УДК 517.9

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СКАЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

ASYMPTOTIC OF EIGENVALUES OF SCALAR DIFFERENTIAL OPERATOR WITH AN INVOLUTION

Н.Б. Ускова
N.B. Uskova

Воронежский государственный технический университет, Россия, 394026, г. Воронеж, Московский пр-т, 14

Voronezh State Technical University, Russia, 394026, Voronezh, Moscow Ave, 14

E-mail: nat-uskova@mail.ru

Аннотация
Рассматривается дифференциальный оператор первого порядка, возмущённый обычным потенциалом и потенциалом с инволюцией. Производятся преобразования подобия, позволяющие свести изучение рассматриваемого оператора к оператору, имеющему матрицу блочно-диагонального вида. Получены оценки собственных значений.

Abstract
First-order differential operator which perturbated by simple potential and by potential with an involution is studied. Similarity transformations which allows to study operator with block diagonal matrix instead of initial operator are done. Estimates of eigenvalues are received.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр, дифференциальный оператор с инволюцией.
Keywords: the similar operator method, spectrum, the differential operator with an involution.

Введение

Пусть $L_2 = L_2[0,\omega]$ – гильбертово пространство измеримых по Лебегу на $[0,\omega]$ со значениями в $\mathbb{C}$ суммируемых с квадратом модуля (классов) функций. Скалярное произведение в $L_2(\mathbb{Z})$ задается формулой

$$(x,y) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(s)\overline{y(s)}\,ds, x,y \in L_2,$$

и норма порождается этим скалярным произведением.

Введенное пространство L_2 изометрически изоморфно пространству $L_{2,\omega} = L_{2,\omega}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ периодических периода ω определенных на всей оси $\mathbb{R}$ и суммируемых с квадратом модуля на $[0,\omega]$ комплексных функций. Каждая функция из L_2 будет отождествляться с ее периодическим периода ω продолжением. Через $W_2^1 = W_2^1[0,\omega]$ обозначим пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из L_2 с производными из L_2. Далее символом $End\,\mathcal{H}$ обозначена банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в абстрактном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, с нормой $\|X\|_\infty = \sup_{\|x\|\leq 1}\|Xx\|, x \in \mathcal{H}, X \in End\,\mathcal{H}$. Введем в рассмотрение двусторонний идеал операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H}) \subset End\,\mathcal{H}$, $\|X\|_2$ – норма оператора Гильберта-Шмидта $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. т.е. $\|X\|_2 = (tr(XX^*))^{1/2}$.

В пространстве L_2 рассматривается линейный дифференциальный оператор L первого порядка с инволюцией, задаваемый дифференциальным выражением

$$(ly)(s) = y'(s) - q(s)y(\omega - s) - q_0(s)y(s),$$

$s \in [0,\omega]$ с областью определения

$$D(L) = \{y \in W_2^1 : y(0) = y(\omega)\}.$$

Всюду далее предполагается, что потенциалы q, q_0 принадлежат пространству L_2.

Дифференциальный оператор L рассматривается в [1] в случае $q_0 = 0$ и гладкой функции q, где с помощью резольвентного метода получены оценки его собственных значений и собственных векторов. Эти оценки в [1] используются для обоснования метода Фурье. В данной работе для изучения оператора L используется метод подобных операторов [2], особенно модификация метода подобных операторов из [3]. Отметим, что метод подобных операторов используется в спектральном анализе различных классов дифференциальных [3] и разностных [4-5] операторов.

Оператор L преобразовывается следующим образом. Сначала делается преобразование подобия (не относящееся к методу подобных операторов), с помощью которого оператор L приводится к оператору L_1 с $D(L_1) = D(L)$, определяемому дифференциальным выражением

$$(l_1 y)(s) = y'(s) - \widehat{q_0}(0)y(s) - q_1(s)y(\omega - s),$$

где $\widehat{q_0}(0) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega q_0(s)ds$.

После этого к полученному оператору L_1 применяется стандартная модификация метода подобных операторов из [3]. Это позволяет свести изучение оператора L к изучению оператора, имеющего числовую матрицу блочно-диагонального вида в стандартном базисе $\left\{e^{i\frac{2\pi k}{\omega}s},\ k \in \mathbb{Z}\right\}, s \in [0,\omega]$ пространства L_2.

Перейдем к более подробному изложению результатов.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что имеет место

Теорема 1. Оператор $L: D(L) \subset L_2 \to L_2$ подобен оператору $L_1: D(L_1) \subset L_2 \to L_2$, где

$$q_1(s) = q(s)\exp\left(\int_s^{\omega - s}(q_0(\tau) - \widehat{q_0}(0)\right)d\tau. \qquad (1)$$

Имеет место равенство $LU = UL_1$, и ограниченный обратимый оператор U действует по формуле

$$(Uy)(s) = \exp(\int_0^s \left(q_0(\tau) - \widehat{q_0}(0)\right)d\tau)y(s). \qquad (2)$$

Таким образом, оператор L подобен оператору L_1, представимому в виде $L_1 = L_0 - A$, где $L_0 = \frac{d}{dt} - \widehat{q_0}(0)$ и $(Ay)(s) = q_1(s)y(\omega - s)$. Оператор L_1 с невозмущенным оператором L_0 и оператором-возмущением A полностью вписывается в схему метода подобных операторов из [3].

