МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 620.192.45+517.955.4

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В СЛУЧАЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ НЕМАГНИТНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ ПОД ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СЛОЕМ

AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF MAXWELL'S EQUATIONS IN THE CASE OF AN UNLIMITED NONMAGNETIC CONDUCTIVE MEDIUM UNDER DIELECTRIC LAYER

С.В. Марвин
S.V. Marvin

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, 19 Mira St, Yekateriburg, 620002, Russia

E-mail:s.v.marvin@yandex.ru

Аннотация
Рассмотрена начально-краевая задача электродинамики для неограниченной немагнитной проводящей среды, находящейся под слоем диэлектрика. Предполагается, что у среды есть внутренний дефект (полость). В постановке задачи задействован класс векторных полей, квадратично суммируемых вместе со своими обобщенными роторами во всем трехмерном пространстве. Показано, что в выбранной постановке начально-краевая задача имеет единственное решение.

Abstract
An initial-boundary value problem of electrodynamics for an unlimited nonmagnetic conductive medium, located under a layer of dielectric, is considered. It is assumed, that the medium has an internal defect-cavity. In the formulation of the initial-boundary value problem involved a class of vector fields, square integrable together with their generalized rotors around all third-dimension space. It is shown, that in the selected formulation a solution of the considered initial-boundary value problem is exist and unique.

Ключевые слова: начально-краевая задача, уравнения Максвелла, теорема существования, замкнутый оператор, интегро-дифференциальные уравнения
Keywords: initial-boundary value problem, Maxwell's equations, existence theorem, closed operator, integro-differential
equations

Введение

Начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла, не предполагающие сокращающуюся гармоническую зависимость электромагнитного поля от времени, необходимы для описания нестационарных волновых процессов электродинамики. С этим обстоятельством связан не только теоретический интерес, но и существенный прикладной смысл таких задач: например, в неразрушающем электромагнитном контроле металлических изделий нестационарные методы получили очень широкое распространение [1]. Поэтому актуально исследование начально-краевых задач электродинамики при различных постановках, соответствующих конкретным ситуациям неразрушающего контроля, причем немалую теоретическую и прикладную значимость имеет доказательство общих теорем для таких задач.

Ранее широко исследовались внутренние начально-краевые задачи для ограниченных областей; существенные результаты были получены для областей с границами класса $C^{(2)}$ [2, 3]. Однако для неразрушающего контроля наибольший интерес представляют не внутренние начально-краевые задачи, а задачи сопряжения, при постановке которых граничные условия связывают поле внутри контролируемого объекта с внешним полем. Именно эта связь делает неразрушающий контроль возможным: так по внешнему полю можно судить о внутренней структуре контролируемого изделия.

Начально-краевые задачи с граничными условиями сопряжения исследовались, в частности, применительно к ограниченному немагнитному проводящему телу; предполагалось, что граница тела должна быть поверхностью Ляпунова, электропроводность тела должна быть бесконечно гладкой функцией пространственных координат, а сторонний ток должен включаться достаточно медленно [4, 5]. При таких предположениях были доказаны существование и единственность классического решения начально-краевой задачи электродинамики. Однако наиболее реалистичные модели дефектов предполагают разрывный характер зависимости электропроводности от пространственных координат, и, кроме того, всевозможные неровности и шероховатости границ проводящих тел невозможно описать только гладкими поверхностями.

Начально-краевые задачи для ограниченных неферромагнитных и ферромагнитных металлических тел с кусочно-гладкими границами и различными нарушениями внутренней структуры также были исследованы, но не в классической, а в некоторой обобщенной постановке; в качестве нестационарного поля рассматривалось затухающее поле мгновенно выключенного стороннего тока [6-8]. Был найден функциональный класс, в котором гарантировались существование и единственность решения этих начально-краевых задач. Однако полученные результаты имели то существенное ограничение, что в рассмотренных моделях проводники не находились под слоем диэлектрика и занимали ограниченные области пространства, в то время как в условиях неразрушающего контроля проверяемое металлическое изделие нередко оказывается покрыто защитным диэлектрическим слоем, причем в конкретных задачах дефектоскопии, структуроскопии и особенно толщинометрии широко используются модели неограниченных проводников. Поэтому актуально доказательство общей теоремы существования и единственности решения применительно к модели неограниченного дефектного проводника под слоем диэлектрика.

2. Постановка начально-краевой задачи

Начально-краевая задача будет поставлена для неограниченных областей, и необходимо определиться с требованиями, касающимися гладкости границ этих областей. Для ограниченных тел наиболее общее и естественное требование заключается в том, чтобы их граница была кусочно-гладкой. По определению, кусочно-гладкая поверхность состоит из конечного числа гладких поверхностей, края которых являются кривыми (то есть непрерывными образами некоторых отрезков), и гладкие части поверхности по своим краям «склеиваются» с «соседними» гладкими поверхностями с выполнением определенных требований [9]. Однако для неограниченной поверхности раздела сред требование, чтобы она состояла из конечного числа гладких частей, является чрезмерным (например, допустима модель шероховатой поверхности, шероховатость которой задается периодической функцией).

Множество вещественных чисел будем обозначать R; соответственно, R^3 – трехмерное геометрическое пространство; $\mathbf{r} \in \mathrm{R}^3$ – упорядоченный набор трех пространственных координат. Обозначим как O_R прямоугольную R-окрестность начала координат (то есть открытый куб с центром в начале координат и сторонами длиной $2R$, параллельными осям координат). Будем говорить, что последовательность кубов O_{R_n} монотонно исчерпывает R^3, если величины R_n образуют неограниченно возрастающую последовательность.

Определение 1. Область $\Lambda \subseteq \mathrm{R}^3$ будем называть допустимой, если существует такая последовательность кубов O_{R_n}, монотонно исчерпывающая R^3, что пересечения $O_{R_n} \cap \Lambda$ являются областями с кусочно-гладкими границами.

