УДК 511.51

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБОГО РЯДА В ПРОБЛЕМЕ КЛООСТЕРМАНА

RESEARCH OF A SPECIAL ROW IN KLOOSTERMAN'S PROBLEM

Л.Н. Куртова, Н.Н. Мотькина
L.N. Kurtova, N.N. Mot'kina

Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: kurtova@bsu.edu.ru; motkina@bsu.edu.ru

Аннотация
В 1770 году Ж.-Л. Лагранж доказал, что каждое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел. В 1926 году Х. Д. Клоостерман получил асимптотическую формулу для числа представлений положительного целого в виде $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$. В работе приведены результаты изучения главного члена этой асимптотической формулы. Исследование основано на представлении главного члена в виде произведения по простым числам и применении точных формул для сумм Гаусса.

Abstract
In 1770, J.-L. Lagrange proved that each natural number can be represented as the sum of four squares of integers. In 1926, H. D. Kloosterman obtained an asymptotic formula for the number of representations of a positive integer in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$. The report will provide the results of the study the main member of this asymptotic formula. The study is based on the representation of the main member as a product of primes and the use of the exact formulas for Gauss sums.

Ключевые слова: асимптотическая формула, представление главного члена, сумма Гаусса, суммы Клоостермана.
Keywords: asymptotic formula, representation of the main member, Gauss sum, Kloosterman sum.

Введение

В 1770 году Ж.-Л. Лагранж доказал, что каждое натуральное число n представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел. В 1926 году Х. Д. Клоостерман [1] получил асимптотическую формулу для числа решений $r(n)$ уравнения $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$:

$$r(n) = \frac{\pi^2 n}{\sqrt{abcd}} S(n) + O(n^{17/18+\varepsilon}),$$

где

$$S(n) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q),$$

$$A(q) = \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i\frac{nl}{q}} S(q;al;0)S(q;bl;0)S(q;cl;0)S(q;dl;0), \quad A_1 = 1,$$

$$S(q;u;0) = \sum_{l=1}^{q} e^{2\pi i\frac{ul^2}{q}}$$

– сумма Гаусса.

Данная работа посвящена исследованию особого ряда $S(n)$. Поскольку функция $A(q)$ является мультипликативной, тогда

$$S(n) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_{p|q} (1 + A(p) + A(p^2) + \ldots).$$

Нами получены явные формулы для всех таких возможных произведений при нечетном простом p. Исследование основано на представлении главного члена в виде произведения по простым числам и применении точных формул для сумм Гаусса ([2] – [4]).

В данной работе представлены случаи, когда число решений уравнения $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ равно нулю.

Вспомогательные леммы

Лемма 1. Для одномерной суммы Гаусса

$$S(q;l;m) = \sum_{j=1}^{q} e^{2\pi i \frac{lj^2+mj}{q}}$$

справедливы следующие утверждения:

1. Если (q_1; q_2) = 1, то

$$S(q_1q_2;l;m) = S(q_1;lq_2;m)S(q_2;lq_1;m).$$

2. Если (q; $2l$) = 1, то

$$S(q;l;m) = e^{-2\pi i \frac{(4l)^* m^2}{q}} \left(\frac{l}{q}\right) S(q;1;0),$$

где $4l(4l)^* \equiv 1 \pmod q$, $\left(\frac{l}{q}\right)$ — символ Якоби.

3. Если (q; 2) = 1, то

$$S(q;1;0) = \begin{cases} \sqrt{q}, & \text{если } q \equiv 1 \pmod 4, \\ i\sqrt{q}, & \text{если } q \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

4. Если (q; l) = n, то

$$S(q;l;m) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ не делит } m, \\ nS(q/n; l/n; m/n), & \text{если } n \text{ делит } m. \end{cases}$$

Лемма 2. (Свойства суммы Клоостермана) Пусть

$$K(q;u;v) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j,q)=1}}^{q} e^{2\pi i \frac{uj+vj^*}{q}}$$

— сумма Клоостермана. Справедливы следующие утверждения:

1. $K(q;-u;-v) = K(q;u;v)$.