Спектральные свойства невозмущенного оператора L_0 известны. Его спектр состоит из простых собственных значений $\mathfrak{S}_n(L_0) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{S}_k = \{\lambda_k\}$, $\lambda_k = \frac{i2\pi k}{\omega} - \widehat{q_0}(0)$, соответствующими собственными векторами являются векторы стандартного базиса $e_k = e^{i\frac{2\pi k}{\omega}s}, k \in \mathbb{Z}_+$ и они образуют в L_2 ортонормированный базис. Спектральные проекторы $P_k, k \in \mathbb{Z}$, задаются формулой $P_k x = (x, e_k)e_k$. Пусть $P_{(m)} = \sum_{|i|\le m} P_i$ и пусть функция q_1, определенная формулой (1), имеет ряд Фурье $q_1(s) = \sum_{k\in U}\widehat{q_1}(k)\, e^{i\frac{2\pi k}{\omega}s}$. Из теоремы 1 и теорем 3.3 и 3.4 из [3] вытекает

Теорема 2. Существует такое целое число $m \geq 0$, что оператор L подобен оператору $\tilde{L}$ блочно-диагонального вида

$$\tilde{L} = L_0 - \sum_{|i|>m} P_i X P_i - P_{(m)} X P_{(m)} = L_0 - B,$$

где оператор X из $\mathfrak{S}_2(L_2)$ есть решение нелинейного уравнения метода подобных операторов. Имеет место равенство $LU(I+W) = U(I+W)(L_0 - B)$, обратимый оператор U определен формулой (2) и оператор W принадлежит $\mathfrak{S}_2(L_2)$.

Операторы W, X из теоремы 3 могут быть эффективно вычислены как предел последовательности операторов, возникающих при применении метода простых итераций (см. [2-5]).

Теорема 3. Спектр $\mathfrak{S}(L)$ оператора L представим в виде

$$\mathfrak{S}(L) = \tilde{\mathfrak{S}}_{(m)} \cup \Big(\bigcup_{|n|>m} \tilde{\mathfrak{S}}_n\Big),$$

где множество $\tilde{\mathfrak{S}}_{(m)}$ содержит не более $2m+1$ собственных значений, множества $\tilde{\mathfrak{S}}_n, |n| > m$ одноточечны, $\tilde{\mathfrak{S}}_n = \{\tilde{\lambda}_n\}, \lambda_n = i\frac{2\pi n}{\omega} - \hat{q}_0(0) - \mu_n$. Соответствующие собственные векторы образуют в L_2 базис Рисса. При этом:

1) последовательность $(\mu_n), |n| > m$, суммируема с квадратом, т.е. $\sum_{|n|>m} |\mu_n|^2 < \infty$;
2) $\mu_n = \hat{q}_1(2n) + \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{k\neq n}\frac{(\hat{q}_1(n+k))^2}{n-k} + d_n$, $|n| > m$, где последовательность d_n суммируема.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 16-01-00197.

Список литературы
References

1. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. 2014. Смешанная задача для простейшего дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика, 14 (1): 10-20.

Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. 2014. Mixed problem for simplest hyperbolic first order equations with involution. Izv. Sarat. Univ. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics, 11(1): 3-12. (in Russian)

2. Баскаков А.Г. 1983. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов. Сиб. мат. журн., 24(1): 21-39.

Baskakov A.G. 1983. Methods of abstract harmonic analysis in the perturbation of linear operators. Siberian Math. J., 24(1): 21-39.

3. Baskakov A.G., Krishtal I.A., Romanova E.Yu. 2017. Spectral analysis of a differential operator with an involution. J. Evolut. Equat., №17: 669-684.

4. Гаркавенко Г.В., Ускова Н.Б., Зголич А.Р. 2016. Метод подобных операторов и спектральные свойства разностного оператора с чётным потенциалом. Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика, 43 (20): 42-49.

Garkavenko G.V., Uskova N.B., Zgolich A.R. 2016. The similar operator method and spectral properties of the difference operator with order potential. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics, 43(20): 42-49. (in Russian)

5. Гаркавенко Г.В., Ускова Н.Б. 2016. Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом. Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика, 16(4): 395-402.

Garkavenko G.V., Uskova N.B. 2016. Spectral analysis of a class of difference operators with growing potential. Izvestya Saratovskogo Universiteta. Ser. Mathematics. Physics. Informatics, 16(4): 395-402. (in Russian).