Предположим, что проводящая среда с внутренним дефектом и внешним слоем диэлектрика занимает допустимую неограниченную объемно односвязную область Ω_{full}; проводник без диэлектрического слоя занимает допустимую неограниченную объемно односвязную область Ω; дефект типа полости занимает ограниченную объемно односвязную область Ω_c с кусочно-гладкой границей. Относительно взаимного расположения областей и их замыканий предполагается, что $\overline{\Omega}_c \subset \Omega$ и $\overline{\Omega} \subset \Omega_{\text{full}}$.

Электропроводность σ не зависит от времени, равна нулю в $\mathrm{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ и в Ω_c. В области $\Omega \setminus \overline{\Omega}_c$ функция $\sigma(\mathbf{r})$ положительна, непрерывна, причем может быть непрерывным образом продолжена на границу Ω изнутри и на границу Ω_c снаружи. Кроме того, функция $\sigma(\mathbf{r})$ ограничена в $\Omega \setminus \overline{\Omega}_c$, и ее точная нижняя грань $\sigma_{\inf} > 0$.

Диэлектрическая проницаемость ε не зависит от времени, равна 1 в $R^3 \setminus \overline{\Omega}_{\text{full}}$ и в области Ω. В $\Omega_{\text{full}} \setminus \overline{\Omega}$ функция $\varepsilon(\mathbf{r}) > 1$, непрерывна и может быть непрерывным образом продолжена на границу Ω_{full} изнутри и на границу Ω снаружи. Также предполагается, что функция $\varepsilon(\mathbf{r})$ ограничена в $\Omega_{\text{full}} \setminus \overline{\Omega}$ и ее точная нижняя грань $\varepsilon_{\text{inf}} > 1$. Магнитная проницаемость равна 1 во всем пространстве.

Ненулевой сторонний ток протекает в области T; замыкания областей T и Ω_{full} не пересекаются: $\overline{T} \cap \overline{\Omega}_{\text{full}} = \varnothing$. Будем предполагать, что плотность стороннего тока $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ в начальный момент времени $t = 0$ равна нулевому вектору (то есть, сторонний ток в начальный момент времени выключен), и в любой момент времени $t > 0$ $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \in L_2(T)$ (символом L_2 обозначается пространство векторных полей, квадратично суммируемых на множестве, указанном в скобках после L_2). Чтобы изложить предположения, касающиеся зависимости $\mathbf{j}$ от t, необходимо воспользоваться определениями непрерывности и дифференцируемости функции со значениями в произвольном нормированном пространстве.

Определение 2. Функция $\mathbf{w}(t)$ со значениями в нормированном пространстве L называется непрерывной при $t = a$ в L или по норме L, если относительно нормы L $\lim\limits_{t\to a}\|\mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(a)\| = 0$.

Определение 3. Функция $\mathbf{w}(t)$ со значениями в нормированном пространстве L называется дифференцируемой при $t = a$ в L или по норме L, если существует такой элемент $\mathbf{w}'(a) \in L$, для которого относительно нормы L $\lim\limits_{t\to a}\left\|\dfrac{\mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(a)}{t - a} - \mathbf{w}'(a)\right\| = 0$; в этом случае $\mathbf{w}'(a)$ называется производной функции $\mathbf{w}(t)$ при $t = a$.

Через односторонние пределы в определениях 2 и 3 можно ввести понятие односторонней непрерывности, односторонней производной и, как следствие, определить непрерывность и дифференцируемость на полуинтервале и отрезке.

Будем предполагать, что плотность стороннего тока на полуинтервале $t \geq 0$ имеет вторую непрерывную производную по норме $L_2(R^3)$: $\|\mathbf{w}\|_2 = \sqrt{\int\limits_{R^3} |\mathbf{w}(\mathbf{r})|^2 dV}$ (dV – элемент объема в тройном интеграле).

В каждой отдельной среде, то есть в Ω_c, $\Omega \setminus \overline{\Omega}_c$, $\Omega_{\text{full}} \setminus \overline{\Omega}$ и $R^3 \setminus \overline{\Omega}_{\text{full}}$ выполняются уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r})} \text{rot}\mathbf{H} - \dfrac{\sigma(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r})} \mathbf{E} - \dfrac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \\ \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu_0} \text{rot}\mathbf{E} \end{cases}, \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – соответственно, напряженности электрического и магнитного поля; ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная постоянные; в первом уравнении системы (1) учтено, что в токовой области T $\varepsilon(\mathbf{r}) \equiv 1$, а снаружи токовой области $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \equiv \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ — нулевой вектор).

В точках гладкости границ Ω_c, Ω и Ω_{full} выполняются условия сопряжения:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\tau,\text{int}} = \mathbf{E}_{\tau,\text{ext}} \\ \mathbf{H}_{\tau,\text{int}} = \mathbf{H}_{\tau,\text{ext}} \end{cases}, \tag{2}$$

где τ – обозначение касательной составляющей вектора на границе области, int — обозначение предела изнутри области, ext – обозначение предела снаружи области.

Начальное распределение электромагнитного поля в пространстве определяется начальными условиями:

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r},0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r},0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) \end{cases}. \tag{3}$$

Введем следующие обозначения: $L_{\text{loc}}(R^3)$ – пространство векторных полей, локально суммируемых в R^3; D – пространство финитных бесконечно дифференцируемых векторных полей.

Определение 4. Поле $\mathbf{v} \in L_{\text{loc}}(R^3)$ называется обобщенным ротором поля $\mathbf{u} \in L_{\text{loc}}(R^3)$, если для любого поля $\mathbf{q} \in D$ выполняется равенство $\int\limits_{R^3} \mathbf{u}(\mathbf{r})\text{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})dV = \int\limits_{R^3} \mathbf{v}(\mathbf{r})\mathbf{q}(\mathbf{r})dV$.