2. Если (w; q) = 1, то $K(q;uw;v) = K(q;u;vw)$.

3. При (q_1; q_2) = 1 имеет место равенство

$$K(q_1q_2;u;v) = K(q_1;u;v_1)S(q_2;u;v_2),$$

где v_1 и v_2 определены соответственно по модулям q_1 и q_2 сравнением

$$v_1 q_2^2 + v_2 q_1^2 \equiv v \pmod{q_1q_2}.$$

4. Пусть α > 1, p – простое число.

Если $u \equiv v \equiv 0 \pmod{p}$, то

$$K(p^{\alpha};u;v) = pK(p^{\alpha-1};\frac{u}{p};\frac{v}{p}).$$

Если $u \neq 0 \pmod{p}$, $v \equiv 0 \pmod{p}$ или $u \equiv 0 \pmod{p}$, $v \neq 0 \pmod{p}$, то

$$K(p^{\alpha};u;v) = 0.$$

5. Пусть $(u;p) = 1$, $\alpha > 1$, p – простое число. Тогда

$$K(p;u;0) = -1;\ K(p^{\alpha};u;0) = 0.$$

6. Пусть $u = p^{\alpha}u_1$, $(u_1;p) = 1$, $\alpha > 1$, $s > 1$, p – простое число. Тогда

$$K(p^{\alpha};u;0) = p^{\alpha-1}(p-1);\ K(p^{\alpha+1};u;0) = -p^{\alpha};\ K(p^{\alpha+s};u;0) = 0.$$

Лемма 3. (Равенства для обобщенной суммы Клоостермана) Пусть p – нечетное простое чило и

$$K_p(p^{\alpha};u;v) = \sum_{\substack{j=1\\(j,p^{\alpha})=1}}^{p^{\alpha}} \left(\frac{j}{p}\right) e^{2\pi i\frac{uj+vj^{*}}{p^{\alpha}}}$$

— обобщенная сумма Клоостермана. Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $\alpha > 1$. Если $u \equiv v \equiv 0 \pmod{p}$, то

$$K_p(p^{\alpha};u;v) = pK_p(p^{\alpha-1};\frac{u}{p};\frac{v}{p}).$$

Если $u \neq 0 \pmod{p}$, $v \equiv 0 \pmod{p}$ или $u \equiv 0 \pmod{p}$, $v \neq 0 \pmod{p}$, то

$$K_p(p^{\alpha};u;v) = 0.$$

2. Пусть $(u;p) = 1$, $\alpha > 1$. Тогда

$$K_p(p;u;0) = S(p;u;0);\ K_p(p^{\alpha};u;0) = 0.$$

3. Пусть $u = p^{\alpha}u_1$, $(u_1;p) = 1$, $\alpha > 1$, $s > 1$. Тогда

$$K_p(p^{\alpha};u;0) = 0;\ K_p(p^{\alpha+1};u;0) = p^{\alpha}S(p;u_1;0);\ K(p^{\alpha+s};u;0) = 0.$$

Исследование особого ряда в проблеме Клоостермана

Рассмотрим случаи, когда число решений уравнения $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ равно нулю. Мы рассматриваем нечетное простое p.

1. Случай, когда три коэффициента делятся на p и n взаимно просто p

Пусть

$$a = p^{\alpha}a_1,\ (a_1;p) = 1,\ b = p^{\beta}b_1,\ (b_1;p) = 1,\ c = p^{\gamma}c_1,\ (c_1;p) = 1,$$
$$\alpha \geq 1,\ \beta \geq 1,\ \gamma \geq 1.$$

Тогда

$$A(p) = \frac{1}{p^4}p^3\left(\frac{d}{p}\right)S(p;1;0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p}\left(\frac{l}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{nl}{p}} = \left(\frac{dn}{p}\right).$$

При $k \geq 1$, поскольку $(n;p) = 1$, из утверждения 5 леммы 2, утверждения 2 леммы 3 получаем, что $A(p^k) = 0$.

