



УДК 537.8

**ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПУЧКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ  
НА УГЛОВУЮ ПЛОТНОСТЬ ДИФРАГИРОВАННОГО ПЕРЕХОДНОГО  
ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЕ****INFLUENCE OF RELATIVISTIC ELECTRON BEAM PARAMETERS  
ON THE ANGULAR DENSITY OF DIFFRACTED TRANSITION RADIATION  
IN A PERIODIC LAYERED MEDIUM**

**С.В. Блажевич, А.З. Лигидов, А.А. Мазиллов, А.В. Носков,  
И.Р. Сиднина, О.Ю. Шевчук**  
**S.V. Blazhevich, A.Z. Ligidov, A.A. Mazilov, A.V. Noskov,  
I.R. Sidnina, O.Yu. Shevchuk**

Белгородский государственный университет, ул. Победы 85,  
г. Белгород, 308015, Россия

Belgorod State University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: noskovbupk@mail.ru

**Аннотация**

Рассматривается дифрагированное переходное излучение (ДПИ), возбуждаемое в периодической слоистой среде расходящимся пучком релятивистских электронов через периодическую слоистую среду. Для геометрий рассеяния Лауэ и Брэгга получены и исследованы выражения, описывающие угловую плотность ДПИ. Исследовано влияние характеристик электронного пучка на угловую плотность ДПИ.

**Abstract**

Diffraction transition radiation excited by a divergent beam of relativistic electrons in a periodic layered medium is considered. The expression describing the angular density of diffracted transition radiation in the Laue scattering geometry is derived. The influence of the electron beam characteristics on the DTR angular density is studied.

**Ключевые слова:** пучок релятивистских электронов, динамическая дифракция, угловая расходимость, дифрагированное переходное излучение.

**Keywords:** relativistic electron beam, dynamic diffraction, angular divergency, diffracted transition radiation.

---

**1. Введение**

Когерентное рентгеновское излучение релятивистского электрона в периодической слоистой среде в приближении динамической теории дифракции в виде вкладов параметрического рентгеновского излучения (ПРИ) и дифрагированного переходного излучения (ДПИ) впервые рассматривалось в работе [1]. ПРИ в периодической слоистой среде возникает вследствие дифракции псевдо-фотонов кулоновского поля релятивистского электрона на слоях мишени аналогично тому, как ПРИ в монокристалле [2-3] возникает вследствие дифракции на системе параллельных атомных плоскостей. Дифрагированное переходное излучение является следствием дифракции на слоях мишени фотонов переходного излучения, генерируемого на входной поверхности мишени аналогично ДПИ в монокристалле [4-6], сформированному на атомных плоскостях. Динамическая теория излучения релятивист-



ских электронов в периодических слоистых средах [1] хорошо описывает экспериментальные данные, например, представленные в работе [7]. Необходимо отметить, что традиционно процесс излучения в периодических слоистых средах рассматривался в геометрии рассеяния Брэгга и только для частного случая симметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени, когда угол между поверхностью мишени и отражающими плоскостями равен нулю. Такое рассмотрение было проведено и в работе [1]. Процесс когерентного рентгеновского излучения релятивистского электрона в периодической слоистой среде для общего случая асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени в геометрии рассеяния Лауэ впервые рассматривался в работе [8], а в геометрии рассеяния Брэгга в работе [9]. В работе [10] рассматривалось ДПИ, возбуждаемое пучком релятивистских электронов высоких энергий, пересекающих тонкую монокристаллическую пластинку в геометрии рассеяния Лауэ. В работе было получено выражение, описывающее угловую плотность ДПИ для случая, когда длина пути электрона в мишени существенно меньше длины экстинкции рентгеновских волн в кристалле, и продемонстрирована зависимость угловой плотности ДПИ от расходимости пучка релятивистских электронов.

В работе [11] развита динамическая теория когерентного рентгеновского излучения, возбуждаемого при прохождении расходящегося пучка релятивистских электронов через периодическую слоистую мишень и для геометрии рассеяния Брэгга получены и исследованы выражения, описывающие спектрально-угловые характеристики когерентного рентгеновского излучения. В настоящей работе исследованы спектрально угловые характеристики когерентного излучения как в геометрии рассеяния Лауэ, так и Брэгга, и проведено сравнение параметров углового распределения когерентного излучения в этих геометриях.

