УДК 517.538.7

ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА, ПРИЛОЖЕНИЯ К ИНТЕРПОЛЯЦИИ

LOCALLY CONVEX SPACE OF ENTIRE FUNCTIONS OF ZERO ORDER, APPLICATIONS TO INTERPOLATION

К.Г. Малютин, Л.И. Студеникина
K.G. Malyutin, L.I. Studenikina

Юго-Западный государственный университет,
Россия, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Southwest State University, street 50 let Oktyabrya, 94, Kursk, 305040, Russia

E-mail: malyutinkg@gmail.ru, sli-kursk@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются локально выпуклые пространства целых функций нулевого порядка. Найдены два критерия разрешимости задачи простой свободной интерполяции в этом классе. В формулировке первого критерия используется каноническое произведение, определяемое узлами интерполяции. В формулировке второго – мера, которая определяется этими узлами. В предыдущих работах A.F. Леонтьева, Г.П. Лапина, K.G. Малютина, такие задачи рассматривались в классе целых функций ненулевого порядка.

Resume. We consider the locally convex space of entire functions of order zero. Two criteria of resolvability of problem of simple free interpolation in a class of the entire functions of zero order are received. In the formulation of the first criterion, the canonical product defined by interpolation knots is used. In the formulation of the second, the measure, which is defined by these knots, is used. In A.F. Leontyev, G.P. Lapin, K.G. Malyutin previous works such the problem was considered in a class of the entire functions of non-zero order.

Ключевые слова: локально выпуклые пространства целых функций нулевого порядка, интерполяция.
Keywords: locally convex space of entire functions of order zero, interpolation.

Пусть $f(z)$ – целая функция, $M(f,r)=\max\limits_{0\le\theta\le 2\pi}|f(re^{i\theta})|$. Через $[\rho,\infty]$ обозначим класс целых функций порядок которых не превышает $\rho, \rho\ge 0$, т.е. таких, что

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+ M(f,r)}{\ln r}\le\rho. \tag{1}$$

Здесь, как обычно, $b^+=\max\{b;0\}$.

В частности, через E_0 обозначим класс целых функций нулевого порядка ($\rho=0$). Введем следующее определение.

Последовательность функций $\{f_n(z)\}$ из класса E_0 сходится в смысле E_0, если: (i) она равномерно сходится на компактах, (ii) для любого $\varepsilon>0$ выполняется неравенство

$$|f_n(z)|<\exp[|z|^\varepsilon],\quad |z|>r_0(\varepsilon)\quad (n\ge 1),$$

где $r_0(\varepsilon)$ не зависит от $n\ge 1$.

При подходящем $C(\varepsilon)$, которое не зависит от *n*, при всех *z*

$$|f_n(z)|<C(\varepsilon)\exp[|z|^\varepsilon]\quad (n\ge 1). \tag{2}$$

Класс E_0 является линейным топологическим пространством с секвенциальной топологией.

Через $C(a,r)$ будем обозначать открытый, а через $B(a,r)$ – замкнутый круг радиуса r с центром в точке a. Пусть $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – множество различных комплексных чисел $\{a_n = r_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^{\infty}$. По множеству A определим меру: $n_A(G) = \sum_{a_n \in G} 1$. Если это не будет вызывать недоразумений, то индекс A будем опускать. Множество корней произвольной функции f будем обозначать через A_f. Обозначим через $n_f = n_{A_f}$, $n_{f,a}(r) = n_f(C(a,r))$, $n_{A,a}(r) = n_A(C(a,r))$. В частности, положим $n_f(r) = n_{f,0}(r)$, $n_A(r) = n_{A,0}(r)$.

Неравенство (1) приводит к разумности введения следующего определения.

