УДК 004.031.4;025.4.036

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В ДЕФОКУСИРУЮЩЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ДЕФЕКТОМ С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ

LOCALIZED STATES IN A DEFOCUSING NONLINEAR MEDIUM WITH A DEFECT WITH AN INTERNAL STRUCTURE

С.Е. Савотченко
S.E. Savotchenko

Белгородский институт развития образования,
Россия, 308007, Белгород, ул. Студенческая, 14

Belgorod Institute of Education Development,
14 Studencheskaya St, Belgorod, 308007, Russia

E-mail: savotchenkose@mail.ru

Аннотация
Изучены локализованные состояния в нелинейной дефокусирующей среде вблизи дефекта, обладающего внутренней структурой, который моделируется модифицированным дельта-функционным потенциалом. Задача сводится к решению нелинейного уравнения Шредингера граничными условиями нового вида. Показано, что возможно существование нелинейных локализованных состояний, порожденных связанными кинками. Структура и форма локализованных состояний определяется параметрами ангармонизма взаимодействия в среде и интенсивностью взаимодействия возбуждений с дефектом. Проанализированы низкоэнергетические нелинейные локализованные возбуждения и определены условия их существования.

Abstract
Localized states in a nonlinear defocusing medium near a defect with an internal structure that is modeled by a modified delta-function potential are studied. The problem reduces to solving the nonlinear Schrödinger equation with boundary conditions of a new kind It is shown that the existence of nonlinear localized states generated by bound kinks is possible. The structure and form of the localized states is determined by the parameters of the anharmonicity of the interaction in the medium and the intensity of the interaction of the excitations with the defect. Low-energy nonlinear localized excitations are analyzed and the conditions for their existence are defined.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, дефект, солитон, локализованные состояния.
Keywords: Nonlinear Schrödinger equation, defect, soliton, localized states.

Введение

Важное место в квантовой оптике и электронике занимают вопросы локализации возбуждений вблизи точечных или плоских дефектов, в слоистых структурах. В частности, явления локализации и рассеяния электромагнитных волн вблизи границ раздела линейных [1] и нелинейных сред рассматривались в [2-5], в близи границы раздела нелинейных слоев в [6].

Во многих ситуациях возникает необходимость изучения особенностей локализации возбуждений обусловленных характером взаимодействия этих возбуждений с дефектами, причем как линейных, так и нелинейных. Как правило, для теоретического описания таких явлений привлекались модели, в которых граница раздела как плоский дефект описывался двумя способами:

1) требования непрерывности поля и его нормальной составляющей в плоскости дефекта [1];

2) короткодействующим потенциалом [3-6], который для одномерных моделей представляется в виде:

$$U(x) = U_0\delta(x), \tag{1}$$

где δ-функция Дирака, U_0 – интенсивность взаимодействия дефекта с возбуждением («мощность» дефекта), такая, что при $U_0 > 0$ возбуждение отталкивается от дефекта, а при $U_0 < 0$ – притягивается.

В [7] было показано, что учет активного взаимодействия волны с границей раздела сред приводит к возможности существования нелинейных интерфейсных волн в более широком диапазоне значений параметров среды, чем при пассивном взаимодействии. В этой работе, а также в работах [8-12] рассматривались вопросы существования нелинейных возбуждений в средах при наличии пространственной дисперсии. В [10-12] изучались особенности распространения нелинейных локализованных возбуждений и волн вдоль молекулярных цепочек. В [13] рассмотрены особенности взаимодействия локализованных состояний вблизи границы раздела нелинейных сред, и показано, что возможно существование нелинейных локализованных состояний, несимметричных относительно границы раздела сред.

В [14] была предложена модель точечного дефекта, обладающего внутренней структурой, описываемого модифицированным потенциалом, который учитывает влияние дефекта посредством не только ближайших соседей в решетке, но и вторых соседей в коротковолновом приближении, то есть при переходе от дискретной модели среды к континуальному описанию. Были рассчитаны коэффициенты прохождения и отражения линейных волн в рамках такой модели, получен спектр квазилокальных состояний и соответствующая добавка к плотности состояний. Показано, что внутренняя структура дефекта приводит к возможности полного прохождения частицы. Установлено, что существуют два уровня энергии, отвечающие локализованным близи дефекта состояниям.