## 2. Геометрия процесса излучения

Рассмотрим пучок релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую мишень, состоящую из чередующихся слоев толщиной  $l_1$  и  $l_2$ , и диэлектрическими восприимчивостями соответственно  $\chi_1$  и  $\chi_2$  ( $T = l_1 + l_2$  период слоистой мишени) в геометриях рассеяния Брэгга (Рис.1) и Лауэ (Рис.2). Отражающие слои расположены под некоторым углом  $\delta$  к поверхности мишени (Рис.1), что соответствует случаю асимметричного отражения поля излучения ( $\delta = 0$  - частный случай симметричного отражения). Введем угловые переменные  $\Psi$ ,  $\theta$  и  $\theta_0$  в соответствии с определениями скорости релятивистского электрона  $\mathbf{V}$  и единичных векторов  $\mathbf{n}$  (в направлении импульса фотона, излученного вблизи направления вектора скорости электрона) и  $\mathbf{n}_g$  (в направлении рассеяния Брэгга):

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\psi^2\right) \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\psi}, & \mathbf{e}_1 \boldsymbol{\psi} &= 0 \\ \mathbf{n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta_0^2\right) \mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\theta}_0, & \mathbf{e}_1 \boldsymbol{\theta}_0 &= 0, & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 &= \cos 2\theta_B, \\ \mathbf{n}_g &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\theta}, & \mathbf{e}_2 \boldsymbol{\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\theta$  - угол излучения, отсчитываемый от оси детектора излучения  $\mathbf{e}_2$ ,  $\Psi$  - угол отклонения рассматриваемого электрона в пучке, отсчитываемый от оси электронного пучка  $\mathbf{e}_1$ ,  $\theta_0$  - угол между направлением распространения падающего псевдо фотона и осью  $\mathbf{e}_1$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2}$  - Лоренц-фактор электрона. Угловые переменные рассматриваются в виде суммы составляющих, параллельных и перпендикулярных плоскости рисунка:  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_{\parallel} + \boldsymbol{\theta}_{\perp}$ ,  $\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\theta}_{0\parallel} + \boldsymbol{\theta}_{0\perp}$ ,  $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_{\parallel} + \boldsymbol{\psi}_{\perp}$ .

