УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

NONLOCAL BORDER PROBLEMS FOR A MIXED TYPE EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

Л.Р. Рустамова
L.R. Rustamova

Ингушский государственный университет, Россия, 386132, Республика Ингушетия, г. Назрань, м.о.Гамурзиево ул. Магистральная 39

Ingush state university, Ingush Republic. Nazran. c.d. Gamurzievo, 39, Magistralnaya, 386132, Russia

E-mail: rustamoval@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассматриваются нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками в области ограниченной отрезками заданных прямых. Ставится задача - определить функцию, обладающую определенными свойствами и удовлетворяющую определенными граничными условиями. Доказывается существование единственности решения поставленной задачи.

Abstract. In this paper, we consider nonlocal boundary value problem for a mixed-type equation of the third order with multiple characteristics within the domain bounded by given line segments. We state the problem to determine function with specific features that satisfies certain boundary conditions. The existence of solution uniqueness to the stated problem is proved.

Ключевые слова: определить функцию, граничные условия, относительно коэффициентов уравнения, справедливо равенство, путем дифференцирования, в результате преобразований.

Key words: to define the function, border conditions, regarding the coefficients of the equation, true equality, by differentiation, as a result of reforms.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xxx}+a_1(x,y)u_x+a_0(x,y)u-u_y, & y>0, \\ \left(\alpha\dfrac{\partial}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), & y<0 \end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B прямых x = 0, y =h, x = l, соответственно, и характеристиками AC: x + y = 0, BC: x – y = l, уравнения (1), при y<0 выходящими из точек A(0;0), B(l;0). Пусть $\Omega_+=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega_-=\Omega\cap(y<0)$, $u(x,0)=\tau(x)$, $u_y(x,0)=\nu(x)$.

Задача 1. Определить функцию u(x, y), обладающую следующими свойствами: 1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^{3,1}_{x,y}(\Omega_+)\cap C^2(\Omega_-)$, 2) u(x,y) – решение уравнения (2.1.1) в $\Omega_+\cup\Omega_-$, 3) $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(l,y)=\varphi_2(y),$$

$$u_x(0,y)-u_x(l,y)=\varphi_3(y),\quad 0\le y\le h, \tag{2}$$

$$u\big|_{AC}=\psi_1(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_2(x),\qquad 0\le x\le l/2, \tag{3}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$ и $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – известные функции, причем $\varphi_1(y)\in C^1[0,h]$, $\varphi_{2,3}(y)\in C[0,h]$, $\psi_1(x)\in C^2[0,l/2]$, $\psi_2(x)\in C^1[0,l/2]$, $\varphi_1(0)=\psi_1(0)$.

Относительно коэффициентов уравнения (1) в дальнейшем предполагается, что $a_0(x,y)$, $a_1(x,y)$, $a_{1x}(x,y)\in C(\Omega_1)$, $\alpha,\beta=const$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Вначале рассмотрим случай, когда $\alpha=1$, $\beta=0$.

Пусть $u(x,y)=\begin{cases}u_1(x,y), & y>0,\\ u_2(x,y), & y<0.\end{cases}$

Тогда любое решение уравнения (1) в области Ω_- при $y\neq 0$ представимо в виде [1]

$$u_2(x,y)=\upsilon_2(x,y)+\omega_2(y), \tag{4}$$

где $\upsilon_2(x,y)$ – регулярное решение уравнения

$$\upsilon_{2xx}-\upsilon_{2yy}=0, \quad y<0, \tag{5}$$

$\omega_2(y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем без ограничения общности считаем, что $\omega_2(0)=\omega_2'(0)=0$.

Очевидно, что функция

$$\upsilon_2(x,y)=f_1(x+y)+f_2(x-y)$$

является общим решением уравнения (5), а следовательно, из (4) находим:

$$u_2(x,y)=f_1(x+y)+f_2(x-y)+\omega_2(y). \tag{6}$$

Удовлетворяя (6) условиям (3), а также условию $u_{2y}(x,0)=\nu(x)$, приходим к следующей системе относительно $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\omega_2(x)$:

$$\begin{cases}u_2(x,y)\big|_{AC}=\psi_1(x),\\ \dfrac{\partial u_2(x,y)}{\partial n}\Big|_{AC}=\psi_2(x),\\ u_{2y}(x,0)=\nu(x).\end{cases} \tag{7}$$