В [15] для линейного уравнения Шредингера с пространственной дисперсией при наличии упомянутого выше модифицированного потенциала была получена новая система граничных условий. Показан корректный предельный переход к случаю среды без дисперсии и короткодействующим потенциалом. Установлено, что при наличии точечного дефекта в среде с дисперсией при учете дальнодействующих сил межатомного взаимодействия возможно существование локализованных состояний двух видов симметрии с двумя типами затухания (монотонного – обычные и осциллирующие – обобщенные), а также квазилокальных состояний двух видов симметрии.

В [16] были полученные нелинейные локализованные состояния, описываемые исчезающими на бесконечности солитонными решениями НУШ с модифицированным потенциалом.

В данной работе будут получены новые решения НУШ с модифицированным потенциалом.

Формулировка модели и основные уравнения

В [14, 15] изучалось резонансное рассеяние частиц, имеющих параболический закон дисперсии, на двугорбом потенциале, который можно рассматривать как потенциальный кратер, обладающий квазистационарным уровнем энергии. В предельном случае при бесконечном увеличении глубины кратер может быть описан выражением, содержащим вторую производную дельта-функции Дирака. Подобная модель может описывать взаимодействие волны с точечным дефектом в среде с пространственной дисперсией при учете дальнодействующих сил межатомного взаимодействия, на основе уравнения Шредингера с модифицированным потенциалом:

$$U(x) = U_0\delta(x) + V_0\delta''(x), \tag{2}$$

где V_0 – второй параметр дефекта, характеризующий интенсивность взаимодействия возбуждения с дефектом за счет его внутренней структуры.

Рассмотрим теперь взаимодействие нелинейных возбуждений, локализующихся вблизи дефектом с внутренней структурой на основе одномерного нелинейного уравнения Шредингера:

$$i\psi'_t = -\frac{1}{2m}\psi''_{xx} + g(x)|\psi|^2\psi + U(x)\psi, \tag{3}$$

где m – эффективная масса возбуждения, потенциал описывается выражением (2) и параметры нелинейности по разные стороны от дефекта:

$$g(x) = \begin{cases} g_1, & x < 0; \\ g_2, & x < 0. \end{cases}$$

Если рассматривать только стационарные состояния с энергией E, то подстановка волновой функции в виде $\psi(x,t) = \psi(x)\exp(-iEt)$ в (3) приводит к стационарному НУШ:

$$E\psi = -\frac{1}{2m}\psi''_{xx} + g(x)|\psi|^2\psi + U(x)\psi. \tag{4}$$

НУШ (4) с потенциалом (2) сводится к решению НУШ без потенциала:

$$E\psi = -\frac{1}{2m}\psi''_{xx} + g(x)|\psi|^2\psi, \tag{5}$$

к которому добавляются краевые условия сопряжения на дефекте в точке x=0. Первое краевое условие соответствует требованию непрерывности волновой функции в точке расположения дефекта:

$$\psi(-0) = \psi(+0) = \psi(0). \tag{6}$$

Если непосредственно проинтегрировать уравнение (5) по x на малом интервале $[-\varepsilon; \varepsilon]$ и устремить ε к нулю (то есть проинтегрировать вблизи точки $x = 0$), то с учетом того, что производные волновой функции в точке $x = 0$ не являются непрерывными, получится условие:

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = m\{2U_0\psi(0) + V_0[\psi''(+0) + \psi''(-0)]\}. \tag{7}$$