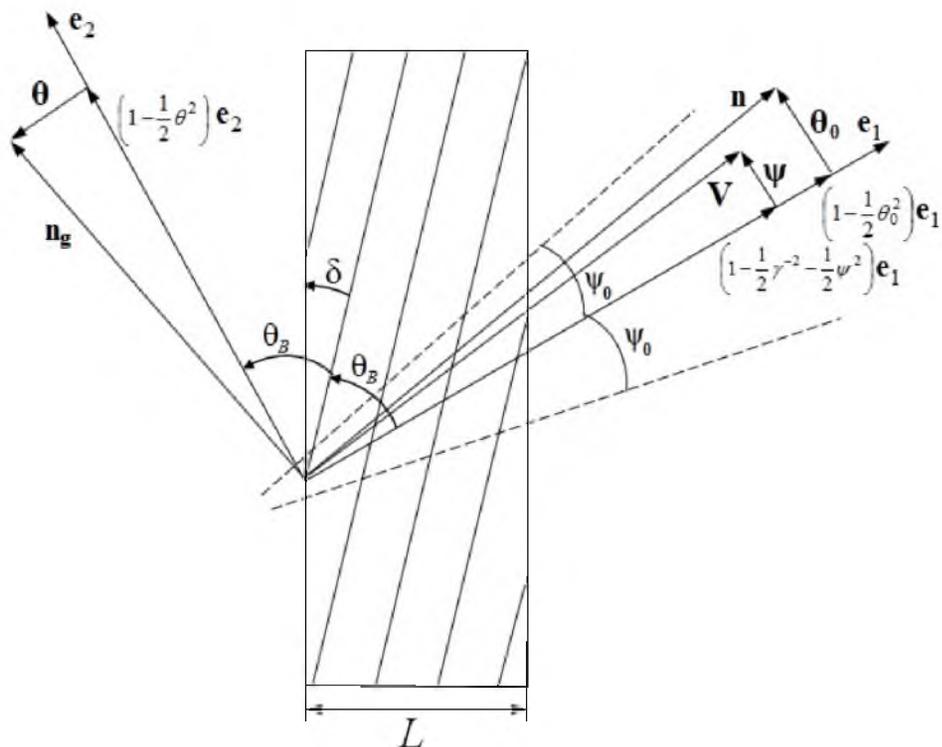


Рис. 1. Геометрия рассеяния Брэгга  
Fig.1. Bragg scattering geometry

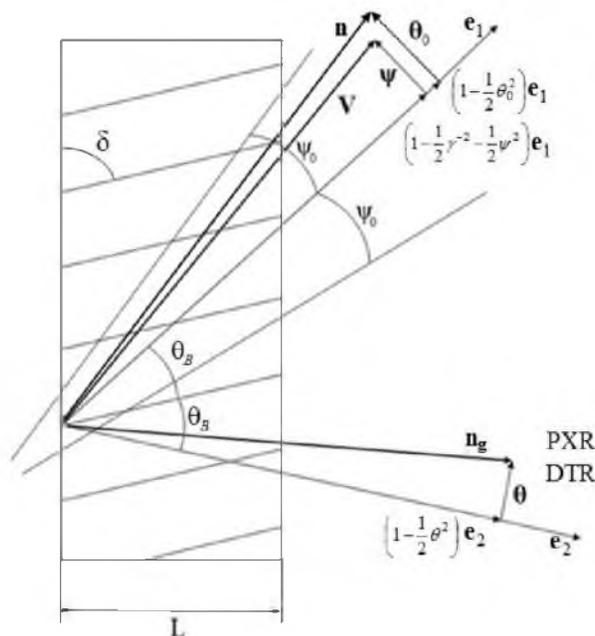


Рис.2. Геометрия рассеяния Лауэ  
Fig.2. Laue scattering geometry

### 3. Угловые плотности ДПИ в геометриях рассеяния Лауэ и Брэгга

В работе [11] развита динамическая теория когерентного рентгеновского излучения, возбуждаемого при прохождении расходящегося пучка релятивистских электронов через периодическую слоистую мишень. Для геометрии рассеяния Брэгга и Лауэ получено выра-



жение, описывающие угловую плотность ДПИ с учетом отклонения направления скорости электрона  $\mathbf{V}$  относительно оси электронного пучка  $\mathbf{e}_1$ , описываемого углом  $\Psi(\Psi_{\perp}, \Psi_{\parallel})$ . Просуммировав компоненты угловой плотности излучения с различной поляризацией, получим угловую плотность ДПИ пучка релятивистского электрона в геометрии рассеяния Брэгга

$$\frac{dN_{\text{ДПИ}}^B}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B^3 T^2}{2\pi^3 n^2} \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \sum_{s=1}^2 \left[ L_{\text{ext}}^{(s)} \frac{\Omega^{(s)2}}{(v^{(s)} \sigma^{(s)} - 1)^2 \sigma^{(s)2}} \tanh\left(\frac{b^{(s)}}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \right], \quad (2)$$

где введены обозначения

$$\Omega^{(1)} = \theta_{\perp} - \psi_{\perp}, \quad \Omega^{(2)} = \theta_{\parallel} + \psi_{\parallel}, \quad b^{(s)} = \frac{1}{2 \sin(\theta_B + \delta)} \frac{L}{L_{\text{ext}}^{(s)}}, \quad L_{\text{ext}}^{(s)} = \frac{1}{\omega} \left| \sin\left(\frac{\pi n}{1+r}\right) \right| |\chi'_2 - \chi'_1| C^{(s)},$$

$$\sigma^{(s)} = \frac{\pi n}{C^{(s)} \left| \chi'_2 - \chi'_1 \right| \left| \sin\left(\frac{\pi n}{1+r}\right) \right|} \left( \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi'_0 \right), \quad \varepsilon = \frac{\sin(\theta_B - \delta)}{\sin(\theta_B + \delta)},$$

$$v^{(s)} = \frac{C^{(s)} \left| \sin\left(\frac{\pi n}{1+r}\right) \right| |\chi'_2 - \chi'_1|}{\frac{\pi n}{1+r} |\chi'_1 + r\chi'_2|}, \quad r = \frac{l_2}{l_1}, \quad C^{(1)} = 1, \quad C^{(2)} = \cos 2\theta_B. \quad (3)$$