Последовательность $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется интерполяционной в классе $[\rho,\infty]$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{b_n\}, n\in N$, удовлетворяющих условию

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+|b_n|}{\ln|a_n|}\le\rho \tag{3}$$

существует функция $F\in[\rho,\infty]$ со свойством

$$F(a_n)=b_n,\quad n\in N. \tag{4}$$

Задача (4) в классе $[\rho,\infty]$ в случае, когда $\rho>0$ впервые рассматривалась А. Ф. Леонтьевым $[1]$. Им были найдены критерии ее разрешимости в терминах канонических произведений, определяемых последовательностью A. Позднее К. Г. Малютин [2], исходя из результатов А. Ф. Леонтьва, нашел критерии разрешимости задачи (4) в терминах меры определяемой последовательностью A. В работе [3] рассматривалась задача в классе E_0 как в терминах канонических произведений, определяемых последовательностью A, так и в терминах меры, определяемой узлами интерполяции. В настоящей работе мы рассматриваем задачу простой интерполяции в классе E_0 и находим критерии ее разрешимости, отличные от тех, которые были найдены в работе [3].

Мы дополнительно предполагаем, что выполняется неравенство $|a_1|>0$. Это упрощает доказательство и формулировки некоторых утверждений, однако, не ограничивает общности наших рассуждений. По ходу работы мы делаем замечание, что последовательности A и $A\cup\{0\}$ являются одновременно интерполяционными.

Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок [4], $\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho\ge 0$. Если $\rho=0$, то уточненный порядок называется нулевым уточненным порядком.

По заданной последовательности A и уточненному порядку $\rho(r)$ определим семейства функций

$$\Phi_A^*(z,\alpha)=\frac{(n_A(C(z,\alpha|z|))-1)^+}{|z|^{\rho(|z|)}}.$$

Приведем формулу Пуассона для субгармонической функции υ и круга $B(z,R)$, на которую будем ссылаться в нашей работе:

$$\upsilon(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\upsilon(z+\mathrm{Re}^{i\varphi})\,d\varphi-\int_0^R\frac{\mu_\upsilon(B(z,t))}{t}\,dt. \tag{5}$$

Здесь μ_υ – риссовская мера функции υ.

В случае, если $f(z)$ – целая функция, a – простой корень функции f, $\upsilon(z)=\ln\left|\frac{f(z)}{(z-a)}\right|$, то формула Пуассона (5) для круга $B(a,r)$ приобретает вид:

$$\ln|f(a)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f(a+\mathrm{Re}^{i\varphi})\right|\,d\varphi-\int_0^R\frac{n_f(B(a,t))-1}{t}\,dt-\ln R. \tag{6}$$

Пусть $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность. Обозначим через

$$E_A(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right).$$

Функция $E_A(z)$ называется канонической функцией последовательности A.

Основным результатом нашей статьи является следующая теорема.

Напомним, мы считаем, что выполняется условие $|a_1|>0$.

Теорема 1. Следующие три утверждения эквивалентны:

(1) последовательность A является интерполяционной в классе E_0;

(2) для любого $\varepsilon>0$ выполняется соотношение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{\varepsilon}}<\infty, \tag{7}$$

и каноническая функция $E_A(z)$ последовательности A удовлетворяет условию:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln|a_n|}\ln^+\ln^+\frac{1}{|E'_A(a_n)|}\leq 0; \tag{8}$$

(3) выполняются соотношения (7) и

(3.1) существует нулевой уточненный порядок $\rho(r)$, такой что

$$\Phi_A(z,\alpha)\leq\frac{1}{\log\frac{1}{\alpha}}. \tag{9}$$

Пространство E_0^*

Рассмотрим последовательность E_n^* пространств целых функций, для которых конечна норма

$$\|f\|=\sup_{z\in C}\frac{|f(z)|}{\exp\left(|z|^{1/n}\right)}<\infty.$$

Ясно, что $E_{n_2}^*\subset E_{n_1}^*$ если $n_2>n_1$. Обозначим через E_0^* проективный предел пространства E_n^*.

Теорема 2. Пространства E_0^* и E_0 совпадают.

