\,dx,$$

$$R\left(u_2(x,\xi)\right) = \sum_{m+p\le\mu\le 2m-1} (-1)^\mu D_\alpha^\mu u_2(x,\xi)\, D_\alpha^{2m-\mu}\,\overline{D_\beta^{2p} u_j(x,\xi)}\Bigg|_{x=d/4}^{x=d},$$

$$J_1\left(u_2(x,\xi)\right) = \int_{d/4}^d \sum_{\substack{\mu+\nu\le 2(m+p)-1\\ \mu\le m+p,\ \nu\le m+p}} \Phi_{\mu\nu}(x)\,\partial_x^\mu u_2(x,\xi)\,\overline{\partial_x^\nu u_2(x,\xi)}\,dx,$$

$\Phi_{\mu\nu}(x)$ – некоторые ограниченные функции. При этом для любого $\varepsilon > 0$ имеют место оценки

$$\left|J\left(u_i(x,\xi), u_j(x,\xi)\right)\right| \le \varepsilon\int_0^d \left|D_\alpha^{2m}u_i(x,\xi)\right|^2 dx + \varepsilon\int_0^d \left|D_\beta^{2s}u_j(x,\xi)\right|^2 dx + c(\varepsilon)\int_0^d\left(\left|u_i(x,\xi)\right|^2 + \left|u_j(x,\xi)\right|^2\right)dx, \tag{12}$$

$$\left|R(u_2(x,\xi))\right| \le \varepsilon \int_{d/4}^{d} \left|\partial_x^{2m} u_2(x,\xi)\right|^2 dx + c(\varepsilon) \int_{d/4}^{d} \left|u_2(x,\xi)\right|^2 dx, \tag{13}$$

$$\left|J_1(u_2(x,\xi))\right| \le \varepsilon \int_0^d \left|D_\alpha^{2m} u_2(x,\xi)\right|^2 dx + \varepsilon \int_0^d \left|D_\beta^{2p} u_2(x,\xi)\right|^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^d \left|u_2(x,\xi)\right|^2 dx. \tag{14}$$

Доказательство. Запишем очевидное равенство

$$\left(D_\alpha^{2m} u(x,\xi), D_\beta^{2p} u(x,\xi)\right) = \left(D_\alpha^{2m} u_1(x,\xi), D_\beta^{2p} u_1(x,\xi)\right) + \left(D_\alpha^{2m} u_1(x,\xi), D_\beta^{2p} u_2(x,\xi)\right) + \left(D_\alpha^{2m} u_2(x,\xi), D_\beta^{2p} u_1(x,\xi)\right) +$$
$$+ \left(D_\alpha^{2m} u_2(x,\xi), D_\beta^{2p} u_2(x,\xi)\right). \tag{15}$$

Интегрируя в (15) по частям, для $2 \le i + j < 4$ установим соотношение

$$\int_0^d D_\alpha^{2m} u_i(x,\xi) \overline{D_\beta^{2p} u_j(x,\xi)}\, dx = \int_0^d D_\beta^{p} D_\alpha^{2m} u_i(x,\xi) \overline{D_\beta^{p} u_j(x,\xi)}\, dx =$$
$$= \int_0^d D_\alpha^{m} D_\beta^{p} u_i(x,\xi) \overline{D_\alpha^{m} D_\beta^{p} u_j(x,\xi)}\, dx + J\left(u_i(x,\xi), u_j(x,\xi)\right), \tag{16}$$

где $J\left(u_i(x,\xi), u_j(x,\xi)\right)$ введены в (11).