В геометрии рассеяния Лауэ угловая плотность ДПИ принимает вид

$$\frac{dN_{\text{ДПИ}}^L}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B^3 T^2}{2\pi^4 n^2} \sum_{s=1}^2 \left[ L_{\text{ext}}^{(s)} \frac{\Omega^{(s)2}}{(v^{(s)} \sigma^{(s)} - 1)^2 \sigma^{(s)2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{\xi^{(s)2} + \varepsilon} \sin^2 \left( b^{(s)} \frac{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) d\xi^{(s)}(\omega) \right], \quad (4)$$

где обозначения аналогичны (3), но  $\varepsilon = \frac{\sin(\delta + \theta_B)}{\sin(\delta - \theta_B)}$ ,  $b^{(s)} = \frac{1}{2 \sin(\delta - \theta_B)} \frac{L}{L_{\text{ext}}^{(s)}}$ , спектральная

функция имеет вид  $\xi^{(s)}(\omega) = \frac{2\pi^2 n^2}{T^2 \omega_B} L_{\text{ext}}^{(s)} \left( \frac{\omega}{\omega_B} \left( 1 - \theta_{\parallel} \sqrt{\frac{T^2 \omega_B^2}{\pi^2 n^2} - 1} \right) - 1 \right) + \frac{1 - \varepsilon}{2v^{(s)}}$ ,  $C^{(1)} = 1$ ,

$$C^{(2)} = |\cos 2\theta_B|.$$

Усредним выражение (2) и (4) для угловых плотностей ДПИ одного электрона, движущегося под углом  $\Psi(\Psi_{\perp}, \Psi_{\parallel})$ , по всем возможным прямолинейным траекториям этого электрона в пучке. Для примера проведем усреднение спектрально-угловых плотностей ПРИ и ДПИ по распределению электронов в пучке в виде двумерной функции распределения Гаусса

$$f(\Psi) = \frac{1}{\pi \Psi_{0\perp} \Psi_{0\parallel}} \cdot e^{-\left( \frac{(\Psi_{\perp} - \Psi_{0\perp}^*)^2}{\Psi_{0\perp}^2} + \frac{(\Psi_{\parallel} - \Psi_{0\parallel}^*)^2}{\Psi_{0\parallel}^2} \right)},$$

где  $\Psi_{0\perp}$  - начальная расходимость пучка в направлении вектора  $\Psi_{\perp}$ , а  $\Psi_{0\parallel}$  - начальная расходимость пучка в направлении вектора  $\Psi_{\parallel}$  (см. рис.1, рис.2). Необходимо отметить, что Средняя начальная расходимость пучка релятивистских электронов определена как  $\Psi_0 = \sqrt{\Psi_{0\perp} \Psi_{0\parallel}}$ . Границей поперечного сечения падающего пучка будем считать эллипс



$\frac{\psi_{\perp}^2}{\psi_{0\perp}^2} + \frac{\psi_{\parallel}^2}{\psi_{0\parallel}^2} = 1$ . Величины  $\psi_{0\perp}$  и  $\psi_{0\parallel}$  будут определять форму электронного пучка,