Результаты и обсуждение

Как известно, типы решений НУШ определяются знаком нелинейности. В отсутствие дефектов (когда $U(x)\equiv0$) в среде распространяются свободные солитоны. При отрицательной и всюду постоянной нелинейности g в этом случае существует одно решение НУШ вида $\psi(x) = A/\mathrm{ch}q(x-x_0)$, $A^2 = q^2/m|g|$, $q^2 = -2mE$, E<0. При положительной и всюду постоянной нелинейности g существуют два решения НУШ: 1) при E<0 $\psi(x) = A/\mathrm{sh}q(x-x_0)$, $A^2 = q^2/mg$, $q^2 = -2mE$, 2) при E>0 $\psi(x) = A\mathrm{th}q(x-x_0)$, $A^2 = q^2/mg$, $q^2 = mE$. В присутствие простого точечного дефекта локализованные состояния, порожденные первым и вторым решениями, были рассмотрены в [5]. Для случая дефекта с внутренней структурой локализованные состояния, порожденные первым и вторым решениями, были рассмотрены в [16]. Такие типы решений объединяет требование исчезновения возбуждения на бесконечности, то есть волновая функция должна удовлетворять условию на бесконечности: $|\psi| \to 0$ при $x \to \infty$. Решение третьего типа, называемое кинком, такому условию не удовлетворяет, однако часто применяется для описания различных физических явлений. Поэтому в данной работе будут изучены особенности локализации состояний, порождаемых кинками НУШ.

Для случая дефокусирующей среды нелинейность $g(x)>0$, поэтому далее $g_{1,2}>0$. Если рассматривать возбуждение с энергией $E>0$, то оно описывается решением НУШ (5) в виде связанных кинков для рассматриваемого знака нелинейности:

$$\psi(x)=\begin{cases} A_1 \mathrm{th} q(x-x_1),\ x<0 \\ A_2 \mathrm{th} q(x-x_2),\ x>0 \end{cases} \tag{8}$$

Подстановка волновой функции (8) в НУШ (5) дает выражения для амплитуд:

$$A_{1,2}^2 = q^2/mg_{1,2}, \tag{9}$$

и волновое число:

$$q^2 = mE. \tag{10}$$

Параметры x_i (i=1,2) определяют положения максимумов возбуждений по разные стороны от дефекта. Как и энергия E, они определяются из краевых условий.

Подстановка (8) в краевые условия (6) и (7) приводит к соотношениям, связывающим параметры среды, дефекта и возбуждения:

$$\mathrm{th} qx_2 = \eta\, \mathrm{th} qx_1, \tag{11}$$

$$q\{\mathrm{csch} 2qx_2 - \mathrm{csch} 2qx_1\} = m\{V_0 q^2 (2-\mathrm{th}^2 qx_1 - \mathrm{th}^2 qx_2) - U_0\}, \tag{12}$$

где введено обозначение $\eta=(g_2/g_1)^{1/2}$.

Таким образом, из соотношения (12) находится волновое число, которое позволяет получить энергию как функция параметров $E=E(m, U_0, V_0, \eta, x_1)$ по формуле $E=q^2/m$, а соотношение (11) тогда определяет параметр x_2. Поэтому, решение (11) является однопараметрическим локализованным состоянием с одним свободным параметром, в качестве которого удобно было выбрать x_1.

Действительно, используя (11), из уравнения (12) можно исключить параметр x_2, в результате чего (12) примет вид:

$$q\{(1-\eta)\mathrm{th} qx_1 + (1/\eta - 1)\mathrm{cth} qx_1\} = m\{V_0 q^2[2-(1+\eta^2)\mathrm{th}^2 qx_1] - U_0\}. \tag{13}$$

Можно рассмотреть такое состояние, в котором параметры волновой функции (8) связаны условием: $x_1 = x_2 = x_0$. Такая ситуация реализуется в среде, в которой везде одинаковый ангармонизм: $g_1 = g_2$, то есть когда η=1, что следует из (11). В этом случае соотношение (12) примет вид:

$$2V_0 q^2 = U_0 \mathrm{ch}^2 qx_0, \tag{14}$$

Для малых энергий локализации возбуждений, когда $qx_0 \ll 1$, из (14) получается волновое число $q^2=U_0/2V_0$. Тогда энергия состояния определяется в явном виде:

$$E=U_0/2V_0 m. \tag{15}$$

Так как рассматриваемое возбуждение имеет энергию $E>0$, то из (15) следует, что для существования такого состояние должно выполняться одни из двух требований: 1) $U_0 > 0$ и $V_0 > 0$ или 2) $U_0 < 0$ и $V_0 < 0$. Другими словами, оба параметра интенсивности взаимодействия дефекта с возбуждением должны иметь одинаковые знаки.