Доказательство. Из работы [5] следует, что пространство E_0^* является локально выпуклым пространством с секвенциальной топологией. При этом последовательность функций $\{f_n(z)\}$ из E_0^* сходится в смысле E_0^* если она при любом $n\in N$ сходится в пространстве E_n^*.

Отсюда следует, что последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится и в пространстве E_0. Очевидно, обратное, если последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится и в пространстве E_0, то она сходится и в любом пространстве E_n^* а, значит, и в пространстве E_0^*

Теорема доказана.

Докажем вспомогательные утверждения.

Теорема 3. Пусть A – интерполяционная последовательность в пространстве E_0. Тогда выполняется соотношение (7).

Доказательство. Пусть f – целая функция из пространства E_0., решающая интерполяционную задачу: $f(a_1)=1$, $f(a_n)=0$ при $n\geq 2$. По предположению теоремы такая функция существует. Запишем формулу (5) для функции $\upsilon(z)=\ln|f(z)|$ и круга $B(a_1,r)$:

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f(a_1+\mathrm{Re}^{i\varphi}\right|\,d\varphi-\int_0^R\frac{n_f(B(a_1,t))}{t}\,dt.$$

Отсюда получаем, что неравенство

$$\int_0^R\frac{n(t)}{t}dt\leq\int_0^R\frac{n_f(B(a_1,t))}{t}dt\leq K_\varepsilon R^\varepsilon,\quad K_\varepsilon>0,$$

выполняется при любом фиксированном $\varepsilon>0$ для всех $R>R_\varepsilon$.

Отсюда следует неравенство:

$$n(R)\leq\int_R^{eR}\frac{n(t)}{t}dt\leq K_\varepsilon R^\varepsilon. \tag{10}$$

Поскольку последнее неравенство выполняется при любом фиксированном $\varepsilon>0$, то из него следует соотношение:

$$\lim_{R\to\infty}\frac{n(R)}{R^\varepsilon}=0,\quad \varepsilon>0. \tag{11}$$

Тогда, используя неравенство (10) с $\varepsilon/2$ и соотношение (11), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^\varepsilon}=\int_0^\infty\frac{dn(t)}{t^\varepsilon}=\varepsilon\int_0^\infty\frac{n(t)}{t^{1+\varepsilon}}dt\leq\varepsilon K_\varepsilon\int_0^\infty\frac{dt}{t^{1+\varepsilon/2}}<\infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть A – интерполяционная последовательность в пространстве E_0. Тогда каноническая функция $E_A(z)$ принадлежит пространству E_0.

Доказательство. Пусть *A* – интерполяционная последовательность в пространстве E_0. *E*(*z*) – его каноническая функция. Из равенства (11) следует, что *E*(*z*) – целая функция. Кроме того, справедливо неравенство

$$\ln|E(z)|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{r}{|a_n|}\right)=\int_0^\infty\ln\left(1+\frac{r}{t}\right)dn(t)=\int_0^\infty\frac{rn(t)}{(t+r)t}dt,$$

из которого следует, что $E\in E_0$.

Теорема доказана.

Здесь и далее используется обозначение $|z|=r$.

Доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ 3)

Импликация 1) $\Rightarrow$ (7) доказана в теореме 2.

Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ (9). Докажем вначале, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\ln r_n}\ln^+\int_0^{r_n/2}\frac{(n(B(a_n,t))-1)^+}{t}dt=0. \tag{12}$$

Если это не так, то существуют последовательность $n_k\uparrow\infty$ при $k\to\infty$ и число $\varepsilon_0>0$ такие, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\ln|a_{n_k}|}\ln^+\int_0^{|a_{n_k}|/2}\frac{(n(B(a_n,t))-1)^+}{t}dt\ge\varepsilon_0,\quad k=1,2,\dots . \tag{13}$$

Дополнительно можно считать, что выполняется неравенство $|a_{n_{k+1}}|>4|a_{n_k}|,\quad k=1,2,\dots$

Пусть *f(z)* – функция из пространствf E_0, которая решает интерполяционную задачу $f(a_{n_k})=1$, k=1,2,..., $f(a_n)=0$, если $n\ne n_k$. По условию теоремы такая функция существует.