Обозначается обобщенный ротор, как и обычный, символом rot. Обобщенный ротор определен однозначно с точностью до замены векторного поля на эквивалентное. Если у векторного поля есть обобщенные производные по Соболеву первого порядка, то обобщенный ротор можно найти по формуле для обычного ротора [3]. Однако это не является необходимым условием существования обобщенного ротора: например, если у локально суммируемой функции $\psi(\mathbf{r})$ есть обобщенные производные по Соболеву первого порядка, но нет обобщенных производных по Соболеву второго порядка, то обобщенный $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\psi(\mathbf{r})$ все равно определен, причем равен 0 [6,7].

Пространство квадратично суммируемых в R^3 векторных полей, имеющих квадратично суммируемые в R^3 обобщенные роторы, обозначается $\boldsymbol{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3)$. Будем предполагать, что в начальных условиях (3) $\mathbf{E}_0,\mathbf{H}_0 \in \boldsymbol{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3)$ и, кроме того, поле $\mathbf{H}_0$ удовлетворяет условию соленоидальности: $\mathrm{div}\,\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) \equiv 0$ (в общем случае частные производные, фигурирующие в $\mathrm{div}\,\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$, следует понимать как производные в классе обобщенных функций-распределений). Из выполнения условия соленоидальности магнитного поля в начальный момент времени следует выполнение этого условия во все последующие моменты времени [7].

Теперь определим функциональный класс, в котором будет поставлена задача (1)-(3): напряженности $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ в любой момент времени $t > 0$ должны принадлежать пространству $\boldsymbol{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3)$; кроме того, на полуинтервале $t \ge 0$ напряженности $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ должны быть дифференцируемы по времени в $L_2(\mathrm{R}^3)$. Покажем, что такая постановка задачи должным образом учитывает граничные условия (2), и при такой постановке у задачи (1)-(3) существует единственное решение.

3. Исследование начально-краевой задачи

Обозначим как $\boldsymbol{K}$ класс векторных полей, обладающих следующими свойствами. Эти векторные поля непрерывно дифференцируемы в Ω_c, $\Omega\setminus\overline{\Omega}_c$, $\Omega_{\mathrm{full}}\setminus\overline{\Omega}$ и $\mathrm{R}^3\setminus\overline{\Omega}_{\mathrm{full}}$, а также могут быть по непрерывности продолжены на границы Ω_c, Ω и Ω_{full} вместе со своими производными первого порядка как изнутри, так и снаружи данных областей; кроме того, на границах областей Ω_c, Ω и Ω_{full} эти поля удовлетворяют граничным условиям вида (2) и вместе со своими роторами принадлежат $L_2(\mathrm{R}^3)$.

Теорема 1. $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3)$, причем обобщенный ротор любого поля из $\boldsymbol{K}$ в Ω_c, $\Omega\setminus\overline{\Omega}_c$, $\Omega_{\mathrm{full}}\setminus\overline{\Omega}$ и $\mathrm{R}^3\setminus\overline{\Omega}_{\mathrm{full}}$ совпадает с обычным ротором с точностью до переопределения на множестве нулевой меры.

Доказательство. Рассмотрим произвольное поле $\mathbf{q}\in\boldsymbol{D}$. Выберем куб $O_{R'}$, образующий в пересечении с Ω область с кусочно-гладкой границей, причем величина R' должна быть достаточно большой, чтобы $\mathrm{supp}\,\mathbf{q}$ (то есть, носитель поля $\mathbf{q}$) и $\overline{\Omega}_c$ включались в $O_{R'}$ (рис.). Заметим, что такой куб $O_{R'}$ существует вследствие того, что область Ω – допустимая. Так как граница куба $O_{R'}$ и $\mathrm{supp}\,\mathbf{q}$ являются замкнутыми, ограниченными и непересекающимися множествами, то расстояние между ними (равное точной нижней грани расстояний между их точками) положительно [9]. Следовательно, можно утверждать, что $\mathbf{q}\equiv\mathbf{0}$ не только на границе куба $O_{R'}$ и за его пределами, но и в некотором «приграничном слое» внутри куба.

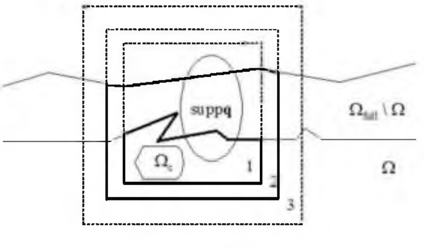

Рис. Пересечение кубов и областей
Fig. Intersection of cubes and domains

Рассмотрим произвольное поле $\mathbf{u}\in\boldsymbol{K}$. Любая точка границы области $O_{R'}\cap\Omega$ является либо граничной для $O_{R'}$ и внутренней для Ω, либо граничной для Ω и внутренней для $O_{R'}$, либо граничной для $O_{R'}$ и Ω одновременно. По определению пространства K, в точках гладкости границы Ω, внутренних для $O_{R'}$, поле $\mathbf{u}$ и его частные производные первого порядка допускают непрерывное продолжение изнутри и снаружи $O_{R'}\cap\Omega$; кроме того, $\mathbf{u}$ удовлетворяет граничным условиям вида (2). Следовательно, в таких точках векторное произведение $[\mathbf{u}\times\mathbf{q}]$ со своими частными производными допускает непрерывное продолжение изнутри и снаружи $O_{R'}\cap\Omega$, причем $[\mathbf{u}_\tau\times\mathbf{q}]$ меняется непрерывно при переходе через границу. Если же граничная точка $O_{R'}\cap\Omega$ является граничной для $O_{R'}$, то в некоторой малой ее окрестности векторное произведение $[\mathbf{u}\times\mathbf{q}]\equiv\mathbf{0}$, то есть бесконечное число раз непрерывно дифференцируемо. Следовательно, во всех точках гладкости границы $O_{R'}\cap\Omega$ $[\mathbf{u}_\tau\times\mathbf{q}]$ меняется непрерывно при переходе через границу. Заметим также, что граничные точки Ω, находящиеся за пределами замыкания $O_{R'}\cap\Omega$, не могут быть внутренними точками $O_{R'}$ и, следовательно, не участвуют в разрывах векторного произведения $[\mathbf{u}\times\mathbf{q}]$ и его частных производных.