Имеем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha}a_1,\alpha\ge 1 \\ (a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta}b_1,\beta\ge 1 \\ (b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma}c_1,\gamma\ge 1 \\ (c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ (n,p)=1}} \left(1+\left(\frac{dn}{p}\right)\right).$$

Данная скобка может равняться нулю, если dn – квадратичный невычет по модулю p.

2. *Случай, когда все коэффициенты делятся на p и n взаимно просто p*

В этом случае уравнение $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ не имеет решений.

3. *Случай, когда два коэффициента и n делятся на p*

Положим

$$a = p^{\alpha}a_1, (a_1; p) = 1, \; b = p^{\beta}b_1, (b_1; p) = 1, \; n = p^{\eta}n_1, (n_1; p) = 1,$$

$$\alpha \ge 1, \; \beta \ge 1, \; \eta \ge 1.$$

1. Пусть $\eta < \alpha \le \beta$. Тогда при $1 \le k \le \eta + 1$

$$A(p^k) = \frac{1}{p^{4k}} p^{2k} \left(\frac{cd}{p^k}\right) S^2(p^k;1;0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^k)=1}}^{p^k} e^{-2\pi i \frac{nl}{p^k}}.$$

Имеем

$$A(p^k) = \begin{cases} \left(\frac{-cd}{p^k}\right)\frac{p-1}{p}, \text{если} 1 \le k \le \eta, \\ -\left(\frac{-cd}{p^{\eta+1}}\right)\frac{1}{p}, \text{если} k = \eta + 1. \end{cases}$$

При $k > \eta + 1$ в $A(p^k)$ будет входить либо сумма Клоостермана, либо обобщенная сумма Клоостермана, которые будут равны нулю в силу утверждения 6 из леммы 2 и утверждения 3 из леммы 3.

Получаем произведение:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha}a_1,\alpha\ge 1 \\ (a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta}b_1,\beta\ge 1 \\ (b_1,p)=1 \\ (c,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta}n_1,\eta\ge 1 \\ (n_1,p)=1 \\ 1\le\eta<\alpha\le\beta}} \left(1+\frac{p-1}{p}\left(\left(\frac{-cd}{p}\right)+\ldots+\left(\frac{-cd}{p^{\eta}}\right)\right)-\left(\frac{-cd}{p^{\eta+1}}\right)\frac{1}{p}\right).$$

Если ($-cd$) является квадратичным невычетом по модулю p, то для нечетного η рассматриваемая скобка будет равна нулю.

2. Пусть $\eta = \alpha < \beta$. Тогда при $1 \le k \le \eta$

$$A(p^k) = \left(\frac{-cd}{p^k}\right)\frac{p-1}{p}.$$

При $k = \eta + 1$ имеем:

$$A(p^{\eta+1}) = \frac{1}{p^{4(\eta+1)}} p^{2\eta+1} \left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{cd}{p^{\eta+1}}\right) S(p;1;0) S^2(p^{\eta+1};1;0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\eta+1})=1}}^{p^{\eta+1}} \left(\frac{l}{p}\right) e^{-2\pi i \frac{nl}{p^{\eta+1}}} =$$

$$= \left(\frac{a_1 n_1}{p}\right)\left(\frac{-cd}{p^{\eta+1}}\right)\frac{1}{p}.$$

При $k > \eta + 1$ суммы Клоостермана будут равны нулю в силу утверждения 6 из леммы 2 и утверждения 3 из леммы 3.