Запишем формулу (5) для функции $\upsilon(z)=\ln|f(z)|$ и круга $B\left(a_{n_k},\frac{1}{2}|a_{n_k}|\right)$:

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f\left(a_{nk}+\frac{1}{2}|a_{nk}|e^{i\varphi}\right)\right|d\varphi-\int_0^{|a_{nk}|/2}\frac{(n_f(B(a_{nk},t)))}{t}dt.$$

При $t\in\left[0,\frac{1}{2}|a_{nk}|\right]$ справедливо неравенство $n_f(B(a_{nk},t))\ge n(B(a_{nk},t))-1$. Поэтому

$$\int_0^{|a_{nk}|/2}\frac{(n(B(a_{nk},t))-1)^+}{t}dt\le\int_0^{|a_{nk}|/2}\frac{(n_f(B(a_{nk},t)))}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\left(a_{nk}+\frac{1}{2}|a_{nk}|e^{i\varphi}\right)\right|d\varphi.$$

Полученное неравенство, соотношение $f\in E_0$ и неравенство (13) в совокупности противоречивы. Тем самым, равенство (12) доказано.

Из равенства (7) следует, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\ln|a_{nk}|}\ln^+\int_{a_{nk}/2}^{|a_{nk}|}\frac{(n(B(a_n,t))-1)^+}{t}dt=0.$$

Вместе с равенством (12) это дает

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\ln|a_{nk}|}\ln^+\int_0^{|a_{nk}|}\frac{(n(B(a_n,t))-1)^+}{t}dt=0. \tag{14}$$

Пусть z – произвольное комплексное число и a=$a(z)$ – ближайшая к z точка последовательности $\{a_n\}$. Обозначим через F_1 множество тех z, для которых выполняется неравенство $|z-a|>\frac{1}{2}|z|$. Из условия (7) легко следует, что

$$\limsup_{\substack{n\to\infty\\ z\in F_1}} \frac{1}{\ln r}\ln^+\int_0^r \frac{(n(B(z\ ,t))-1)^+}{t}dt = 0.$$

Поэтому в дальнейшем доказательстве можно считать, что выполняется неравенство $|z-a| \le \frac{1}{2}|z|$. Далее имеем

$$\int_0^r \frac{(n(B(z\ ,t))-1)^+}{t}dt = \int_{|z-a|}^r \frac{(n(B(z\ ,t))-1)^+}{t}dt \le$$

$$\le \int_{|z-a|}^r \frac{(n(B(a,t+|z-a|))-1)^+}{t}dt = \int_{2|z-a|}^{r+|z-a|} \frac{(n(B(a,u))-1)^+}{u-|z-a|}du \le$$

$$\le 2\int_0^{r+|z-a|} \frac{(n(B(a,u))-1)^+}{u}du.$$

Из приведенных рассуждений и равенства (12) теперь следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln r}\ln^+\int_0^r \frac{(n(B(z\ ,t))-1)^+}{t}dt = 0.$$

Отсюда следует, что существует нулевой уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что

$$\int_0^r \frac{(n(B(z\ ,t))-1)^+}{t}dt \le V(r) := r^{\rho(r)}.$$

Сделав замену переменной $t=\alpha\ r$ в подынтегральном выражении последнего равенства и разделив обе части на $V(r)$ получим соотношение:

$$\int_0^1 \frac{\Phi_A(z,\alpha)}{\alpha}d\alpha \le 1. \tag{15}$$

Неравенство (9) следует тогда из цепочки неравенств

$$1 \ge \int_0^1 \frac{\Phi_A(z,\alpha)}{\alpha}d\alpha \ge \int_\delta^1 \frac{\Phi_A(z,\alpha)}{\alpha}d\alpha \ge \Phi_A(z,\delta)\ln\frac{1}{\delta}.$$

Импликация 1) $\Rightarrow$ 3) доказана.

