УДК 519.6

# ЗАДАЧА СИНТЕЗА ТЕРМИНАЛЬНОЙ СЕТИ НА ГРАФЕ

# TERMINAL NETWORK SYNTHESIS PROBLEM ON A GRAPH

**М.М. Бухурова**
**M.M. Bukhurova**

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А

Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 A, Shortanov St, Nalchik, 360000, Russia

E-mail:mareta.bukhurova@mail.ru

**Аннотация**
В работе рассматривается задача синтеза терминальной сети на графе, которая является многоэкстремальной и решается методом динамической декомпозиции, сводящий процесс оптимизации сети к оптимизации ее частей. Сформулирован системный принцип опимальности для терминальной сети с одним источником, дано определение $p$-оптимальной сети и проведены вычислительные эксперименты на графах, имеющих регулярную структуру и одни и те же нормативные данные в узлах и на ветвях.

**Abstract**
We consider the problem of synthesis of terminal network on the graph, which is multiextremal and is solved by a dynamic of decomposition, which reduces the network optimization process to optimize its parts. Formulated system optimality principle for terminal network with a single source, a definition of the $p$-optimal network and performed computational experiments on columns having a regular structure and the same normative data in nodes and branches.

**Ключевые слова**: задача синтеза, терминальная сеть, граф, метод динамической декомпозиции, принцип оптимальности.
**Keywords**: synthesis problem, terminal network, graph, dynamic method of decomposition, the principle of optimality.

## Введение

Реально функционирующие системы содержат наряду с непрерывной средой, локализованными в пространстве элементами, еще и каналы, по которым транспортируется вещество, энергия, информация и выносятся из системы продукты распада. Вследствие этого задачи оптимального определения конфигурации сети каналов и их параметров являются актуальными с математической и прикладной точек зрения.

Математическая теория сетей начинается с работ Л. Эйлера, Я. Штейнера, Г. Кирхгофа [1]. В работах Р. Прима и И. Краскала построены эффективные алгоритмы определения кратчайшей связывающей сети [2]. Е. Дейкстра разработал алгоритм построения кратчайшего маршрута на взвешенном графе между заданными вершинами. Сетевая задача с вогнутой целевой функцией практически эффективно решена В.П. Булатовым, Л.И. Касинской [3] и В.А. Трубиным [4]. Решения В.П. Булатова и Л.И. Касинской основаны на методе Хоанг Туя [5], решения В.А. Трубина – на методе ветвей и границ.

Следует отметить, что направление решения задач синтеза сетей связано со стремлением свести задачи синтеза сети к обобщенной задаче Штейнера. Для этого решается вначале задача оптимизации параметров ветвей сети на заданной конфигурации (задача оптимизации параметров – «хорошая» задача минимизации выпуклой функции при линейных (сетевых) ограничениях), а затем путем вариации положения точек ветвления сети (точек Штейнера) эта конфигурация оптимизируется.

## Постановка задачи

При решении сетевой задачи Штейнера на первом этапе решается не содержащая точек Штейнера задача синтеза терминальной сети с одним источником [6].

Данная задача состоит в следующем:

$$\begin{cases} z = \sum\limits_{ij\in D} c_{ij}(v_{ij}) l_{ij} \to \min, & (1) \\ \sum\limits_{i\in\Gamma_j^+} v_{ij} - \sum\limits_{k\in\Gamma_j^-} v_{jk} = g_j, \ \forall j_{\neq 1} \in B; \quad \sum\limits_{j\in\Gamma_1} v_{ij} = \sum\limits_{i\in B} g_i = Q_1, & (2) \\ v_{ij} \geq 0, \quad \forall ij \in D, & (3) \end{cases}$$

где: $\Gamma(B, D)$ – заданный конечный, связный, вообще говоря, двузвенный орграф, моделирующий возможные соединения узлов (вершин) сети друг с другом; $B$ и $D$ – множества его вершин и дуг; $v_{ij}, c_{ij}, l_{ij}$, – соответственно искомое значение потока по $ij$ – ой дуге (ветви) сети, его удельная (на единицу длины) стоимость и заданная длина ветви; $Q_1, g_j$ – заданный поток в сеть, заданный расход потока в $j$ – ом узле (вершине) сети соответственно.

Целевая функция (1) отражает стоимость сети. Ограничения (2), (3) учитывают законы теории сетей и требования по обеспечению потребителей сети потоками.