Решая систему (7), находим

$$f_1(x)=\int_0^x\psi_1'\left(\frac{t}{2}\right)d\frac{t}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^x\psi_2\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

$$f_2(x)=\psi_1\left(\frac{x}{2}\right)-f_1(0)-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x/2}\psi_2(t)dt-f_1'(0)x$$

$$\omega_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{-x}\psi_2(t)dt-2f_1'(0)x$$

Подставляя найденные значения искомых функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $\omega_2(x)$ в общее решение (6), находим

$$u_2(x,y)=\psi_1\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right)-\psi_1(0)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{x+y}\psi_2\left(\frac{t}{2}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x+y}\psi_2(t)dt+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{-y}\psi_2(t)dt-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{x-y}{2}}\psi_2(t)dt+\int_0^{x+y}\nu(t)dt$$

(8)

Справедлива следующая

Лемма 1. Если $u_2\big|_{AC}=0,\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{AC}=0,$ то для любого решения задачи 1 в области Ω_- справедливо равенство

$$I=\int_0^l \tau(t)\nu(t)dt=0,$$

(9)

где $\lim\limits_{y\to+0}u_1(x,y)=\tau(x),\quad \lim\limits_{y\to+0}u_{1x}(x,y)=\nu(x)$.

Доказательство. При $\psi_1(x)=\psi_2(x)=0$ из представления (8) имеем

$$u_2(x,y)=\int_0^{x+y}\nu(t)dt,$$

откуда

$$u_2(x,0)=\int_0^x \nu(t)dt=\tau(x).$$

Путем дифференцирования из последнего соотношения находим

$$\nu(x)=\tau'(x).$$

(10)

Вычислим теперь интеграл вида

$$I=\int_0^l \tau(t)\nu(t)dt.$$

(11)

С учетом соотношения (10) имеем

$$I=\int_0^l \tau(t)\nu(t)dt=\int_0^l \tau(t)\tau'(t)dt=\left.\frac{\tau^2(t)}{2}\right|_0^l=\frac{\tau^2(l)-\tau^2(0)}{2}.$$

Но в силу условия согласования $\tau(0)=\varphi_1(0)=0$, $\tau(l)=\varphi_2(0)=0$, откуда получаем (9).

Далее займемся исследованием вопроса о поведении интеграла (11) при предельном переходе из области Ω_+ на линию $y=0$. Здесь справедлива следующая

Лемма 2. Пусть коэффициенты $a_0(x,y)$ и $a_1(x,y)$ уравнения (1) таковы, что $2a_0(x,0)\neq a_1'(x,0)$ и выполняются равенства

$$\lim_{x\to+0}u_1(x,0)u_{1xx}(x,0)=0,\quad \lim_{x\to l-0}u_1(x,0)u_{1xx}(x,0)=0 \tag{12}$$

Тогда равенство (9) может иметь место в том и только в том случае когда $\tau(x)\equiv 0$.

Доказательство. Переходя в уравнении (1) к пределу $y\to+0$, получим фундаментальное соотношение между функциями $u_2(x,0)=\tau(x)$ и $u_{2y}(x,0)=\nu(x)$ следующего вида

$$\tau'''(x)+a_1(x,0)\tau'(x)+a_0(x,0)\tau(x)=\nu(x). \tag{13}$$

С учетом однородных граничных условий, соответствующих условиям (2) из (13) находим

$$I=\int_0^l \tau(x)\nu(x)dx=\int_0^l \tau(x)\tau'''(x)dx+\int_0^l a_1(x,0)\tau(x)\tau'(x)dx+\int_0^l a_0(x,0)\tau^2(x)dx=$$

$$=\tau(x)\tau''(x)\Big|_0^l-\int_0^l\tau'(x)\tau''(x)dx+\int_0^l a_1(x,0)d\left(\frac{\tau^2(x)}{2}\right)+\int_0^l a_0(x,0)\tau^2(x)dx=$$

$$=-\int_0^l\tau'(x)d(\tau'(x))+\frac{a_1(x,0)}{2}\tau^2(x)\Big|_0^l-\frac{1}{2}\int_0^l a_1'(x,0)\tau^2(x)dx+\int_0^l a_0(x,0)\tau^2(x)dx=$$

$$=\frac{\tau'^2(0)-\tau'^2(l)}{2}+\frac{a_1(l,0)\tau^2(l)-a_1(0,0)\tau^2(0)}{2}+\frac{1}{2}\int_0^l[2a_0(x,0)-a_1'(x,0)]\tau^2(x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^l[2a_0(x,0)-a_1'(x,0)]\tau^2(x)dx\,. \qquad (14)$$