Если рассматривать локализованные состояния, для которых положения максимумов возбуждений расположены симметрично относительно дефекта, то есть когда $x_2 = -x_1 = -x_0$, то соотношение (12) примет вид:

$$2q/\mathrm{sh} 2qx_0 = m\{2V_0 q^2/\mathrm{ch}^2 qx_0 - U_0\}. \tag{16}$$

Для малых энергий локализации возбуждений, когда $qx_0 \ll 1$, из (16) получается энергия в явном виде:

$$E = (U_0/2V_0 + 1/2mV_0 x_0)/m. \tag{17}$$

Так как рассматриваемое возбуждение имеет энергию $E>0$, то из (17) следует, что для существования такого состояние должно выполняться одни из двух требований: 1) $V_0 > 0$ и $U_0 > -1/mx_0$ или 2) $V_0 < 0$ и $U_0 < -1/mx_0$.

Видно, что для такого вида состояний параметра интенсивности взаимодействия дефекта с возбуждением могут иметь разные знаки, что, в свою очередь определяется знаком положения максимума возбуждения x_0. Следует также отметить, что низкоэнергетические состояния симметричного вида существуют в более широком энергетическом диапазоне, чем состояния несимметричного вида.

Если рассматривать несимметричные локализованные состояния, то в случае малых энергий локализации возбуждений, когда $qx_i \ll 1$, из (11) следует связь положений максимумов $x_2=\eta x_1$. С учетом этого из (12) в данном случае можно получить энергию в явном виде:

$$E = \{U_0 + (1-\eta)/2mx_1\}/2mV_0. \tag{18}$$

Из (18) при $\eta=1$ получается (15), а при $\eta=-1$ (17).

Из (13) при $V_0 = 0$ для простого дефекта, не обладающего своими степенями свободы, следует выражение:

$$q\{\operatorname{csch}2qx_1 - \operatorname{csch}2qx_2\} = mU_0. \tag{19}$$

В этом случае не реализуется состояние, в котором $x_1 = x_2$, а может существовать состояние с симметрично расположенными относительно дефекта максимумами возбуждений при $x_2 = -x_1 = -x_0$. Энергия такого состояния определяется из соотношения:

$$2q\operatorname{csch}2qx_0 = mU_0. \tag{20}$$

В предельном случае при $qx_0 \ll 1$ из (20) можно получить энергию:

$$E = 3(1/mU_0x_0 - 1)/2mx_0^2. \tag{21}$$

Следовательно, учет внутренней структуры дефекта приводит к видоизменению формы возможных нелинейных локализованных состояний и области их существования.

Заключение

В данной работе показано, что в нелинейной дефокусирующей среде вблизи дефекта, обладающего внутренней структурой, возможно существование локализованных состояний, порожденных связанными кинками НУШ. Вследствие взаимодействия возбуждений с дефектом кинки НУШ не являются независимыми.

Математическая формулировка модели для описания дефекта с внутренней структурой потребовала использования модифицированного потенциала, содержащего производные от дельта-функции. НУШ с таким потенциалом сводится к НУШ без потенциала, но с новыми краевыми условиями.

Получено решение сформулированной контактной краевой задачи с такими условиями. Для низкоэнергетических локализованных нелинейных состояний получены выражения для энергии в явном аналитическом виде.