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha}a_1, \alpha\geq 1 \\ (a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta}b_1, \beta\geq 1 \\ (b_1,p)=1 \\ (c,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta}n_1, \eta\geq 1 \\ (n_1,p)=1 \\ 1\leq \eta=\alpha<\beta}} \left(1 + \frac{p-1}{p}\left(\left(\frac{-cd}{p}\right) + \ldots + \left(\frac{-cd}{p^{\eta}}\right)\right) + \left(\frac{a_1 n_1}{p}\right)\left(\frac{-cd}{p^{\eta+1}}\right)\frac{1}{p}\right).$$

Данная скобка равна нулю, если η – нечетное, $a_1 n_1$ и $(-cd)$ – квадратичные невычеты по модулю p.

3. Пусть $\alpha < \eta < \beta$. Имеем

$$A(p^k) = \begin{cases} \left(\frac{-cd}{p^k}\right)\frac{p-1}{p}, \text{если} 1 \leq k \leq \alpha, \\ \left(\frac{-cd}{p^k}\right)\frac{p-1}{p^{(k-\alpha)/2+1}}, \text{если} \alpha < k \leq \eta \text{ и } k - \alpha \text{ - четное}, \\ 0, \text{ если} \alpha < k \leq \eta \text{ и } k - \alpha \text{ - нечетное}. \end{cases}$$

$$A(p^{\eta+1}) = \frac{1}{p^{4(\eta+1)}} p^{\alpha+\eta+1} \left(\frac{a_1}{p^{\eta+1-\alpha}}\right)\left(\frac{cd}{p^{\eta+1}}\right) S(p^{\eta+1-\alpha};1;0) S^2(p^{\eta+1};1;0) \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^{\eta+1})=1}}^{p^{\eta+1}} \left(\frac{l}{p^{\eta+1-\alpha}}\right) e^{-2\pi i \frac{nl}{p^{\eta+1}}} =$$

$$= \begin{cases} -\left(\frac{-cd}{p^{\eta+1}}\right)\frac{1}{p^{(\eta+3-\alpha)/2}}, \text{если} \eta - \alpha \text{ - нечетное}, \\ \left(\frac{a_1 n_1}{p}\right)\left(\frac{-cd}{p^{\eta+1}}\right)\frac{1}{p^{(\eta+2-\alpha)/2}}, \text{если} \eta - \alpha \text{ - четное}. \end{cases}$$

Пусть $k > \eta + 1$. Тогда суммы Клоостермана будут равны нулю в силу утверждения 6 из леммы 2 и утверждения 3 из леммы 3.

Если α и η – нечетные, получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha}a_1,\alpha\ge1\\ (a_1,p)=1\\ b=p^{\beta}b_1,\beta\ge1\\ (b_1,p)=1\\ (c,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta}n_1,\eta\ge1\\ (n_1,p)=1\\ 1\le\alpha<\eta<\beta}} \left(1+\frac{p-1}{p}\left(\left(\frac{-cd}{p}\right)+\left(\frac{-cd}{p^2}\right)+\ldots+\left(\frac{-cd}{p^{\alpha}}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{p-1}{p}\left(\left(\frac{-cd}{p^{\alpha+2}}\right)\frac{1}{p}+\left(\frac{-cd}{p^{\alpha+4}}\right)\frac{1}{p^2}+\ldots+\left(\frac{-cd}{p^{\eta}}\right)\frac{1}{p^{(\eta-\alpha)/2}}\right)+\left(\frac{a_1n_1}{p}\right)\left(\frac{-cd}{p^{\eta+1}}\right)\frac{1}{p^{(\eta-\alpha+2)/2}}\right).$$

Данная скобка равна нулю, если a_1n_1 и $(-cd)$ – квадратичные невычеты по модулю p.