Оценка (12) вытекает из лемм 2, 3 и элементарного неравенства, справедливого для $\varepsilon > 0$

$$\left|\int_0^d \varphi(x)\,\psi(x)\, dx\right| \le \varepsilon \int_0^d |\varphi(x)|^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^d |\psi(x)|^2 dx. \tag{17}$$

Рассмотрим далее скалярное произведение $\left(D_\alpha^{2m} u_2(x,\xi), D_\beta^{2p} u_2(x,\xi)\right)$. Интегрируя по частям, получим

$$\left(D_\alpha^{2m} u_2(x,\xi), D_\beta^{2p} u_2(x,\xi)\right) = \int_{d/4}^{d} D_\alpha^{m+p} u_2(x,\xi) \overline{D_\alpha^{m-p} D_\beta^{2p} u_2(x,\xi)}\, dx + R\left(u_2(x,\xi)\right), \tag{18}$$

где $R(u_2(x,\xi))$ определено в (11). Поэтому оценка (13) для $R(u_2(x,\xi))$ вытекает из известной теоремы о следах [11].

Интеграл, стоящий в правой части (18), преобразуем к виду

$$\int_{d/4}^{d} D_\alpha^{m+p} u_2(x,\xi) \overline{D_\alpha^{m-p} D_\beta^{2p} u_2(x,\xi)}\, dx = \int_{d/4}^{d} \alpha^{2m}(x) \beta^{2p}(x) \partial_x^{m+p} u_2(x,\xi) \overline{\partial_x^{m+p} u_2(x,\xi)}\, dx + J_1\left(u_2(x,\xi)\right), \tag{19}$$

причём для введённого в (11) $J_1(u_2(x,\xi))$ справедлива оценка (14).

Таким образом, из (16), (18), (19) вытекает представление (11). Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ для функции $u(x,\xi) \in FH_{\alpha,\beta}^{2m,2p}(D)$, являющейся решением задачи (3), (4), выполнена оценка

$$\left\|D_\beta^{2p} u(x,\xi)\right\|_0^2 \le \varepsilon \left\|D_\alpha^{2m} u(x,\xi)\right\|_0^2 + c(\varepsilon) \left\|f(x,\xi)\right\|_0^2, \tag{20}$$

с постоянной $c(\varepsilon) > 0$, не зависящей от $u(x,\xi), f(x,\xi)$.

Доказательство. Умножим скалярно уравнение (3) на $D_\beta^{2p} u(x,\xi)$. После элементарных преобразований будем иметь

$$a_{2m,0} \int_0^d D_\alpha^{2m} u(x,\xi) \overline{D_\beta^{2p} u(x,\xi)}\, dx + b_{2p,0} \int_0^d \left|D_\beta^{2p} u(x,\xi)\right|^2 dx = \int_0^d f(x,\xi) \overline{D_\beta^{2p} u(x,\xi)}\, dx -$$
$$- \sum_{\substack{0 \le j+|\mu| \le 2m \\ j \ne 2m}} a_{j\mu} \xi^\mu \int_0^d D_\alpha^{j} u(x,\xi) \overline{D_\beta^{2p} u(x,\xi)}\, dx - \sum_{\substack{0 \le j+|\mu| \le 2p \\ j \ne 2p}} b_{j\mu} \xi^\mu \int_0^d D_\beta^{j} u(x,\xi) \overline{D_\beta^{2p} u(x,\xi)}\, dx. \tag{21}$$

Для оценки слагаемых, стоящих в правой части равенства (21), применим следствие 1 и неравенство (17). С помощью элементарных оценок получим

$$a_{2m,0}\operatorname{Re}\int_0^d D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\,\overline{D_\beta^{2p}u(x,\xi)}\,dx+b_{2p,0}\left\|D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right\|_0^2\le\varepsilon_1\left\|D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right\|_0^2+c(\varepsilon_1)\left\|f(x,\xi)\right\|_0^2+\varepsilon_1\left\|D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right\|_0^2+$$
$$+c(\varepsilon_1)\sum_{\substack{0\le j+|\mu|\le 2m\\ j\ne 2m}}\left(1+|\xi|^2\right)^{|\mu|}\left\|D_\alpha^{j}u(x,\xi)\right\|_0^2+\varepsilon_1\left\|D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right\|_0^2+c(\varepsilon_1)\sum_{\substack{0\le j+|\mu|\le 2p\\ j\ne 2p}}\left(1+|\xi|^2\right)^{|\mu|}\left\|D_\beta^{j}u(x,\xi)\right\|_0^2\le$$
$$\le 3\varepsilon_1\left\|D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right\|_0^2+c(\varepsilon_1)\left\|f(x,\xi)\right\|_0^2+\varepsilon\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|_0^2+\varepsilon\left\|D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right\|_0^2+c_1(\varepsilon,\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\left\|u(x,\xi)\right\|_0^2+$$
$$+c_1(\varepsilon,\varepsilon_1)\left(1+|\xi|^2\right)^{2p}\left\|u(x,\xi)\right\|_0^2. \qquad (22)$$