Задача является существенно многоэкстремальной и относится к классу полиноминально неразрешимых задач. Сложность состоит в том, что задача, во-первых, комбинаторная – экстремумы могут достигаться только в угловых точках транспортного многогранника (2), (3), вершинам многогранника, как известно, соответствуют базисные решения системы (2), (3). Эта система содержит $(n-1)$ линейно-независимых уравнений ($n$ – количество вершин сети) и, следовательно, количество положительных переменных равно $(n-1)$. Во-вторых, в каждой угловой точке в процессе направленного перебора приходится решать не расчетную, а оптимизационную задачу (выпуклого программирования при линейных ограничениях).

Для задачи (1) - (3) имеет место следующий принцип.

**Принцип оптимальности**

*а)* Найдется остов $\mathrm{T}$ графа $\Gamma(B,D)$ и соответствующее ему базисное решение задачи $\{v_{ij}^*\}_{ij\in D}$, $(v_{ij}^* = 0 \quad ij \notin T)$, такое, что

$$\min \sum_{ij\in D} c_{ij}(v_{ij}) l_{ij} = \sum_{ij\in T} c_{ij}(v_{ij}^*) l_{ij} .$$

б) Пусть $\mathrm{T}'$ – любая связная часть $\mathrm{T}$, $\Gamma(\mathrm{T}')$ – граф , порожденный на графе $\Gamma(B, D)$ графом $\mathrm{T}'$. Тогда:

$$\min \sum_{ij\in D} c_{ij}(v_{ij}) l_{ij} = \sum_{ij\in D} c_{ij}(v_{ij}^*) l_{ij} ,$$

где $v_{ij} = v_{ij}^* \quad \forall ij \notin \Gamma(T')$.

Условие а) сводит процесс оптимизации сети к перебору решений, соответствующих остовным деревьям графа $\Gamma(B,D)$. Однако даже направленный перебор таких решений неосуществим в силу их большого количества, растущего экспоненциально от числа вершин и дуг графа $\Gamma(B,D)$, и необходимости решать на каждом из них задачу выпуклого программирования с линейными ограничениями. Для преодоления этого препятствия можно использовать утверждение б), сводящее оптимизацию сети к оптимизации ее частей.

Поскольку оптимумы соответствуют вершинам транспортного многогранника, а им, в свою очередь, остовы графа $\Gamma(B,D)$, то будем использовать метод направленного перебора угловых точек

– симплекс метод, но в сетевой интерпретации. Пусть $\mathrm{T}$ – некоторое текущее дерево сети. Продвижению из текущей угловой точки в смежную соответствуют внесение в текущее остовное дерево некоторой хорды $e$ из $\Gamma(B,D)$ и удаление инцидентной ей дуги. При этом изменяются потоки только по дугам контура $K$, замыкаемого хордой $e$ на дереве $\mathrm{T}$. Фиксируем лучшее решение, переходим к следующему контуру. Модификация структуры сети продолжается до тех пор, пока уже ни на одном контуре текущего дерева невозможно будет получить лучшего решения. Полученное при этом решение будет $1$-оптимальное решение первого ранга.

Назовем $p$-оптимальным такое решение задачи (1) - (3), которое нельзя улучшить внеся в остовное дерево, соответствующее решению, любые $p$ хорд и удалив из него соответствующие им $p$ дуг.

$P$-оптимальное решение обеспечивает глобально-оптимальное решение на множестве симплексов транспортного многогранника (2), (3), которые имеют смежность в промежутке $[1, p]$ к симплексу, вершиной которого является $p$-оптимальное решение.

В настоящее время разработаны алгоритмы генерации и оптимизации подграфов графа возможных соединений вершин сети, которые соответствуют второму рангу оптимальности. Ниже представлены структуры терминальных сетей первого и второго ранга оптимальности.

Чтобы исключить влияние иных факторов – структуру графа и параметров узлов сети (нормативный расход и напор воды, длины ветвей сети), вычислительные эксперименты проводились на графах, имеющих регулярную структуру и одни и те же нормативные данные в узлах и на ветвях. В качестве таких графов были выбраны геометрические графы, каждый элементарный контур которых является квадратом (см. рисунок).