4. Случай, когда три коэффициента и n делятся на p

Пусть

$$a=p^{\alpha}a_1,\,(a_1;p)=1,\; b=p^{\beta}b_1,\,(b_1;p)=1,\; c=p^{\gamma}c_1,\,(c_1;p)=1,\; n=p^{\eta}n_1,\,(n_1;p)=1,$$

$$\alpha\ge1,\ \beta\ge1,\ \gamma\ge1,\ \eta\ge1.$$

1. Рассмотрим случай, когда $\eta<\alpha\le\beta\le\gamma$. Получим

$$A(p^k)=\frac{1}{p^{4k}}p^{3k}\left(\frac{d}{p^k}\right)S(p^k;1;0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^k)=1}}^{p^k}\left(\frac{l}{p^k}\right)e^{-2\pi i\frac{nl}{p^k}}=$$

$$=\begin{cases} p^{k/2-1}(p-1), \text{если } 1\le k\le\eta \text{ и } k \text{ - четное},\\ 0, \text{если } 1\le k\le\eta \text{ и } k \text{ - нечетное},\\ -p^{(\eta-1)/2}, \text{ если } k=\eta+1 \text{ и } \eta \text{ - нечетное},\\ \left(\frac{dn_1}{p}\right)p^{\eta/2}, \text{ если } k=\eta+1 \text{ и } \eta \text{ - четное},\\ 0, \text{ если } k>\eta+1.\end{cases}$$

Пусть η – четное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha}a_1,\alpha\ge1\\ (a_1,p)=1\\ b=p^{\beta}b_1,\beta\ge1\\ (b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma}c_1,\gamma\ge1\\ (c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta}n_1,\eta\ge1\\ (n_1,p)=1\\ 1\le\eta<\alpha\le\beta\le\gamma}} p^{\eta/2}\left(1+\left(\frac{dn_1}{p}\right)\right).$$

Данная скобка равна нулю, если dn_1 является квадратичным невычетом по модулю p.

Пусть η – нечетное. Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha}a_1,\alpha\ge 1 \\ (a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta}b_1,\beta\ge 1 \\ (b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma}c_1,\gamma\ge 1 \\ (c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta}n_1,\eta\ge 1 \\ (n_1,p)=1 \\ 1\le\eta<\alpha\le\beta\le\gamma}} \left(1+(p-1)(1+p+p^2+\ldots+p^{(\eta-1)/2-1})-p^{(\eta-1)/2}\right)=0.$$

2. Рассмотрим случай, когда $\eta=\alpha<\beta\le\gamma$. Если $1\le k\le\eta$, то $A(p^k)=0$ для нечетного k, и $A(p^k)=p^{k/2-1}(p-1)$ для четного k.

$$A(p^{\eta+1})=\begin{cases}\left(\dfrac{a_1n_1}{p}\right)p^{(\eta-1)/2}, & \text{если } \eta \text{ - нечетное,}\\ -\left(\dfrac{a_1d}{p}\right)p^{\eta/2-1}, & \text{если } \eta \text{ - четное.}\end{cases}$$

При $k>\eta+1$ имеем $A(p^k)=0$.

Если η – нечетное, получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p \\ a=p^{\alpha}a_1,\alpha\ge 1 \\ (a_1,p)=1 \\ b=p^{\beta}b_1,\beta\ge 1 \\ (b_1,p)=1 \\ c=p^{\gamma}c_1,\gamma\ge 1 \\ (c_1,p)=1 \\ (d,p)=1 \\ n=p^{\eta}n_1,\eta\ge 1 \\ (n_1,p)=1 \\ 1\le\eta=\alpha\le\beta\le\gamma}} \left(\left(1+\left(\frac{a_1n_1}{p}\right)\right)p^{(\eta-1)/2}\right).$$

Данная скобка равна нулю, если a_1n_1 является квадратичным невычетом по модулю p.