Доказательство импликации 3) $\Rightarrow$ 2)

Пусть выполняются условия (9) и (7). Для произвольной точки $a_n \in A$ оценим расстояние $|a_n - a|$ где $a \in A$ ближайшая точка к a_n, из последовательности A. Точнее, оценим $\alpha_n = \frac{|a_n - a|}{|a_n|}$. Замечая, что $(n(B(a_n,\alpha_n))-1)^+ \ge 1$ и воспользовавшись неравенством (9), получим

$$\frac{1}{V(r_n)} \le \Phi_A(a_n,\alpha_n) \le \ln\frac{1}{\alpha_n}.$$

Откуда следует оценка

$$\alpha_n \ge \exp[-V(|a_n|)].$$

Снова применяя неравенство (9) и полученную оценку для α_n, имеем

$$\int_0^{r_n/2} \frac{(n(B(a_n,t))-1)^+}{t} dt \le V(r_n) \int_{\exp[-V(|a_n|)]}^{1/2} \frac{1}{t\ln(1/t)} dt =$$

$$= V(r_n)(\rho(r_n)\ln r_n - \ln\ln 2).$$

Отсюда следует соотношение (12). Дословно повторяя рассуждения выше, получим справедливость оценки (15).

Напишем равенство (6) для функции $E(z)$ и круга $B(a_n,R)$:

$$\ln|E'(a_n)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|E(a_n + \mathrm{Re}^{i\varphi})|\, d\varphi - \int_0^R \frac{(n(B(a_n,t))-1)}{t} dt - \ln R. \qquad (16)$$

Равенство (16) можно переписать в виде

$$\ln\frac{1}{|E'(a_n)|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\frac{1}{|E(a_n + \mathrm{Re}^{i\varphi})|}\, d\varphi + \int_0^R \frac{(n(B(a_n,t))-1)}{t} dt + \ln R. \qquad (17)$$

Далее мы воспользуемся следующей теоремой.

Теорема С. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $B(0,2eR)$ (R>0), $f(0)=1$ и η – произвольное положительное число, не превышающее $\frac{3}{2}e$. Тогда внутри круга $B(0,R)$, но вне исключительных кругов с общей суммой радиусов, не превышающей $4R\eta$, выполняется неравенство

$$\ln|f(z)| \ge -\left(2 + \ln\frac{3e}{2\eta}\right)\ln M(f,2eR).$$

Это теорема 11 из [4, Глава I, §8].

Поскольку $E \in E_0$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует r_ε такое, что при $r > r_\varepsilon$ выполняется неравенство:

$$\ln|E(z)| \le r^\varepsilon.$$

Из этого неравенства и теоремы С, примененной к функции $E(z)$ и кругу $B(0,3e|a_n|)$, следует, что существуют номер N_ε и число $R_1 \in \left[\frac{1}{2}|a_n|,|a_n|\right]$ такие, что для всех φ и $n > N_\varepsilon$ будет выполняться неравенство

$$\ln\frac{1}{|E(a_n + R_1 e^{i\varphi})|} \le r_n^\varepsilon.$$

Выбирая в равенстве (17) $R = R_1$, получим доказательство импликации (13)$\Rightarrow$ (12).

Тем самым импликация 3)$\Rightarrow$ 2) доказана.

Доказательство импликации 2)$\Rightarrow$ 1)

Обозначим

$$P_n(z) = \frac{1}{E'(a_n)}\frac{b_n}{z-a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{s_n}, \quad n \in N, \qquad (18)$$

где $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность натуральных чисел, которую мы выберем ниже.

Заметим, что формальный ряд

$$F(z) = E(z)\sum_{n=1}^{\infty} P_n(z) \tag{19}$$

решает интерполяционную задачу (4).