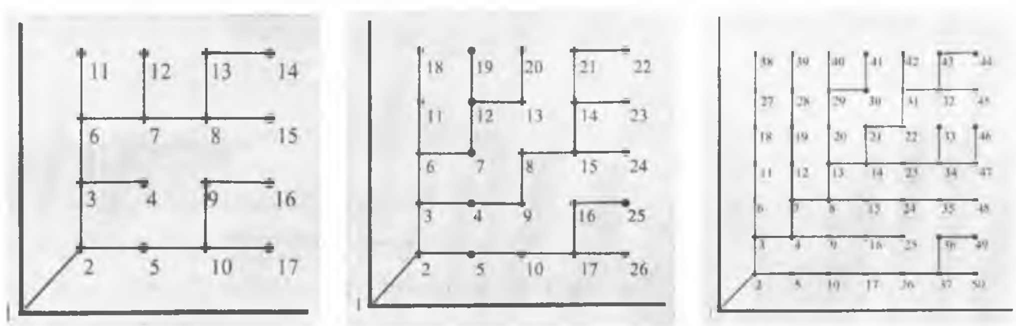
Сети первого ранга оптимальности, как видно из рисунка, не имеют регулярной структуры: их вид существенно меняется в зависимости от размерности графа сети. Это говорит о необходимости построения решений более высокого ранга оптимальности. Сети второго ранга оптимальности уже обладают регулярной структурой.

Дальнейшее увеличение рангов оптимизируемых структур не приводит к существенному уменьшению значения целевой функции.

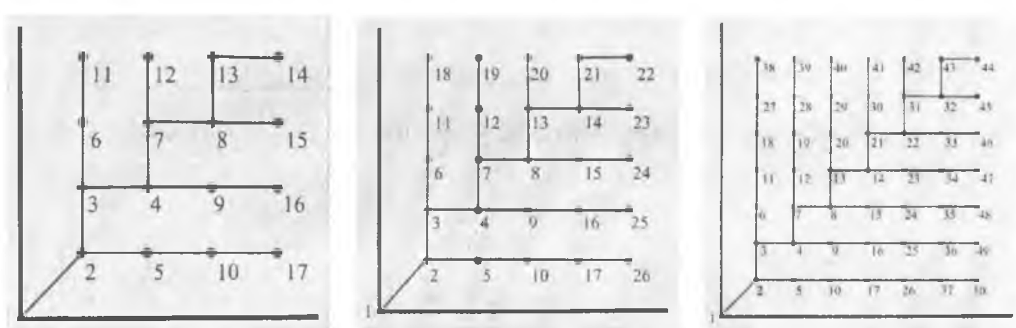
## Заключение

Сформулирован системный принцип опимальности для терминальной сети с одним источником, дано определение $p$-оптимальной сети и проведены вычислительные эксперименты на графах, имеющих регулярную структуру и одни и те же нормативные данные в узлах и на ветвях.

*Структуры сетей 1-го ранга оптимальности*



*Структуры сетей 2-го ранга оптимальности*



## Список литературы
## References

1. Кристофидес Н. 1978. Теория графов. М., Мир.

Kristofides N. 1978. Teoriya grafov [Graph theory]. Moscow, Mir.

2. Прим Р.К. 1961. Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения, Кибернетический сборник, (2). 95-107.

Prim R.K. 1961. Cratchaishie svyazyvayushie seti I nekotorie obobsheniya [Shortest connecting networks and some generalizations]. Cybernetic collection.

3. Булатов В.П., Кассинская Л.И. 1987. Некоторые методы минимизации вогнутой функции на выпуклом многограннике, Методы оптимизации и их приложения. Иркутск, СЭИ СО АН СССР, 151-172.

Bulatov V.P., Kassinskaya L.I. 1987. Nekotorie metody minimizatsii vognutoy functsii na vypuklom mnogogrannike [Some methods for minimizing a concave function on a convex polyhedron]. Optimization methods and their applications. Irkutsk: SEI SB AS USSR.

4. Трубин В.А. 1982. Свойства и методы решения оптимального синтеза сетей. Киев: Общество «Знание» УССР. 23с.

Trubin V.A. 1982. Svoistva I metody resheniya optimalnogo sinteza setey [Properties and methods for solving optimal network synthesis]. Kiev, Society "Knowledge" of the Ukrainian SSR.

5. Туй Х. 1964. Вогнутое программирование при линейных ограничениях, Доклады АН СССР, 159(1): 32-35.

Tui Kh. 1964. Vognutoe programmirovanie pri lineinyh ogranicheniyah [Concave Programming with Linear Constraints]. Reports of the Academy of Sciences of the USSR.

6. Кудаев В.Ч., Багов М.А. 2015. Преобразование терминальной сети в сеть Штейнера. Нальчик, Известия КБНЦ РАН, 6 (68): 31-37.

Kudaev V.Ch., Bagov M.A. 2015. Preobrazovanie terminalnoi seti v set Steynera [Transformation of a terminal network into a Steiner network]. Nalchik. The News of KBSC of RAS.