Выбирая в (22) $\varepsilon_1>0$ достаточно малым и применяя оценку (5), доказанную в лемме 1, установим неравенство

$$a_{2m,0}\operatorname{Re}\left(D_\alpha^{2m}u(x,\xi),D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right)+\frac{1}{2}b_{2p,0}\left\|D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right\|_0^2\le\varepsilon\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|_0^2+c_2(\varepsilon)\left\|f(x,\xi)\right\|_0^2. \qquad (23)$$

Используя представление (11), а также неравенства (12) – (14) и (5), из (23) выводим оценку

$$\left\|D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right\|_0^2\le\varepsilon\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|_0^2+c_1\left|\int_{d/4}^{d}D_\alpha^m D_\beta^p u_1(x,\xi)\,\overline{D_\alpha^m D_\beta^p u_2(x,\xi)}\,dx\right|+c(\varepsilon)\left\|f(x,\xi)\right\|_0^2.$$

Чтобы завершить доказательство леммы 5, достаточно заметить, что подынтегральное выражение в правой части последнего неравенства

$$D_\alpha^m D_\beta^p u_1(x,\xi)\,\overline{D_\alpha^m D_\beta^p u_2(x,\xi)}=D_\alpha^m D_\beta^p\left(\varphi(x)u(x,\xi)\right)\overline{D_\alpha^m D_\beta^p u(x,\xi)}-\left|D_\alpha^m D_\beta^p\left(\varphi(x)u(x,\xi)\right)\right|^2$$

содержит произведения производных от функции $u(x,\xi)$ только до порядка $m+p<2m$ и поэтому сам интеграл, с учётом элементарного неравенства (17), может быть оценен следующим образом

$$\left|\int_{d/4}^{d}D_\alpha^m D_\beta^p u_1(x,\xi)\,\overline{D_\alpha^m D_\beta^p u_2(x,\xi)}\,dx\right|\le\varepsilon\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|_0^2+c(\varepsilon)\left\|f(x,\xi)\right\|_0^2.$$

Теорема. Пусть выполнены условия 1, 2 и $F(x,y)\in L_2(D)$. Тогда для функций $u(x,\xi)\in FH_{\alpha,\beta}^{2m,2p}(D)$ и $U(x,y)\in H_{\alpha,\beta}^{2m,2p}(D)$, являющихся соответственно решениями задач (3), (4) и (1), (2), выполнены априорные оценки

$$\sum_{j=0}^{2m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D_\alpha^j u(x,\xi)\right\|_0^2+\sum_{j=0}^{2p}\left(1+|\xi|^2\right)^{2p-j}\left\|D_\beta^j u(x,\xi)\right\|_0^2\le c\left\|f(x,\xi)\right\|_0^2, \qquad (24)$$

$$\left\|U(x,y)\right\|_{2m,\alpha,2p,\beta}^2\le c\iint_D\left|F(x,y)\right|^2\,dxdy \qquad (25)$$

с постоянной $c>0$ не зависящей от $u(x,\xi)$, $f(x,\xi)$, $U(x,y)$, $F(x,y)$.