Теперь выберем куб $O_{R''}$, $R''>R'$, образующий в пересечении с Ω_{full} область с кусочно-гладкой границей (см. рис. 1). Аналогично приходим к выводу, что при переходе через границу $O_{R''}\cap\Omega_{\text{full}}$ в точках гладкости $[\mathbf{u}_\tau\times\mathbf{q}]$ меняется непрерывно, и граничные точки Ω_{full}, не принадлежащие замыканию $O_{R''}\cap\Omega_{\text{full}}$, не участвуют в разрывах векторного произведения $[\mathbf{u}\times\mathbf{q}]$ и его частных производных. Также выберем куб $O_{R'''}$, $R'''>R''$ (см. рис. 1).

В точках гладкости поля $\mathbf{u}$ справедлива следующая формула векторного анализа:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})=\mathbf{q}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r})-\operatorname{div}[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{q}(\mathbf{r})].$$

Воспользуемся этой формулой, а также формулой Остроградского-Гаусса:

$$\int_{\mathrm{R}^3}\mathbf{u}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})dV=\int_{\Omega_3}\mathbf{u}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})dV=$$

$$=\int_{\Omega_3\setminus\Omega_2}\mathbf{u}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})dV+\int_{\Omega_2\setminus\Omega_1}\mathbf{u}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})dV+\int_{\Omega_1\setminus\Omega_c}\mathbf{u}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})dV+\int_{\Omega_c}\mathbf{u}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})dV=$$

$$=\int_{\Omega_3\setminus\Omega_2}\mathbf{q}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r})dV+\int_{\Omega_2\setminus\Omega_1}\mathbf{q}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r})dV+\int_{\Omega_1\setminus\Omega_c}\mathbf{q}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r})dV+\int_{\Omega_c}\mathbf{q}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r})dV-$$

$$-\oint_{\mathrm{Fr}(\Omega_2)}([\mathbf{u}_{\text{int}}(\mathbf{r})\times\mathbf{q}(\mathbf{r})]-[\mathbf{u}_{\text{ext}}(\mathbf{r})\times\mathbf{q}(\mathbf{r})])\mathbf{n}_2(\mathbf{r})dS-\oint_{\mathrm{Fr}(\Omega_1)}([\mathbf{u}_{\text{int}}(\mathbf{r})\times\mathbf{q}(\mathbf{r})]-[\mathbf{u}_{\text{ext}}(\mathbf{r})\times\mathbf{q}(\mathbf{r})])\mathbf{n}_1(\mathbf{r})dS$$

$$-\oint_{\mathrm{Fr}(\Omega_c)}([\mathbf{u}_{\text{int}}(\mathbf{r})\times\mathbf{q}(\mathbf{r})]-[\mathbf{u}_{\text{ext}}(\mathbf{r})\times\mathbf{q}(\mathbf{r})])\mathbf{n}_c(\mathbf{r})dS,\qquad(4)$$

где $\Omega_3=O_{R'''}$, $\Omega_2=O_{R''}\cap\Omega_{\text{full}}$, $\Omega_1=O_{R'}\cap\Omega$ (на чертеже области Ω_i отмечены соответствующими номерами, причем границы Ω_1 и Ω_2 жирно выделены – см. рис. 1); Fr – обозначение границы; $\mathbf{n}_c$, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ – векторы внешней единичной нормали, соответственно, к $\mathrm{Fr}(\Omega_c)$, $\mathrm{Fr}(\Omega_1)$ и $\mathrm{Fr}(\Omega_2)$; dS – элемент поверхности в поверхностном интеграле. В (4) учтено, что $\mathbf{q}\equiv\mathbf{0}$ на границе куба $O_{R'''}$.

На границах областей в смешанных произведениях $[\mathbf{u}\times\mathbf{q}]\mathbf{n}$ участвуют только касательные составляющие $\mathbf{u}_{\text{int}}$ и $\mathbf{u}_{\text{ext}}$. Выше было отмечено, что векторное $[\mathbf{u}_\tau\times\mathbf{q}]$ меняется непрерывно при переходе через границы Ω_c, Ω_1 и Ω_2, то есть $[\mathbf{u}_{\tau,\text{int}}\times\mathbf{q}]=[\mathbf{u}_{\tau,\text{ext}}\times\mathbf{q}]$. Следовательно, все поверхностные интегралы в формуле (4) равны нулю, и

$$\int_{\mathrm{R}^3}\mathbf{u}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})dV=\int_{\Omega_3}\mathbf{u}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{q}(\mathbf{r})dV=\int_{\Omega_3}\mathbf{q}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r})dV=\int_{\mathrm{R}^3}\mathbf{q}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r})dV.$$

То есть пространство K включается в $\boldsymbol{H}(\operatorname{rot},\mathrm{R}^3)$, причем для любого поля $\mathbf{u}\in\boldsymbol{K}$ обобщенный ротор совпадает с обычным в областях гладкости $\mathbf{u}$ (с точностью до замены компонент на эквивалентные функции). **Теорема доказана.**

Обозначим как $\boldsymbol{H}'$ пространство векторных полей, непрерывно дифференцируемых в R^3 и квадратично суммируемых в R^3 вместе со своими роторами. Очевидно, что $\boldsymbol{H}'$ является подпространством $\boldsymbol{H}(\operatorname{rot},\mathrm{R}^3)$. Для $\boldsymbol{H}'$ и $\boldsymbol{H}(\operatorname{rot},\mathrm{R}^3)$ справедливы следующие теоремы [6, 7].

Теорема 2. $\boldsymbol{H}'$ и $\boldsymbol{H}(\operatorname{rot},\mathrm{R}^3)$ являются плотными подпространствами $L_2(\mathrm{R}^3)$.