$\psi^*(\psi_{\perp}^*, \psi_{\parallel}^*)$  - координату точки максимума двумерного распределения Гаусса (ось электронного пучка). Выражения, описывающие угловые плотности ДПИ пучка релятивистских электронов, нормированные на один электрон, в геометриях рассеяния Брэгга и Лауэ принимают соответственно следующий вид:

$$\left\langle \frac{dN_{\text{ДПИ}}^B}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2 \omega_B^3 T^2}{2\pi^3 n^2} \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{\pi \psi_{0\perp} \psi_{0\parallel}} \times$$

$$\times \sum_{s=1}^2 \left[ L_{\text{ext}}^{(s)} \tanh\left(\frac{b^{(s)}}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega^{(s)2}}{\sigma^{(s)2} (v^{(s)} \sigma^{(s)} - 1)^2} e^{-\left(\frac{(\psi_{\perp} - \psi_{\perp}^*)^2}{\psi_{0\perp}^2} + \frac{(\psi_{\parallel} - \psi_{\parallel}^*)^2}{\psi_{0\parallel}^2}\right)} d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} \right], \quad (5a)$$

$$\left\langle \frac{dN_{\text{ДПИ}}^L}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2 \omega_B^3 T^2}{2\pi^4 n^2} \frac{1}{\pi \psi_{0\perp} \psi_{0\parallel}} \times$$

$$\times \sum_{s=1}^2 \left[ L_{\text{ext}}^{(s)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{\xi^{(s)2} + \varepsilon} \sin^2\left(b^{(s)} \frac{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon}\right) d\xi^{(s)}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega^{(s)2}}{\sigma^{(s)2} (v^{(s)} \sigma^{(s)} - 1)^2} e^{-\left(\frac{(\psi_{\perp} - \psi_{\perp}^*)^2}{\psi_{0\perp}^2} + \frac{(\psi_{\parallel} - \psi_{\parallel}^*)^2}{\psi_{0\parallel}^2}\right)} d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} \right] \quad (5b)$$

При необходимости усреднение может быть проведено по любой другой функции, характеризующей распределение электронов в пучке. Выражения (5) позволяют вычислять угловые плотности ДПИ пучка релятивистских электронов, имеющего Гауссово распределение электронов.

#### 4. Численные расчеты

Для примера рассмотрим угловую плотность ДПИ пучка релятивистских электронов с энергией  $E_e \approx 2044 \text{ МэВ}$  ( $\gamma = 4000$ ), пересекающих периодическую слоистую среду, в геометрии рассеяния Брэгга (рис.1). Точка максимума углового распределения электронного пучка совпадает с его осью -  $\psi^*(0;0)$ . Мишень состоит из поочередно расположенных слоев бериллия  $Be$  и вольфрама  $W$ , с равными толщинами  $l_1 = l_2 = 10^{-3} \text{ мкм}$ , толщина мишени  $L = 0.5 \text{ мкм}$ , угол между осью электронного пучка и слоями мишени  $\theta_B = 2.2^\circ$ , частота Брэгга  $\omega_B = 8000 \text{ эВ}$ , угол между поверхностью мишени и отражающими слоями  $\delta = -1.14^\circ$ .

Построенные по формуле (5a) кривые, демонстрирующие угловую плотность дифрагированного переходного излучения для различных значений  $\psi_{0\perp}$  и  $\psi_{0\parallel}$ , представлены на Рис. 3. Из рисунка видно, что угловая плотность ДПИ существенно зависит от этих характеристик электронного пучка.

Кривые, демонстрирующие угловую плотность дифрагированного переходного излучения для различных значений  $\psi_{0\perp}$  и  $\psi_{0\parallel}$  в геометрии рассеяния Лауэ, построенные по формуле (5b), представлены на Рис. 4 при тех же значениях параметров, что и на Рис.3, за исключением  $\theta_B = 2.2^\circ$  и  $\delta = 4.5^\circ$ .