Из равенства (14), в силу условия $2a_0(x,0)\neq a_1'(x,0)$ леммы 2 равенство (9) может иметь место в том и только в том случае, когда $\tau(x)\equiv 0$. При этом из соотношений (10) и (13) получаем, что и $\nu(x)\equiv 0$. При этом из формулы (8) следует, что $u_2(x,y)\equiv 0$ в области D_-. С учетом того, что $\tau(x)\equiv 0$, а также с учетом однородных условий, соответствующих граничным условиям (2), в области Ω_+ приходим к следующей задаче

$$u_{1xxx}+a_1(x,y)u_{1x}+a_0(x,y)u_1-u_{1y}=0\,, \qquad (15)$$

$$u_1(0,y)=0\,,\ u_{1x}(0,y)-u_{1x}(l,y)=0\,,\ u_1(l,y)=0\,, \qquad (16)$$

$$u_1(x,0)=0. \qquad (17)$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Задача (15) – (17) имеет только тривиальное решение, $u_1(x,y)\equiv 0$ в Ω_+.

Методом от противного, доказываем, что $u(x,y)\equiv 0$ в области $\overline{\Omega}$, откуда вытекает единственность решения исследуемой задачи 1.

Докажем теперь существование решения задачи1, когда $a_0(x,y)=const=\lambda,\ a_1(x,y)=0$. Переходя в уравнении (1) к пределу при $y\to+0$, получим

$$\tau'''(x)-\nu(x)+\lambda\tau(x)=0\,. \qquad (18)$$

Соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части Ω_- на линию y=0, имеет вид

$$\tau'(x)-\nu(x)=\psi_1'\left(\frac{x}{2}\right)-\omega_2'\left(\frac{x}{2}\right). \qquad (19)$$

Исключая из равенств (18) и (19) $\nu(x)$, получим двухточечную нелокальную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка со спектральным параметром

$$\tau'''(x)-\tau'(x)+\lambda\tau(x)=\rho(x)\,, \qquad (20)$$

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau(l)=\varphi_2(0),\ \tau'(0)-\tau'(l)=\varphi_3(0)\,, \qquad (21)$$

где $\rho(x)=-\psi_1'(x/2)+\omega_2'(x/2)$.

Решение задачи (20), (21) существенно зависит от расположения корней характеристического уравнения

$$k^3-k+\lambda=0\,, \qquad (22)$$

соответствующему однородному уравнению

$$\tau'''(x)-\tau'(x)+\lambda\tau(x)=0\,. \qquad (23)$$

Введем обозначение

$$S=\frac{\lambda^2}{4}-\frac{1}{27}. \qquad (24)$$

Известно [2], что уравнение (22) имеет один действительный и два комплексных корня, если $S > 0$. Оно имеет три различных действительных корня, если $S < 0$. При $S = 0$ все три корня действительны, причем два из них равны.

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$\Delta_0 = -2ch2kl + kl(1-3kl) + (1+3kl)e^{-kl} \neq 0 \text{, если } S = 0; \tag{25}$$

$$\Delta_1 = (k_1 - k_2)\left(e^{lk_3} + e^{l(k_1+k_2)}\right) + (k_2 - k_1)\left(e^{lk_3} + e^{l(k_2+k_3)}\right) + \\ + (k_3 - k_1)\left(e^{lk_2} + e^{l(k_1+k_3)}\right) \neq 0 \text{ если } S < 0; \tag{26}$$

$$\Delta_2 = 2shal(b\cos bl - 3a\sin bl) - be^{-2al} \neq 0, \text{ если } S > 0, \tag{27}$$

где $k = \frac{3}{2}\lambda$, $k_1 = 1{,}2b$, $k_2 = -2{,}4b - 1{,}04\sqrt{1-b^2}$, $k_3 = 2{,}4b + 1{,}04\sqrt{1-b^2}$, $a = \bar{u} + \bar{\upsilon}$,

$b = \sqrt{3}(\bar{u} + \bar{\upsilon})/2$, $\bar{u} = \sqrt[3]{-\frac{\lambda}{2} + \sqrt{S}}$, $\bar{\upsilon} = \sqrt[3]{-\frac{\lambda}{2} - \sqrt{S}}$, при $S = 0$, $S < 0$ и $a = \left(1/\sqrt{3}\right)\sin 2\varphi$,

$b = ctg\varphi$ при $S > 0$, тогда задача (20), (21) разрешима, притом единственным образом.