Теорема 3. Если последовательность $\mathbf{u}_n \in \boldsymbol{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3)$ сходится к $\mathbf{u} \in \boldsymbol{L}_2(\mathrm{R}^3)$ и при этом $\mathrm{rot}\mathbf{u}_n$ сходится к $\mathbf{v} \in \boldsymbol{L}_2(\mathrm{R}^3)$, то $\mathbf{u} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3)$ и $\mathrm{rot}\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Теорема 4. Для любого векторного поля $\mathbf{u} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3)$ существует такая последовательность $\mathbf{u}_n \in \boldsymbol{H}'$, что $\mathbf{u}_n$ сходится к $\mathbf{u}$ и $\mathrm{rot}\mathbf{u}_n$ сходится к $\mathrm{rot}\mathbf{u}$ по норме $L_2(\mathrm{R}^3)$.

Очевидно включение $\boldsymbol{H}' \subset \boldsymbol{K}$; по теореме 1, $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3)$. Следовательно, теорему (4) можно переформулировать, заменив $\boldsymbol{H}'$ на $\boldsymbol{K}$. Следует заметить, что в отличие от определения $\boldsymbol{H}'$, в определении $\boldsymbol{K}$ заложена информация о граничных условиях рассматриваемой начально-краевой задачи (в данном случае это граничные условия сопряжения для неограниченных областей с указанным при постановке задачи взаимным расположением).

Исследование начально-краевой задачи (1)-(3) сопряжено с исследованием свойств оператора $\hat{A}$, действующего на упорядоченные пары $(\mathbf{u};\mathbf{v}) \in (\boldsymbol{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3))^2$ (второй степенью обозначен декартов квадрат) по следующей формуле:

$$\hat{A}(\mathbf{u};\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathrm{rot}\mathbf{v} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathbf{u}; -\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\mathbf{u}\right). \tag{5}$$

В силу свойств кусочной непрерывности и ограниченности $\sigma(\mathbf{r})$ и $\varepsilon(\mathbf{r})$, а также положительности $\varepsilon_{\inf}$ (и, как следствие, ограниченности $1/\varepsilon$), можно утверждать, что оператор $\hat{A}$ отображает $(\boldsymbol{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3))^2$ в $(L_2(\mathrm{R}^3))^2$. Обозначим как $\hat{A}'$ линейный оператор, действующий по той же формуле (5), но на пространстве $\boldsymbol{K}^2$.

Теорема 5. Линейный оператор $\hat{A}$ является минимальным замкнутым расширением оператора $\hat{A}'$ в пространстве $(L_2(\mathrm{R}^3))^2$.

Доказательство. Предположим, что последовательность $(\mathbf{u}_n;\mathbf{v}_n) \in (\boldsymbol{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3))^2$ при $n \to +\infty$ сходится по среднеквадратичной норме к паре $(\mathbf{u};\mathbf{v})$, и, при этом, $\hat{A}(\mathbf{u}_n;\mathbf{v}_n) = (\mathbf{f}_n;\mathbf{g}_n)$ сходится к некоторой паре $(\mathbf{f};\mathbf{g})$. Тогда, в силу кусочной непрерывности и ограниченности $\sigma(\mathbf{r})$ и $\varepsilon(\mathbf{r})$, последовательность $(\mathrm{rot}\mathbf{u}_n;\mathrm{rot}\mathbf{v}_n) = (-\mu_0\mathbf{g}_n;\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{f}_n + \sigma\mathbf{u}_n)$ сходится по среднеквадратичной норме к $(-\mu_0\mathbf{g};\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{f} + \sigma\mathbf{u})$. Следовательно, по теореме 3, $(\mathbf{u};\mathbf{v}) \in (\boldsymbol{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3))^2$, то есть $(\mathbf{u};\mathbf{v})$ входит в область определения $\hat{A}$, причем $\mathrm{rot}\mathbf{u} = -\mu_0\mathbf{g}$ и $\mathrm{rot}\mathbf{v} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{f} + \sigma\mathbf{u}$. Кроме того,

$$\hat{A}(\mathbf{u};\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathrm{rot}\mathbf{v} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathbf{u}; -\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\mathbf{u}\right) = \left(\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}(\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{f} + \sigma\mathbf{u}) - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathbf{u}; -\frac{1}{\mu_0}(-\mu_0\mathbf{g})\right) = (\mathbf{f};\mathbf{g}),$$

то есть $\hat{A}(\mathbf{u};\mathbf{v}) = (\mathbf{f};\mathbf{g})$. Это означает замкнутость $\hat{A}$.

Если для пары $(\mathbf{u};\mathbf{v}) \in (\boldsymbol{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3))^2$ взять сходящуюся к ней по среднеквадратичной норме последовательность $(\mathbf{u}_n;\mathbf{v}_n) \in \mathbf{K}^2$ так, чтобы последовательность $(\mathrm{rot}\mathbf{u}_n;\mathrm{rot}\mathbf{v}_n)$ сходилась по среднеквадратичной норме к $(\mathrm{rot}\mathbf{u};\mathrm{rot}\mathbf{v})$, то последовательность $\hat{A}'(\mathbf{u}_n;\mathbf{v}_n) = \left(\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathrm{rot}\mathbf{v}_n - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathbf{u}_n; -\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\mathbf{u}_n\right)$, в силу кусочной непрерывности и ограниченности $\sigma(\mathbf{r})$ и $1/\varepsilon(\mathbf{r})$, будет сходиться к $\left(\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathrm{rot}\mathbf{v} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathbf{u}; -\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\mathbf{u}\right)$, то есть к $\hat{A}(\mathbf{u};\mathbf{v})$. Следовательно, $\hat{A}'$ для замкнутости следует доопределить, как минимум, до оператора $\hat{A}$. **Теорема доказана.**

Теоремы 2 и 5 обосновывают выбор функционального пространства для задачи (1)-(3), показывают, что выбор области определения для $\hat{A}$ в полной мере учитывает граничные условия (2).