В рамках рассматриваемой модели можно утверждать, что возможно существование нелинейных локализованных состояний нескольких видов симметрии. Учет внутренней структуры дефекта приводит к видоизменению профиля нелинейных локализованных возбуждений и области их существования.

Полученные в данной работе результаты дополняют проведенные в работе [16] исследования особенностей локализации нелинейных возбуждений в средах с дефектами.

Список литературы
References

1. Ахмедиев Н.Н., Корнеев В.И., Кузьменко Ю.В. 1985. Возбуждение нелинейных поверхностных волн гауссовыми световыми пучками. ЖЭТФ, 88(1): 107-115.

Ahmediev N.N., Korneev V.I., Kuz'menko Ju.V. 1985. Vozbuzhdenie nelinejnyh poverhnostnyh voln gaussovymi svetovymi puchkami [Excitation of nonlinear surface waves Gaussian light beams. ZhJeTF], 88 (1): 107-115. (in Russian).

2. Горшков К.А., Островский Л.А., Папко В.В. 1976. Взаимодействия и связанные состояния солитонов как классических частиц. ЖЭТФ, 71 (2(8)):585-593.

Gorshkov K.A., Ostrovskij L.A., Papko V.V. 1976. Vzaimodejstvija i svjazannye sostojanija solitonov kak klassicheskih chastic [Interactions and bound states of solitons as classical particles]. ZhJeTF, 71(2(8)): 585-593. (in Russian).

3. Кившарь Ю.С., Косевич А.М., Чубыкало О.А. 1987. Рассеяние на точечном дефекте связанных квазичастиц как солитонная проблема (одномерный случай). ЖЭТФ, 93(3(9)): 968-977.

Kivshar' Ju.S., Kosevich A.M., Chubykalo O.A. 1987. Rassejanie na tochechnom defekte svjazannyh kvazichastic kak solitonnaja problema (odnomernyj sluchaj) [The scattering on an isolate defect involving the soliton as a quasi-particle problem (one-dimensional case)]. ZhJeTF, 93(3(9)): 968-977. (in Russian).

4. Kivshar Yu.S., Kosevich A.M., Chubykalo O.A. 1990. Radiative effects in the theory of beam propagation at nonlinear interfaces. Phys. Rev. A, 41(3): 1677-1688.

5. Богдан М.М., Герасимчук И.В., Ковалев А.С. 1997. Динамика и устойчивость локализованных мод в нелинейных средах с точечными дефектами. Физика низких температур, 23(2): 197-207.

Bogdan M.M., Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. 1997. Dinamika i ustojchivost' lokalizovannyh mod v nelinejnyh sredah s tochechnymi defektami [Dynamics and stability of localized modes in nonlinear media with point defects]. Fizika nizkih temperature, 23 (2): 197-207. (in Russian).

6. Герасимчук И.В., Ковалев А.С. 2000. Локализация нелинейных волн в слоистых средах. Физика низких температур, 26(8): 799–809.

Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. 2000. Lokalizacija nelinejnyh voln v sloistyh sredah [Localization of nonlinear waves in layered media] Fizika nizkih temperature, 26(8): 799-809. (in Russian).

7. Савотченко С.Е. 2004. Локализация волн вблизи интерфейса нелинейных сред с пространственной дисперсией. Известия высших учебных заведений. Физика, 47(5): 79-84.

Savotchenko S.E. 2004. Lokalizacija voln vblizi interfejsa nelinejnyh sred s prostranstvennoj dispersiej [Localization waves near the interface with spatial dispersion of nonlinear media], Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika, 47 (5): 79-84. (in Russian).

8. Косевич А.М., Савотченко С.Е. 1999. Особенности динамики одномерных дискретных систем с взаимодействием не только ближайших соседей и роль высшей дисперсии в солитонной динамике. Физика низких температур, 25(7): 737-747.

Kosevich A.M., Savotchenko S.E. 1999. Osobennosti dinamiki odnomernyh diskretnyh sistem s vzaimodejstviem ne tol'ko blizhajshih sosedej i rol' vysshej dispersii v solitonnoj dinamike [Features of the dynamics of one-dimensional discrete systems with the interaction of not only the nearest neighbors and the role of higher dispersion in soliton dynamics]. Fizika nizkih temperature, 25(7): 737-747. (in Russian).