Покажем, что при подходящем выборе последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ функция $F \in E_0$. Из условий (3) и (8) получаем, что существует последовательность $\{\varepsilon_n\}, \varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$ такая, что при всех $n \in N$,

$$\left|\frac{b_n}{E'(a_n)}\right| \le \exp(r_n^{\varepsilon_n}). \tag{20}$$

Кроме того, в силу условия (7), можно считать, что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-r_n^{\varepsilon_n}). \tag{21}$$

Обозначим $u_n(z) = \dfrac{1}{z-a_n}\left(\dfrac{z}{a_n}\right)^{S_n}$, $n \in N$, и оценим при $z \notin C(a_n, 1)$:

$$|u_n(z)| \le \frac{|z|^{S_n}}{r_n^{S_n}}, \quad n \in N.$$

Отсюда, с учетом определения (18) функции $P_n(z)$ и (20), получим

$$|P_n(z)| \le \left|\frac{b_n}{E'(a_n)}\right| |u_n(z)| \le \exp(r_n^{\varepsilon_n}) \frac{|z|^{S_n}}{r_n^{S_n}} = \left(\frac{e^{2}|z|}{r_n}\right)^{S_n} \frac{\exp(r_n^{\varepsilon_n})}{e^{2S_n}}. \tag{22}$$

при $z \notin C(a_n, 1)$

Положим $S_n = [2r_n^{\varepsilon_n}] + 1$, $n \in N$ где $[\cdot]$ – целая часть числа. Тогда из (22) получаем

$$|P_n(z)| \le \exp(-r_n^{\varepsilon_n})\left(\frac{e^2|z|}{r_n}\right)^{2r_n^{\varepsilon_n}}. \tag{23}$$

Пусть $N = N(r)$ – наименьшее целое число, обладающее свойством $|a_n| \ge e^2 r$, если $n > N$, N_0 – фиксированное число такое, что $|a_{N_0}| \ge 1$.

Функцию $F(z)$ представим в виде суммы:

$$F(z) = E(z)\sum_{n=1}^{N_0-1} P_n(z) + E(z)\sum_{n=N_0}^{N-1} P_n(z) + E(z)\sum_{n=N}^{\infty} P_n(z) = F_1(z) + F_2(z) + F_3(z).$$

Рассмотрим слагаемое $F_3(z)$. Из условия (21) и неравенства (23) следует, что $\sum_{n=N}^{\infty} P_n(z) \le C$, где C – некоторая постоянная.

Рассмотрим $F_2(z)$ Так как $|a_n| \geq 1$ при $n > N_0$, то в силу неравенства (23) будет справедлива оценка

$$|P_n(z)| \leq \exp(-r_n^{\varepsilon_n})(er)^{4r_n^{\varepsilon_n}}.$$

Учитывая полученную оценку, получим, что для любого $\varepsilon > 0$ при $r > R(\varepsilon)$ имеет место $|F_2(z)| < r^{\varepsilon}$.

Поскольку в представлении $F_1(z)$ сумма содержит конечное число слагаемых, то из полученных оценок следует, что $F(z) \in E_0$.

Теорема полностью доказана.

В заключение покажем, что если последовательность A, $|a_1| > 0$, является интерполяционной в классе E_0, то и последовательность $A_0 = A \cup \{0\}$также является интерполяционной в этом классе. Действительно, рассмотрим интерполяционную задачу (4) для последовательности A_0. Пусть $f \in E_0$ – решение интерполяционной задачи (4) для последовательности A. Тогда функция

$$f_1(z) = f(z) + \frac{E_A(z)}{E_A(0)}[b_0 - f(0)]$$

принадлежит классу E_0 и является решением поставленной интерполяционной задачи. Тем самым, ограничение $a_1 \neq 0$ не является существенным.

Замечание. Пространства целых функций $[\rho(r), \sigma]$ уточненного порядка $\rho(r)$, типа меньше или равного σ и пространства целых функций $[\rho(r), \sigma]$ уточненного порядка $\rho(r)$, типа меньше σ рассматривались в работах [6], [7], [8]. Интерполяционная задача в классе аналитических функций нулевого порядка в полуплоскости рассматривалась в работе [9], в работах [10], [11], [12] рассматривалась интерполяционная задача в различных классах аналитических функций ненулевого порядка в полуплоскости.