3. Рассмотрим случай, когда $\alpha<\eta<\beta\le\gamma$. Если $1\le k\le\alpha$, то $A(p^k)=0$ для нечетного k, и $A(p^k)=p^{k/2-1}(p-1)$ для четного k. Если $\alpha<k\le\eta$, то $A(p^k)=0$ для нечетного α, и для четного α имеем:

$$A(p^k)=p^{\alpha/2-1}(p-1)\left(\frac{-a_1d}{p^k}\right).$$

Получим

$$A(p^{\eta+1})=\begin{cases}\left(\dfrac{a_1}{p^{\eta}}\right)\left(\dfrac{d}{p^{\eta+1}}\right)\left(\dfrac{n_1}{p}\right)p^{(\alpha-1)/2}, & \text{если } \alpha \text{ - нечетное,}\\ -\left(\dfrac{-a_1d}{p^{\eta+1}}\right)p^{\alpha/2-1}, & \text{если } \alpha \text{ - четное.}\end{cases}$$

При $k>\eta+1$ $A(p^k)=0$.

Если α – четное, получаем множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha}a_1,\alpha\ge 1\\ (a_1,p)=1\\ b=p^{\beta}b_1,\beta\ge 1\\ (b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma}c_1,\gamma\ge 1\\ (c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta}n_1,\eta\ge 1\\ (n_1,p)=1\\ 1\le\alpha<\eta<\beta\le\gamma}}\left(p^{\alpha/2-1}\left(p+(p-1)\left(\left(\frac{-a_1d}{p^{\alpha+1}}\right)+\left(\frac{-a_1d}{p^{\alpha+2}}\right)+\ldots+\left(\frac{-a_1d}{p^{\eta}}\right)\right)-\left(\frac{-a_1d}{p^{\eta+1}}\right)\right)\right).$$

Если a_1d является квадратичным невычетом по модулю p и η – нечетное, то рассматриваемая скобка равна нулю.

Если α – нечетное, получаем множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha}a_1,\alpha\ge 1\\ (a_1,p)=1\\ b=p^{\beta}b_1,\beta\ge 1\\ (b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma}c_1,\gamma\ge 1\\ (c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta}n_1,\eta\ge 1\\ (n_1,p)=1\\ 1\le\alpha<\eta<\beta\le\gamma}}\left(p^{(\alpha-1)/2}\left(1+\left(\frac{a_1}{p^{\eta}}\right)\left(\frac{d}{p^{\eta+1}}\right)\left(\frac{n_1}{p}\right)\right)\right).$$

Данная скобка равна нулю, если

$$\left(\frac{a_1}{p^{\eta}}\right)\left(\frac{d}{p^{\eta+1}}\right)\left(\frac{n_1}{p}\right)=-1.$$

4. Рассмотрим случай, когда $\alpha<\eta=\beta<\gamma$. Если $1\le k\le\alpha$, то $A(p^k)=0$ для нечетного k, и $A(p^k)=p^{k/2-1}(p-1)$ для четного k. Если $\alpha<k\le\eta$, то $A(p^k)=0$ для нечетного α, и для четного α имеем:

$$A(p^k)=p^{\alpha/2-1}(p-1)\left(\frac{-a_1d}{p^k}\right).$$

$$A(p^{\eta+1})=\begin{cases}-\left(\frac{a_1}{p^{\eta}}\right)\left(\frac{-b_1}{p}\right)\left(\frac{d}{p^{\eta+1}}\right)p^{(\alpha-3)/2}, & \text{если } \alpha \text{ - нечетное,}\\ \left(\frac{-a_1d}{p^{\eta+1}}\right)\left(\frac{b_1n_1}{p}\right)p^{\alpha/2-1}, & \text{если} \alpha \text{ - четное,.}\end{cases}$$

При $k>\eta+1$ $A(p^k)=0$.