9. Савотченко С.Е. 2000. Рассеяние волн дефектами в средах с пространственной дисперсией и безызлучательные динамические солитоны. Известия высших учебных заведений. Физика, 43(10): 876-881.

Savotchenko S.E. 2000. Rassejanie voln defektami v sredah s prostranstvennoj dispersiej i bezyzluchatel'nye dinamicheskie solitony [Scattering of waves by defects in media with spatial dispersion and nonradiative dynamic solitons]. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Physics, 43(10): 876-881 (in Russian).

10. Krasilnikov V.V. 2004. Savotchenko S.E. Peculiarities of solito n motion in molecular systems with high dispersion. Phys. Stat. Sol. (c), 1(11): 2757-2760.

11. Савотченко С.Е. 2005. Нелинейные коллективные возбуждения в квазиодномерных структурах при наличии пространственной дисперсии. Известия вузов. Физика, 48(9):24-27.

Savotchenko S.E. 2005. Nelinejnye kollektivnye vozbuzhdenija v kvaziodnomernyh strukturah pri nalichii prostranstvennoj dispersii [Nonlinear collective excitations in quasi-one-dimensional structures in the presence of spatial dispersion]. Izvestija vuzov. Fizika, 48(9): 24-27. (in Russian).

12. Савотченко С.Е. 2006. Особенности нелинейной динамики квазичастиц в молекулярных структурах с водородными связями при наличии взаимодействия не только ближайших соседей. Известия вузов. Физика, 49(2): 52-56.

Savotchenko S.E. 2006. Osobennosti nelinejnoj dinamiki kvazichastic v molekuljarnyh strukturah s vodorodnymi svjazjami pri nalichii vzaimodejstvija ne tol'ko blizhajshih sosedej [Features of the nonlinear dynamics of quasiparticles in molecular structures with hydrogen bonds in the presence of interaction not only of the nearest neighbors]. Izvestija vuzov. Fizika, 49(2): 52-56. (in Russian).

13. Савотченко С.Е. 2017. Взаимодействие локализованных состояний вблизи границы раздела нелинейных сред. Конденсированные среды и межфазные границы, N2: 291-295.

Savotchenko S.E. 2017. Vzaimodejstvie lokalizovannyh sostojanij vblizi granicy razdela nelinejnyh sred [Interaction of localized states near the interface of nonlinear media]. Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy, N2: 291-295. (in Russian).

14.Красильников В.В., Савотченко С.Е. 2015. Особенности рассеяния частиц точечным дефектом с внутренней структурой. Известия тульского государственного университета. Естественные науки, N4: 178-183.

Krasil'nikov V.V., Savotchenko S.E. 2015. Osobennosti rassejanija chastic tochechnym defektom s vnutrennej strukturoj [Features of the particle scattering point defect with an internal structur]. Izvestija tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki, N4:178-183. (in Russian).

15.Савотченко С.Е. 2016. Особенности взаимодействия волны с точечным дефектом в среде с пространственной дисперсией // Известия Воронежского государственного педагогического университета, N1(270): 196-199.

Savotchenko S.E. 2016. Osobennosti vzaimodejstvija volny s tochechnym defektom v srede s prostranstvennoj dispersiej [Features wave interaction with a point defect in a medium with spatial dispersion] . Izvestija Voronezhskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta, N1(270): 196-199. (in Russian).

16.Савотченко С.Е. 2016. Особенности локализации нелинейных возбуждений вблизи дефекта с внутренней структурой. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, N4: 51-59.

Savotchenko S.E. 2016. Osobennosti lokalizacii nelinejnyh vozbuzhdenij vblizi defekta s vnutrennej strukturoj [Features of nonlinear excitations localization near the defect with internal structure]. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Fizika. Matematika, N4: 51-59.