Теорема 6. Для любой упорядоченной пары $(\mathbf{f};\mathbf{g}) \in (L_2(\mathrm{R}^3))^2$ и для любого $p > 0$ уравнение $\hat{A}(\mathbf{u};\mathbf{v}) - p(\mathbf{u};\mathbf{v}) = (\mathbf{f};\mathbf{g})$ имеет в пространстве $(\boldsymbol{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3))^2$ единственное решение, причем это решение удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\mathbf{u}\right\|_2^2 + \mu_0\|\mathbf{v}\|_2^2} \le \frac{1}{p}\cdot\sqrt{\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\mathbf{f}\right\|_2^2 + \mu_0\|\mathbf{g}\|_2^2}. \tag{6}$$

Доказательство. Рассматриваемое уравнение в подробной покомпонентной форме имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r})}\mathrm{rot}\mathbf{v} - \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r})}\mathbf{u} - p\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \\ -\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\mathbf{u} - p\mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{r}) \end{cases}. \tag{7}$$

В предположении, что $(\mathbf{u};\mathbf{v}) \in \left(H(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3)\right)^2$, доказательство неравенства (6) в рассматриваемом случае неограниченного проводника под слоем диэлектрика аналогично доказательству для ограниченных проводников [6, 7]. Первое уравнение системы (7) умножается на $\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{u}$, второе умножается на $\mu_0\mathbf{v}$; затем уравнения складываются, их сумма интегрируется по R^3, и используется следующее свойство векторных полей из $\boldsymbol{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3)$ [6,7]: $\int\limits_{\mathrm{R}^3}(\mathbf{u}(\mathbf{r})\mathrm{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})\mathrm{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}))dV = 0$. Затем применяется неравенство Коши-Буняковского для сумм и интегралов. Только следует понимать, что в рассматриваемом случае неограниченных областей для сходимости возникающих в доказательстве интегралов (в частности, для определенности $\left\|\sqrt{\varepsilon}\mathbf{u}\right\|_2$) важна не только кусочная непрерывность $\sigma(\mathbf{r})$ и $\varepsilon(\mathbf{r})$, но ограниченность этих функций, дополнительно предположенная при постановке задачи.

Единственность решения (7) непосредственно следует из неравенства (6): в случае однородной системы $\mathbf{f}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0}$ и $\mathbf{g}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0}$. Тогда, в силу неотрицательности каждого слагаемого подкоренного выражения в левой части (6), получаем, что $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0}$ и $\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0}$. Следовательно, в силу неравенства $\varepsilon_{\inf} > 1$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0}$. То есть у соответствующей (7) однородной системы есть только нулевое решение, что означает единственность решения (7) для любой пары $(\mathbf{f};\mathbf{g}) \in \left(L_2(\mathrm{R}^3)\right)^2$.

Для доказательства существования решения системы (7) в пространстве $\left(\mathbf{H}(\mathrm{rot},\mathrm{R}^3)\right)^2$ при $p > 0$ воспользуемся следующей системой интегро-дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{graddiv} - p^2\varepsilon_0\mu_0}{p}\int\limits_{\mathrm{R}^3} G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{f}(\mathbf{r}')dV' - \mu_0\mathrm{rot}\int\limits_{\mathrm{R}^3} G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{g}(\mathbf{r}')dV' + \\ + \frac{\mathrm{graddiv} - p^2\varepsilon_0\mu_0}{p\varepsilon_0}\int\limits_{\Omega'_{\text{полн}}} G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')(\sigma(\mathbf{r}') + p\varepsilon_0(\varepsilon(\mathbf{r}')-1))\mathbf{u}(\mathbf{r}')dV' \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{graddiv} - p^2\varepsilon_0\mu_0}{p}\int\limits_{\mathrm{R}^3} G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{g}(\mathbf{r}')dV' + \varepsilon_0\mathrm{rot}\int\limits_{\mathrm{R}^3} G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{f}(\mathbf{r}')dV' + \\ + \mathrm{rot}\int\limits_{\Omega'_{\text{полн}}} G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')(\sigma(\mathbf{r}') + p\varepsilon_0(\varepsilon(\mathbf{r}')-1))\mathbf{u}(\mathbf{r}')dV' \end{cases}, \tag{8}$$

где $G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}') = \exp\left(-p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)/4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$; Ω'_{full} – область, получающаяся из Ω_{full} удалением $\overline{\Omega_c}$. В системе уравнений (8) учтено, что в полости Ω_c $\sigma(\mathbf{r}) \equiv 0$, $\varepsilon(\mathbf{r}) \equiv 1$ и, следовательно, $\sigma(\mathbf{r}) + p\varepsilon_0(\varepsilon(\mathbf{r})-1) \equiv 0$. То есть вследствие того, что дефект-полость по электромагнитным свойствам идентичен внешней среде, окружающей Ω_{full}, Ω_c формально можно исключить из Ω_{full}, присовокупив к внешней среде.

Для исследования системы (11) оказываются полезными свойства объемного потенциала $\hat{P}[\mathbf{w}](\mathbf{r}) = \int\limits_{\Xi} G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{w}(\mathbf{r}')dV'$, ($\Xi$ – область, $\mathbf{w} \in \boldsymbol{L}_2(\Xi)$), а также свойства оператора $\hat{B} = \frac{p^2\varepsilon_0\mu_0 - \mathrm{graddiv}}{p\varepsilon_0}\hat{P}$.

Объемный потенциал $\hat{P}[\mathbf{w}](\mathbf{r})$ непрерывен во всех точках R^3, имеет квадратично суммируемые в R^3 первые и вторые обобщенные производные по Соболеву, а также удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца [1]:

$$\left(\mu_0\varepsilon_0 p^2 - \Delta\right)\hat{P}[\mathbf{w}] = \mathbf{w}(\mathbf{r}). \tag{9}$$

Оператор $\hat{B}$ при всех $p>0$ диссипативен в пространстве $L_2(\Xi)$ [1]: $\int\limits_{\Xi}\hat{B}[\mathbf{w}](\mathbf{r})\mathbf{w}(\mathbf{r})dV \geq 0$.