Если α – четное, получаем множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha}a_1,\alpha\ge 1\\ (a_1,p)=1\\ b=p^{\beta}b_1,\beta\ge 1\\ (b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma}c_1,\gamma\ge 1\\ (c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta}n_1,\eta\ge 1\\ (n_1,p)=1\\ 1\le\alpha<\eta=\beta<\gamma}}\left(p^{\alpha/2-1}\left(p+(p-1)\left(\left(\frac{-a_1d}{p^{\alpha+1}}\right)+\left(\frac{-a_1d}{p^{\alpha+2}}\right)+\ldots+\left(\frac{-a_1d}{p^{\eta}}\right)\right)+\left(\frac{-a_1d}{p^{\eta+1}}\right)\left(\frac{b_1n_1}{p}\right)\right)\right).$$

Данная скобка равна нулю, если η – нечетное, $(-a_1 d)$ - квадратичный невычет и $b_1 n_1$ - квадратичный вычет по модулю p.

5. Рассмотрим случай, когда $\alpha \le \beta < \eta < \gamma$. Если $1 \le k \le \alpha$, то $A(p^k) = 0$ для нечетного k, и $A(p^k) = p^{k/2-1}(p-1)$ для четного k. Если $\alpha < k \le \beta$, то $A(p^k) = 0$ для нечетного α, и для четного α:

$$A(p^k) = p^{\alpha/2-1}(p-1)\left(\frac{-a_1 d}{p^k}\right).$$

Если $\beta < k \le \eta$, то

$$A(p^k) = \begin{cases} \left(\dfrac{-a_1 b_1}{p}\right)\dfrac{p-1}{p^{(k-\alpha-\beta)/2+1}}, \text{ если } k \text{ - четное}, \alpha \text{ и } \beta \text{ - нечетные}, \\ \left(\dfrac{-b_1 d}{p}\right)\dfrac{p-1}{p^{(k-\alpha-\beta)/2+1}}, \text{ если } k \text{ и } \alpha \text{ - нечетные}, \beta \text{ - четное}, \\ \left(\dfrac{-a_1 d}{p}\right)\dfrac{p-1}{p^{(k-\alpha-\beta)/2+1}}, \text{ если } k \text{ и } \beta \text{ - нечетные}, \alpha \text{ - четное}, \\ \dfrac{p-1}{p^{(k-\alpha-\beta)/2+1}}, \text{ если } k, \alpha \text{ и } \beta \text{ - четные}, \\ 0, \text{ если } 3k-\alpha-\beta \text{ - нечетное}. \end{cases}$$

$$A(p^{\eta+1}) = \begin{cases} -\left(\dfrac{-a_1 b_1}{p}\right)\dfrac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+3)/2}}, \text{ если } \eta, \alpha \text{ и } \beta \text{ - нечетные}, \\ -\left(\dfrac{-a_1 d}{p}\right)\dfrac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+3)/2}}, \text{ если } \eta \text{ и } \alpha \text{ - четные}, \beta \text{ - нечетное}, \\ -\left(\dfrac{-b_1 d}{p}\right)\dfrac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+3)/2}}, \text{ если } \eta \text{ и } \beta \text{ - четные}, \alpha \text{ - нечетное}, \\ -\dfrac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+3)/2}}, \text{ если } \alpha \text{ и } \beta \text{ - четные}, \eta \text{ - нечетное}, \\ \left(\dfrac{-a_1 b_1 d n_1}{p}\right)\dfrac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+2)/2}}, \text{ если } \eta, \alpha \text{ и } \beta \text{ - четные}, \\ \left(\dfrac{d n_1}{p}\right)\dfrac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+2)/2}}, \text{ если } \alpha \text{ и } \beta \text{ - нечетные}, \eta \text{ - четное}, \\ \left(\dfrac{a_1 n_1}{p}\right)\dfrac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+2)/2}}, \text{ если } \eta \text{ и } \alpha \text{ - нечетные}, \beta \text{ - четное}, \\ \left(\dfrac{b_1 n_1}{p}\right)\dfrac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+2)/2}}, \text{ если } \eta \text{ и } \beta \text{ - нечетные}, \alpha \text{ - четное} \end{cases}$$

Пусть $k > \eta+1$. Тогда суммы Клоостермана будут равны нулю в силу утверждения 6 из леммы 2 и 3 из леммы 3.