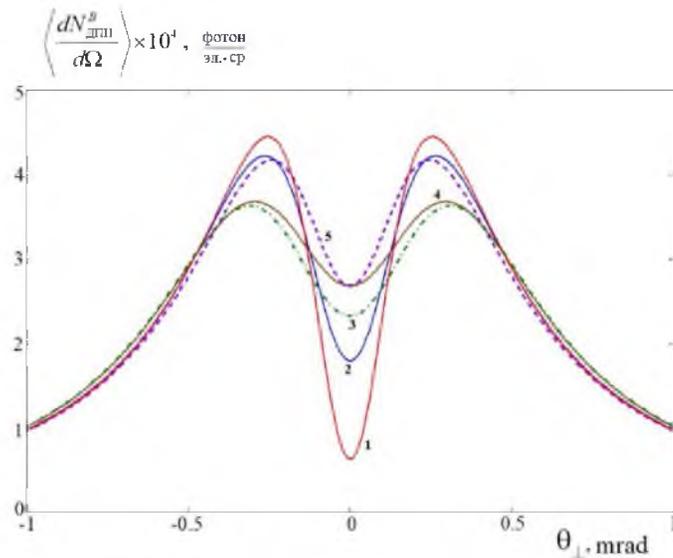


Рис.3. Угловые плотности ДПИ в геометрии рассеяния Брэгга. 1 –  $\psi_{0\perp} = \psi_{0\parallel} = 0.05 \text{ mrad}$  ;  
 2 –  $\psi_{0\perp} = \psi_{0\parallel} = 0.1 \text{ mrad}$  ; 3 –  $\psi_{0\perp} = 0.2 \text{ mrad}$  ,  $\psi_{0\parallel} = 0.05 \text{ mrad}$  ; 4 –  $\psi_{0\perp} = 0.2 \text{ mrad}$  ,  
 $\psi_{0\parallel} = 0.1 \text{ mrad}$  ; 5 –  $\psi_{0\perp} = 0.1 \text{ mrad}$  ,  $\psi_{0\parallel} = 0.2 \text{ mrad}$

Fig.3. Angular density of DTR in the geometry of Bragg scattering. 1 –  $\psi_{0\perp} = \psi_{0\parallel} = 0.05 \text{ mrad}$  ;  
 2 –  $\psi_{0\perp} = \psi_{0\parallel} = 0.1 \text{ mrad}$  ; 3 –  $\psi_{0\perp} = 0.2 \text{ mrad}$  ,  $\psi_{0\parallel} = 0.05 \text{ mrad}$  ; 4 –  $\psi_{0\perp} = 0.2 \text{ mrad}$  ,  
 $\psi_{0\parallel} = 0.1 \text{ mrad}$  ; 5 –  $\psi_{0\perp} = 0.1 \text{ mrad}$  ,  $\psi_{0\parallel} = 0.2 \text{ mrad}$

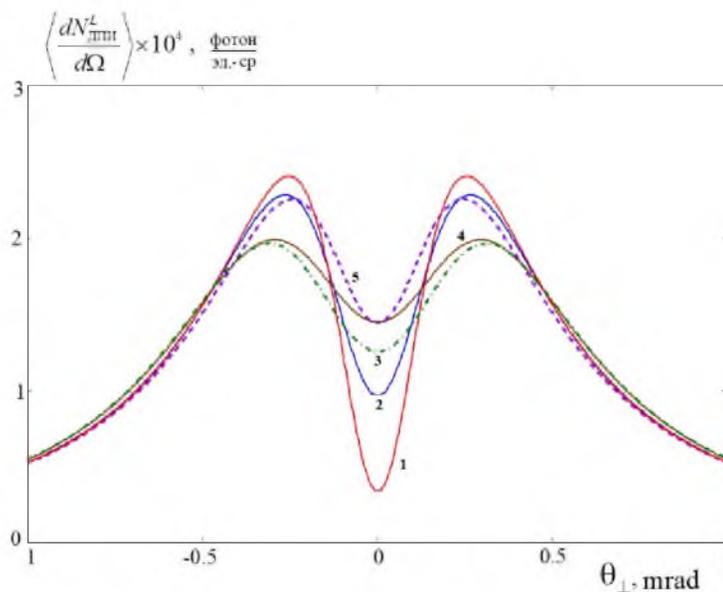


Рис.4. Угловые плотности ДПИ в геометрии рассеяния Лауэ. 1 –  $\psi_{0\perp} = \psi_{0\parallel} = 0.05 \text{ mrad}$  ;  
 2 –  $\psi_{0\perp} = \psi_{0\parallel} = 0.1 \text{ mrad}$  ; 3 –  $\psi_{0\perp} = 0.2 \text{ mrad}$  ,  $\psi_{0\parallel} = 0.05 \text{ mrad}$  ; 4 –  $\psi_{0\perp} = 0.2 \text{ mrad}$  ,  
 $\psi_{0\parallel} = 0.1 \text{ mrad}$  ; 5 –  $\psi_{0\perp} = 0.1 \text{ mrad}$  ,  $\psi_{0\parallel} = 0.2 \text{ mrad}$  ;