В доказательстве указанных свойств используется преобразование Фурье по пространственным координатам от векторного поля $\mathbf{w}\in L_2(\Xi)$, доопределенного нулевым вектором на все пространство R^3 [1]. Этот формальный прием в полной мере применим и в случае, когда область Ξ неограничена или объемно неодносвязна, и приводит к тем же результатам. Следовательно, можно утверждать, что указанные свойства $\hat{P}$ и $\hat{B}$ имеют место и для $\Xi=\mathrm{R}^3$, и для $\Xi=\Omega'_{\text{полн}}$.

Заметим, что систему уравнений (8) достаточно решить в области Ω'_{full}: в остальных точках R^3 $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ определяются из системы (8) непосредственным интегрированием. Кроме того, заметим, что в системе (8) достаточно решить первое уравнение относительно $\mathbf{u}$: во втором уравнении $\mathbf{v}$ просто выражается через $\mathbf{u}$. Первое уравнение в области Ω'_{full} можно представить в следующем виде:

$$b(\mathbf{r})\mathbf{U}+\hat{B}[\mathbf{U}]=\mathbf{U}_0(\mathbf{r}), \tag{10}$$

где $b(\mathbf{r})=\dfrac{1}{\sigma(\mathbf{r})+p\varepsilon_0(\varepsilon(\mathbf{r})-1)}$, $\mathbf{U}_0(\mathbf{r})=b(\mathbf{r})\cdot\left(\dfrac{\operatorname{graddiv}-p^2\varepsilon_0\mu_0}{p}\int\limits_{\mathrm{R}^3}G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{f}(\mathbf{r}')dV' - \mu_0\operatorname{rot}\int\limits_{\mathrm{R}^3}G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{g}(\mathbf{r}')dV'\right)$,

$\mathbf{U}=(\sigma+p\varepsilon_0(\varepsilon-1))\mathbf{u}$.

При диссипативном операторе $\hat{B}$ для существования и единственности решения уравнения вида (10) в пространстве $L_2(\Omega'_{\text{full}})$ достаточно, чтобы функция $b(\mathbf{r})$ была локально суммируема, ограничена и допускала нижнюю положительную оценку [1]. В пределах Ω'_{full} для проводящей среды $b(\mathbf{r})=\dfrac{1}{\sigma(\mathbf{r})}$, а для диэлектрической среды $b(\mathbf{r})=\dfrac{1}{p\varepsilon_0(\varepsilon(\mathbf{r})-1)}$. Функции $\sigma(\mathbf{r})$ и $\varepsilon(\mathbf{r})$ непрерывны в каждой из отдельных сред, допускают непрерывные продолжения на границы сред, $\sigma_{\inf}>0$ у проводящих сред и $\varepsilon_{\inf}>1$ у диэлектрических сред. Следовательно, $b(\mathbf{r})$ допускает непрерывные продолжения на границу Ω_c снаружи, на границу Ω_{full} изнутри, а также на границу Ω изнутри и снаружи. Это означает, что в пределах Ω'_{full} $b(\mathbf{r})$ локально суммируема. Очевидна ограниченность $b(\mathbf{r})$ сверху: $b(\mathbf{r})\leq\max\left\{\dfrac{1}{p\varepsilon_0(\varepsilon_{\inf}-1)};\dfrac{1}{\sigma_{\inf}}\right\}$. Кроме того, $b(\mathbf{r})$ имеет очевидную нижнюю положительную оценку: $b(\mathbf{r})\geq\min\left\{\dfrac{1}{p\varepsilon_0(\varepsilon_{\sup}-1)};\dfrac{1}{\sigma_{\sup}}\right\}$, где $\sup$ – обозначение точной верхней грани. Следовательно, уравнение (10) имеет единственное решение в пространстве $L_2(\Omega'_{\text{full}})$, и система (8) имеет единственное решение в пространстве $(L_2(\Omega'_{\text{full}}))^2$. Тогда в силу свойств $\hat{P}$ и $\hat{B}$ та же система (8) имеет единственное решение в пространстве $(L_2(\mathrm{R}^3))^2$.

В силу свойств оператора $\hat{P}$ и свойств обобщенного ротора, к правым частям уравнений системы (8) можно применить операцию rot в обобщенном смысле определения 4, причем в результате применения этой операции получатся поля из $L_2(\mathrm{R}^3)$; следовательно, решение системы (8) $(\mathbf{u};\mathbf{v})\in(\boldsymbol{H}(\operatorname{rot},\mathrm{R}^3))^2$. Кроме того, применение операции rot к системе (8), с учетом свойства (9), приводит к системе уравнений (7). То есть решение системы (8) является решением системы (7) и, следовательно, решение системы (7) в пространстве $(\boldsymbol{H}(\operatorname{rot},\mathrm{R}^3))^2$ существует. **Теорема доказана.**

Заметим, что в силу неравенств $\|\mathbf{u}\|_2\leq\sqrt{\varepsilon_{\inf}}\|\mathbf{u}\|_2\leq\left\|\sqrt{\varepsilon}\mathbf{u}\right\|_2\leq\sqrt{\varepsilon_{\sup}}\|\mathbf{u}\|_2$ выражение $\left\|\sqrt{\varepsilon}\mathbf{u}\right\|_2$ определяет одну из эквивалентных среднеквадратичных норм в пространстве $L_2(\mathrm{R}^3)$; следовательно, выражение

$$\|(\mathbf{u};\mathbf{v})\|=\sqrt{\varepsilon_0\left\|\sqrt{\varepsilon}\mathbf{u}\right\|_2^2+\mu_0\|\mathbf{v}\|_2^2} \tag{11}$$

определяет одну из эквивалентных среднеквадратичных норм в пространстве $(L_2(\mathrm{R}^3))^2$.