Если η – четное, α и β – нечетные, получим:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha}a_1,\alpha\ge1\\ (a_1,p)=1\\ b=p^{\beta}b_1,\beta\ge1\\ (b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma}c_1,\gamma\ge1\\ (c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta}n_1,\eta\ge1\\ (n_1,p)=1\\ 1\le\alpha\le\beta<\eta<\gamma}}\left(p^{(\alpha-1)/2}\left(1+\left(\frac{-a_1b_1}{p}\right)\right)-\frac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+2)/2}}\left(\left(\frac{-a_1b_1}{p}\right)-\left(\frac{-dn_1}{p}\right)\right)\right).$$

Данная скобка равна нулю, если ($-a_1b_1$) и dn_1 – квадратичные невычеты по модулю p.

Если α – четное, η и β – нечетные, получим:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha}a_1,\alpha\ge1\\ (a_1,p)=1\\ b=p^{\beta}b_1,\beta\ge1\\ (b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma}c_1,\gamma\ge1\\ (c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta}n_1,\eta\ge1\\ (n_1,p)=1\\ 1\le\alpha\le\beta<\eta<\gamma}}\left(p^{\alpha/2-1}\left(p+(p-1)\left(\left(\frac{-a_1d}{p^{\alpha+1}}\right)+\ldots+\left(\frac{-a_1d}{p^{\beta}}\right)\right)+\left(\frac{-a_1d}{p}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+2)/2}}\left(\left(\frac{b_1n_1}{p}\right)-\left(\frac{-a_1d}{p}\right)\right)\right).$$

Данная скобка равна нулю, если ($-a_1d$) и b_1n_1 – квадратичные невычеты по модулю p.

Если β – четное, η и α – нечетные, получим

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha}a_1,\alpha\ge1\\ (a_1,p)=1\\ b=p^{\beta}b_1,\beta\ge1\\ (b_1,p)=1\\ c=p^{\gamma}c_1,\gamma\ge1\\ (c_1,p)=1\\ (d,p)=1\\ n=p^{\eta}n_1,\eta\ge1\\ (n_1,p)=1\\ 1\le\alpha\le\beta<\eta<\gamma}}\left(p^{(\alpha-1)/2}\left(1+\left(\frac{-b_1d}{p}\right)\right)+\frac{1}{p^{(\eta-\alpha-\beta+2)/2}}\left(\left(\frac{a_1n_1}{p}\right)-\left(\frac{-b_1d}{p}\right)\right)\right).$$

Данная скобка равна нулю, если ($-b_1d$) и a_1n_1 – квадратичные невычеты по модулю p.

Заключение

В работе [1] Х.Д. Клоостерман рассмотрел обобщение задачи Лагранжа. Он получил асимптотическую формулу для количества представлений числа n диагональной формой с четырьмя целыми переменными. Клоостерман привел примеры случаев, когда число представлений равно нулю. В работе [1] случаи для простого p, равного двум, рассмотрены более подробно, чем для нечетного простого p. Представление главного члена в виде произведения по простым числам и применение точных формул для сумм Гаусса позволило нам дополнить случаи [1] для нечетного простого p, при которых уравнение $n=ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ не имеет решений.

Список литературы
References

1. Kloosterman H. D. 1926. On the representation of number in the form $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$. Acta mathematica. V. 49: 407–464.

2. Малышев А. В. 1962. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами . Тр. МИАН СССР. 65: 3–212.

Malyshev A. V. 1962. On the representation of integers by positive quadratic forms. Trudy Mat. Inst. Steklov, 65. Moscow: Acad. Sci. USSR: 3-212.

3. Estermann T. A. 1962. New application of the Hardy–Littlewood–Kloosterman method. Proc. London Math. Soc. 12: 425–444.

4. Hua L.K. 1982. Introduction to number theory. Springer.