Доказательство теоремы вытекает из лемм 1, 5 и следствия 1. Действительно, из уравнения (3) оценим $\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|_0$. Имеем

$$\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|_0^2\le c\left(\sum_{k=0}^{2m-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-k-1}\left\|D_\alpha^k u(x,\xi)\right\|_0^2+\sum_{k=0}^{2p}\left(1+|\xi|^2\right)^{2p-k}\left\|D_\beta^k u(x,\xi)\right\|_0^2+\left\|f(x,\xi)\right\|_0^2\right).$$

Для оценки слагаемых, стоящих в правой части последнего неравенства, применим следствие 1 и леммы 1, 5. Получим

$$\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|_0^2\le\varepsilon\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|_0^2+c(\varepsilon)\left\|f(x,\xi)\right\|_0^2. \qquad (26)$$

Выбирая в (26) $\varepsilon>0$ достаточно малым, выводим неравенство

$$\left\|D_\alpha^{2m} u(x,\xi)\right\|_0 \le c_1 \left\| f(x,\xi)\right\|_0,$$

которое вместе с (5), (10) и (20) приводит к оценке (24).

Оценка (25) вытекает из неравенства (24) после интегрирования его по $\xi \in R_n$ и теорема тем самым доказана.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-01-00197.

Список литературы
References

1. Олейник О.А., Радкевич Е.В. 2010. Уравнения с неотрицательной характеристической формой. МГУ. Москва.

Oleinic O.A., Radkevich E.V. 2010. Equations wits nonnegative characteristic form. Moscow State University. Moscow.

2. Архипов В.П. 2011. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. Дифференц. уравнения, 47, № 10: 1383–1393.

Arkhipov V.P. 2011. Linear Second-Order Differential Equations with Degenerating Coefficient of the Second Derivative. Differential Equations, 47, № 10: 1383–1393.

3. Архипов В.П., Глушак А.В. 2013. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка около точки вырождения. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, №5 (148). Выпуск 30.

Arhipov V.P., Glushak A.V. 2013. Asymptotic Representations of Solutions the Second-Order Differential Equation near the Degenerating Point. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics, №5(148). Iss. 30.

4. Архипов В.П. 2016. Асимптотические представления решений вырождающихся эллиптических уравнений. Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика, №1: 50–65.

Arhipov V.P. 2014. Asymptotic representations of solutions of degenerate elliptic equations. Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. №1: 50–65.

5. Архипов В.П., Глушак А.В. 2016. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, №20 (241), Выпуск 44: 5–22.

Arhipov V.P., Glushak A.V. 2016. Degenerating Second-Order Differential Equations. Asymptotic Representations of Solutions. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics, №20 (241), issue 44: 5–22.

6. Архипов В.П., Глушак А.В. 2016. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления спектра. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, №27 (248), Выпуск 45: 45–59.

Arhipov V.P., Glushak A.V. 2016. Degenerating Second-Order Differential Equations. Asymptotic Representations of Spectrum. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics, №27 (248), issue 45: 45–59.

7. Глушко В.П., Савченко Ю.Б. 1985. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи. Итоги науки и техники. Сер. Мат. анал., 23: 125–218.

Glushko V.P., Savchenko Yu.B. 1985. Higher-order degenerate elliptic equations: Spaces, operators, boundary-value problems. Mathematical analysis. Itogi Nauki i Tekhniki, Moscow, 23: 125–218.

8. Глушко В.П., Львин С.Я. 1977. О некоторых свойствах одного класса весовых пространств С.Л. Соболева. В сб. «Дифференциальные и интегральные уравнения», вып. 1. Нальчик: 52–57.

Glushko V.P., L`vin S.Ya. 1977. On some properties of a class of weighted Sobolev spaces. In the collection "Differential and Integral Equations", issue 1. Nalchik: 52–57.

9. Freeman R.S., Schechter M. 1974. On the existence, uniqueness and regularity of solutions to general elliptic boundary value problems. J. different. equat., issue 15: 213–246.

10.Глушко В.П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. Деп. ВИНИТИ № 1049-79 Деп: 47.

Glushko V.P. A priori estimates of solutions of boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. Dep. VINITI № 1049-79 Dep: 47.

11.Агранович М.С., Вишик М.И. 1964. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. УМН. XIX, вып. 3: 53–161.

Agranovich M.S., Vishik M.I. 1964. Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general form. UMN, XIX, issue 3: 53–161.