Обозначим как $\hat{I}$ единичный оператор; теорема 6 допускает следующую эквивалентную формулировку.

Теорема 6'. Оператор $\left(\hat{A} - p\hat{I}\right)^{-1}$ определен на всем пространстве $\left(L_2\left(\mathrm{R}^3\right)\right)^2$, причем относительно нормы (11) $\left\|\left(\hat{A} - p\hat{I}\right)^{-1}\right\| \le \frac{1}{p}$.

Из теорем 2, 5 и 6' непосредственно следует, что для существования и единственности решения начально-краевой задачи (1)-(3) достаточно, чтобы плотность стороннего тока $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ на полуинтервале $t \ge 0$ имела вторую непрерывную производную в $L_2\left(\mathrm{R}^3\right)$ по t, и векторное поле $\mathbf{j}(\mathbf{r},0)$ принадлежало области определения оператора $\hat{A}$ [10]. Двукратная непрерывная дифференцируемость $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ по t в $L_2\left(\mathrm{R}^3\right)$ при $t \ge 0$ изначально предположена при постановке задачи (1)-(3). Также при постановке задачи предположено, что $\mathbf{j}(\mathbf{r},0) \equiv \mathbf{0}$, а тождественно нулевое векторное поле, очевидно, входит в область определения $\hat{A}$. Следовательно, существование и единственность решения начально-краевой задачи (1)-(3) доказаны.

Заключение

В данной работе исследована начально-краевая задача электродинамики для неограниченного неферромагнитного дефектного проводника, находящегося под слоем диэлектрика. Выбран функциональный класс для постановки начально-краевой задачи. Показано, что выбранный функциональный класс согласуется с граничными условиями задачи – условиями непрерывности касательных компонент напряженностей. Доказано, что в выбранном функциональном классе существует единственное решение рассмотренной начально-краевой задачи.

Список литературы
References

1. Дякин В.В., Сандовский В.А. 2008. Задачи электродинамики в неразрушающем контроле. Екатеринбург, Институт физики металлов, 390.

Dakin V.V., Sandovskii V.A. 2008. Zadachi elektrodinamiki v nerazrushaiuschem kontrole [Electrodynamics problems in the nondestructive testing]. Yekaterinburg, Institute of Metal Physics, 390. (in Russian)

2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л.. 1980. Неравенства в механике и физике. Перев. с фр. М., Наука, 1980, 384.

Duvo G., Lions J.-L. 1980. Neravenstva v makhanike i fizike [Inequalities in mechanics and physics]. Moscow, Nauka, 384 (Duvo G., Lions J.-L. 1972. Les inequations en mecanique et en physique, Paris, Dunod, 387.).

3. Калинин А.В. 2007. Математические задачи физической диагностики. Корректность задач электромагнитной теории в стационарном и квазистационарном приближении. Нижний Новгород, Нижегородский государственный университет, 121.

Kalinin A.V. 2007. Matematicheskie zadachi fizicheskoj diagnostiki. Korrektnost' zadach v statzionarnom i kvazistatzionarnom priblizhenii [Mathematical problems of physical diagnostics. Correctness of problems of the electromagnetic theory in the stationary and quasi-stationary approximation]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State University, 121. (in Russian)

4. Дякин В.В., Марвин С.В. 2008. Начально-краевая задача и интегродифференциальные уравнения электродинамики для неоднородного проводящего тела. Журнал вычислительной математики и математической физики, 48 (2): 288–296.

Dyakin V.V., Marvin S.V. 2008. Initial-boundary value problem and integrodifferincial equations electrodynamics for an inhomogeneous conductive body. Computational mathematics and mathematical physics, 48 (2): 275–283.

5. Марвин С.В., Дякин В.В. 2008. Нестационарная краевая задача электродинамики для немагнитного проводящего образца. Электричество, 12: 30–36.

Marvin S.V., Dyakin V.V. 2008. Initial-boundary value problem for a nonmagnetic conductive body. Elektrichestvo [Electricity], 12: 30-36. (in Russian)

6. Марвин С.В. 2016. Существование и единственность решения начально-краевой задачи для однородной системы уравнений Максвелла в случае неферромагнитного дефектного металлического тела. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, 1: 105-117.

Marvin S.V. 2016. Existence and the uniqueness of solution of initial-boundary problem for the uniform system of equations of Maxwell in the case of nonferromagnetic defective metallic body. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika [Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 1: 105-117. (in Russian)

7. Марвин С. В. 2016. Начально-краевая задача структуроскопии неферромагнитного металлического тела с инородными диэлектрическими включениями остаточным полем мгновенно выключенного стороннего тока. Дефектоскопия, 2: 42-54.

Marvin S.V. 2016. An initial-boundary value problem of structurescopy of a nonferromagnetic metal solid with foreign dielectric inclusions using the residual field of an instantaneously cut-off extraneous current. Russian journal of nondestructive testing, 52 (2): 85-94.

8. Марвин С.В. 2016. Начально-краевая задача электромагнитного контроля дефектного ферромагнитного проводника остаточным полем мгновенно выключенного стороннего тока. Дефектоскопия, 11: 27-38.

Marvin S.V. 2016. Initial-boundary value problem of electromagnetic testing of a flawed ferromagnetic conductor by the residual field of an instantaneously cut-off current. Russian journal of nondestructive testing, 52 (11): 638-646.

9. Кудрявцев Л.Д. 1981. Курс математического анализа. Т. 2. М., Высшая школа, 584.

Kudryavtsev L. D. 1981. Kurs matematicheskogo analiza [Course of mathematical analysis]. Vol. 2. Moscow, Vysshaya shkola, 584. (in Russian)

10. Крейн С.Г. 1967. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., Наука, 464.

Krein S.G. 1967. Lineinie differencial'nie uravneniia v banahovom prostranstve [Linear differential equations in the Banach space]. Moscow, Nauka, 464. (in Russian)