Список литературы
References

1. Леонтьев А.Ф. 1948. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка. ДАН СССР, № 5: 785-787.

Leont'ev A.F. 1948. On interpolation in the class of entire functions of finite order. Dokl. Akad. Nauk SSSR, № 5: 785-787 (in Russian).

2. Малютин К.Г. 1980. Интерполяция голоморфными функциями. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Харьков, 104 с.

Malyutin AG 1980. Interpolation by polymorphic functions. Dis. ... Cand. Sci. Sciences. Kharkov, 104 p. (in Russian).

3. Малютин К.Г., Боженко О.А. 2013. Задача кратной интерполяции в классе целых функций нулевого порядка. Збopник трудов Ин-та математики НАН Украины, № 10 (4-5): 412-423.

Malyutin K.G., Bozhenko O.A. 2013. The problem of multiple interpolation in the class of entire functions of order zero. Collection of works of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, № 10 (4-5): 412-423 (in Russian).

4. Левин Б. Я. 1956. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ: 632. (Levin B.Ya. 1980. Distribution of Zeros of Entire Functions. English revised edition Amer. Math. Soc. Providence, RI: 523)

Levin B.Ya. 1980. Distribution of Zeros of Entire Functions. English revised edition Amer. Math. Soc. Providence, RI: 523.

5. Себаштьян-и-Силва Жозе. 1957. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях. Математика, № 1 (1): 60–77.

Sebastiao e Silva J. 1957. Certain classes of locally convex spaces, which are important in applications. Mathematics, № 1 (1): 60-77 (in Russian).

6. Malyutin K.G., Malyutina T.I. 2015. Linear Functionals in Some Spaces of Entire Functions of Finite Order. Istanbul University Science Faculty the Journal of Mathematics, Physics and Astronomy, № 6: 1-6.

7. Malyutin K.G., Studenikina L.I. 2016. Linear functionals in space of entire functions of finite order and less of the given type. Matematychni Studii, № 46 (2): 45-50.

8. Малютин К.Г., Студеникина Л.И., Ковалев В.Г. 2016. Линейный функционал в пространстве целых функций [ρ(r), σ). Известия ЮЗГУ. Серия: Техника и технология, № 2 (19): 128-130.

Malyutin K.G., Studenikina L.I., Kovalev V.G. 2016. Linear functionals in space of entire functions [ρ(r), σ). Southwest State University. Izvestiya: Engineering and technology, № 2 (19): 128-130 (in Russian).

9. Боженко О.А., Малютин К.Г. 2014. Задача кратной интерполяции в классе аналитических функций нулевого порядка в полуплоскости. Уфимск. матем. журн., № 6 (1): 18-29.

Bozhenko O.A., Malyutin K.G. Problem of multiple interpolation in class of analytical functions of order zero in half-plane. Ufa Mathematical Journal, № 6 (1): 18-28. (in Russian) .

10. Малютин К.Г. 1993. Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа. Матем. сб., № 184 (2): 129-144.

Malyutin K.G. 1994. The problem of multiple interpolation in the half-plane in the class of analytic functions of finite order and normal type. Sbornik: Mathematics, № 78 (1): 253-266. (in Russian)

11. Малютин К.Г. 1995. О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. I. Изв. РАН. Сер. матем., № 59 (4): 125-154.

Malyutin K.G. 1995. Sets of regular growth of functions in a half-plane, I. Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics, № 59 (4): 785-814. (in Russian)

12. Малютин К.Г. 1995. О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. II. Изв. РАН. Сер. матем., № 59 (5): 103 -126.

Malyutin K.G. 1995. Sets of regular growth of functions in a half-plane. II. Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics, № 59 (4): 983-1006. (in Russian).