Fig.3. Angular density of DTR in the geometry of Laue scattering. 1 –  $\psi_{0\perp} = \psi_{0\parallel} = 0.05 \text{ mrad}$  ;  
 2 –  $\psi_{0\perp} = \psi_{0\parallel} = 0.1 \text{ mrad}$  ; 3 –  $\psi_{0\perp} = 0.2 \text{ mrad}$  ,  $\psi_{0\parallel} = 0.05 \text{ mrad}$  ; 4 –  $\psi_{0\perp} = 0.2 \text{ mrad}$  ,  
 $\psi_{0\parallel} = 0.1 \text{ mrad}$  ; 5 –  $\psi_{0\perp} = 0.1 \text{ mrad}$  ,  $\psi_{0\parallel} = 0.2 \text{ mrad}$  ;



### Заключение

В рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции исследованы спектрально-угловые характеристики дифрагированного переходного излучения (ДПИ) расходящегося пучка релятивистских электронов на многослойной периодической мишени. Проведены численные расчеты угловой плотности ДПИ для конкретного пучка релятивистских электронов, как в геометрии рассеяния Брэгга, так и в геометрии Лауэ. Продемонстрирована существенная зависимость угловой плотности излучения от параметров углового распределения электронов в пучке. Показано, что эффективность излучения в геометрии Брэгга в два раза выше, чем в геометрии Лауэ.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-12-10019).*

### Список литературы

#### References

1. Nasonov N.N., Kaplin V.V., Uglov S.R., Piestrup M.A. and Gary C.K. 2003. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. Phys. Rev E, 68: 3604.
2. Гарибян Г.М., Ян Ши. 1971. Квантовая макроскопическая теория излучения равномерно движущейся заряженной частицы в кристалле. ЖЭТФ, 61: 930.  
G.M. Garibyan, Jan Shi. 1971. The Quantum macroscopic theory of radiation of evenly moving charged particle in a crystal. JETP, 61(930).
3. Барышевский В.Г., Феранчук И.Д. 1971. О переходном излучении  $\gamma$  - квантов в кристалле. ЖЭТФ, 61: 944.  
Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. 1971. About transitional radiation - quanta in a crystal. JETP, 61: 944.
4. Baryhevsky V. G. 1997. Parametric X-ray radiation at a small angle near the velocity direction of the relativistic particle. Nucl. Instr. and Meth. A., 122: 13.
5. Artru X., Rullhusen P. 1998. Parametric X-rays and diffracted transition radiation in perfect and mosaic crystals. Nucl. Instr. and Meth. B., 145:1.
6. Nasonov N.N. 1988. Influence of the density effect upon the parametric X-rays of high energy particles. Phys. Lett A, 246: 148.
7. Kaplin V.V., Uglov S.R., Zabaev V.N., Piestrup M.A., Gary C.K., Nasonov N.N. and Fuller M. K. 2000. Observation of bright monochromatic x rays generated by relativistic electrons passing through a multilayer mirror. Appl. Phys. Lett., 76: 3647.
8. Blazhevich S.V., Kolosova I.V., Noskov A.V. 2012. Coherent X-ray Radiation Generated by a Relativistic Electron in an Artificial Periodic Structure. J. Exp. Theor. Phys., 114: 547.
9. Blazhevich S. V., Noskov A.V. 2016. Diffracted Transition Radiation of an Ultra-High-Energy Relativistic Electron Beam in a Thin Single-Crystal Wafer Journal of Experimental and Theoretical Physics, 123(4): 551–556.
10. Blazhevich S.V., Noskov A.V. 2017. Coherent X-ray Radiation Generated by a Relativistic Electron Beam in a Periodic Layered Medium in the Bragg Scattering Geometry. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 125(2): 223–234.