УДК 517.911

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

METHOD OF INTEGRAL OPERATORS IN THE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAYED ARGUMENT

О.И. Бжемиухова, Е.В. Рыжкова
O.I. Bzheumikhova, E.V. Ryzhkova

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
Россия, 360004, г. Нальчик, ул Чернышевского, 175

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина,
Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54 А.

Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
175 Chernyshevsky St, Nalchik, 360004, Russia

Voenny\`i\` uchebno-nauchny\`i\` centr Voenno-vozdushny\`kh sil «Voenno-vozdushnaia akademiia imeni professora N.E. Zhukovskogo i Iu.A. Gagarina,
Rossiia, 394064, g. Voronezh, ul. Stary\`kh Bol\`shevikov, 54 A.

E-mail: bzhoksana@gmail.com

Аннотация
Работа носит обзорный характер и посвящена общим проблемам теории уравнений с отклоняющимся аргументом и уравнений с операторами дробного интегро-дифференцирования. В частности, в работе рассмотрены случаи, при которых один из указанных видов уравнений может быть преобразован к другому. Кроме того, сформулированы задачи для уравнений с распределенным запаздыванием, которые могут быть исследованы с использованием методов, характерных для уравнений, содержащих операторы Римана-Лиувилля.

Abstract
The paper has been composed as a review of general problems of the theory of equations with deviating arguments and equations with operators of fractional integro-differentiation. In particular the cases in which one of these types of equations can be converted to another have been described here. In addition, the tasks for equations with distributed delay have been singled out on the basis of methods typical to the equations containing the Riemann-Liouville operators.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, распределенное запаздывание, операторы дробного интегро-дифференцирования.
Keywords: differential equation, a distributed delay, fractional integrals.

Интерес к уравнениям с отклоняющимся аргументом и уравнениям содержащими операторы дробными производными растет постоянно. Это обусловлено как теоретическими потребностями, так и прикладной важностью подобных исследований. Современные технологии, основанные на математическом моделировании, приводят к необходимости постановки и исследования новых краевых задач для различных классов дифференциальных уравнений.

В этой связи все больше внимания уделяется задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Этому способствует тот факт, что решение задач для уравнений этого класса в частных производных [1, 2] зачастую сводится к исследованию задач для соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной краткой заметке обзорного характера приведены постановки основных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, а также приведены ссылки на работы по данной тематике, включая работы авторов, в которых данные задачи были исследованы. Подробные результаты и доказательства могут быть найдены по указанным ссылкам.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с распределенным запаздыванием

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d^i}{dt^i}x(t)=\int_0^t p(t,\tau)x(t-\tau)d\tau+f(t), \tag{1}$$

где $t\in(0,\infty)$, $n\in\mathrm{N}$.

Отметим, что подобные уравнения и задачи для них были исследованы в работах [4-6].

Покажем, что уравнения типа (1) тесно связаны с теорией операторов дробного интегро-дифференцирования.

Действительно, используя замену $\tau=t-s$, получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d^i}{dt^i}x(t)=\int_0^t p(t,t-s)x(s)ds+f(t). \tag{2}$$

Далее предположим, что функция p представима в виде

$$p(t,t-s)=\frac{q(t)}{|t-s|^{\alpha+1}}, \tag{3}$$

где $\alpha\in(-1,0)$, а $q(t)$ – заданная, непрерывная функция.

Тогда из (2) с учетом (3) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d^i}{dt^i}x(t)=\Gamma(-\alpha)q(t)D_{0t}^{\alpha}x(t)+f(t), \tag{4}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, D_{0t}^{α} – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля [7].

Таким образом, исследование уравнений вида (1) может быть редуцировано к исследованию уравнений вида (4).

В частности, для модельного уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)-\int_0^t \tau^{\beta}x(t-\tau)d\tau=f(t),\quad \beta=-\alpha-1,$$

после его редукции к уравнению вида

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)-\lambda D_{0t}^{\alpha}x(t)=f(t),\quad \lambda=\Gamma(-\alpha) \tag{5}$$

могут быть исследованы различные краевые задачи. Например, классическая задача Коши.

Задача. Найти регулярное решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям:

$$x(0)=x_0,\quad \left[\frac{d}{dt}x(t)\right]_{t=0}=x_1.$$

Доказательство однозначной разрешимости данной задачи на основе операторных методов представлено в [7].

Список литературы
References

1. Бжеумихова О.И., Лесев В.Н. 2011. О разрешимости второй краевой задачи для уравнения с отклоняющимся аргументом в прямоугольной области. XII Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике, Т.18, №2: 250–251.

Bzheumihova O.I., Lesev V.N. 2011. On the solvability of the second boundary value problem for an equation with a deviating argument in a rectangular domain. XII All-Russian Symposium on Applied and Industrial Mathematics, vol.18, no. 2: 250-251.

2. Бжеумихова О.И. 2011. Локальная краевая задача для смешанного уравнения с отклоняющимся аргументом. Научное мнение, №6: 138–141.

Bzheumihova O.I. 2011. Local boundary value problem for a mixed equation with a deviating argument. Scientific Opinion, no. 6: 138-141.

3. Bernard S., Brelair J., Mackey M.C. 2001. Sufficient conditions for stability of linear differential equations with distributed delay. Discrete and continuous dynamical systems, vol. 1, no. 2: 233–256.

4. Gil` M.I. 2011. Stability of functional differential equations with oscillating coefficients and distributed delays. Differential equations & applications, vol. 3, no. 1: 11–19.

5. Walther H.-O. 2003. The solution manifold and C1-smoothness for differential equations with state-dependent delay. J. Differential Equations, vol. 195: 46–65.

6. Нахушев А.М. 2000. Элементы дробного исчисления и их приложения. Нальчик: КБНЦ РАН, 299.

Nakhushev A.M. 2000. Elements of fractional calculus and their applications. Nalchik: KBSC RAS, 299.