Рассмотрим теперь случай, когда $a_0(x,y) \neq const$, $a_1(x,y) \neq 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$.
Положим, что

$$u_1(x,0) = \tau_1(x),\ u_{1y}(x,0) = \nu_1(x), \tag{28}$$

$$u_2(x,0) = \tau_2(x),\ u_{2y}(x,0) = \nu_2(x), \tag{29}$$

тогда условия согласования принимают вид $\tau_1(0) = \varphi_1(0)$, $\tau_1(l) = \varphi_2(0)$,

$$\tau_1'(0) - \tau_1'(l) = \varphi_3(0), \tau_2'(0) + \nu_2(0) = \sqrt{2}\varphi_1(0).$$

Воспользуемся тем, что любое регулярное решение уравнения (1) в области Ω_2 представимо
в виде $u_2(x,y) = \upsilon(x,y) + \omega(y)$, где $\upsilon(x,y)$ – регулярное решение уравнения $L\upsilon = \upsilon_{xx} - \upsilon_{yy} = 0$, а $\omega(y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, которую можно подчинить условию $\omega(0) = \omega'(0) = 0$.

Пользуясь общим представлением

$$u_2(x,y) = F_1(x+y) + F_2(x-y) + \omega(y)$$

решения уравнения (1) в области Ω_-, находим, что решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3), имеет вид

$$u_2(x,y) = F_1(x+y) + \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) + 1/\sqrt{2}\int_0^{x-y}\psi_2(t/2)dt - \\ -1/\sqrt{2}\int_0^{-2y}\psi_2(t/2)dt - (x+y)F_1'(0) - F_1(0).$$

Отсюда получаем функциональное соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$ в виде

$$\tau_2'(x) - \nu_2(x) = \xi(x), \tag{30}$$

где $\xi(x) = \psi_1'(x/2) + \sqrt{2}\psi_2(x/2) - \sqrt{2}\psi_2(0)$.

Переходя к пределу в уравнении (1) при $y \to +0$, получим соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau_1'''(x) - \nu_1(x) + a_1(x,0)\tau'(x) + a_0(x,0)\tau_1(x) = 0. \tag{31}$$

По условию задачи, $\tau_2'(x) = \tau_1'(x) = \tau'(x)$, $\nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu(x)$.

Тогда, учитывая граничные условия (2), приходим к нелокальной двухточечной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\tau'''(x) + (a_1(x,0) - 1)\tau'(x) + a_0(x,0)\tau(x) = \xi(x), \tag{32}$$

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau(l)=\varphi_2(0),\ \tau'(0)-\tau'(l)=\varphi_3(0). \tag{33}$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 3. Если $u(x,-x)=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,-x)=0$, то для любого решения уравнения (1) имеет место неравенство

$$J=\int_0^x \tau_2(t)\nu_2(t)dt \ge 0 \text{ при любом } x\in[0,l].$$

Доказательство. Действительно, если $\psi_1(x)=0,\ \psi_2(x)=0,$ то $\xi(x)=0$. Используя $\tau_2'(x)-\nu_2(x)=\xi(x)$, получим

$$J=\int_0^x \tau_2(t)\nu_2(t)dt=\frac{\tau_2^2(x)}{2}\ge 0. \tag{34}$$

Лемма 4. Если $a_1'(x,0)-2a_0(x,0)\ge 0$ и

$\lim\limits_{x\to+0} u(x,0)u_{xx}(x,0)=0,\ \lim\limits_{x\to l-0} u(x,0)u_{xx}(x,0)=0,\ \ \varphi_1(0)=\varphi_2(0)=\varphi_3(0)=0,$ то для любого решения уравнения (1) справедливо неравенство

$$J=\int_0^x \tau_1(t)\nu_1(t)dt\le 0,\ \forall x\in[0,l].$$

Доказательство. Из равенства

$$\tau_1'''(x)-\nu_1(x)+a_1(x,0)\tau'(x)+a_0(x,0)\tau_1(x)=0$$

имеем

$$J=\int_0^l \tau_1(t)\nu_1(t)dt=\int_0^l \tau_1(x)\left[\tau_1'''(x)+a_1(x,0)\tau_1'(x)+a_0(x,0)\tau_1(x)\right]dx.$$

В результате простых преобразований будем иметь

$$J=-\frac{1}{2}\int_0^l (a_1'-2a_0)\tau_1^2(x)dx-\frac{1}{2}\left(\tau_1'^2(l)-\tau_1'^2(0)\right)=-\frac{1}{2}\int_0^l \left(a_1'(x,0)-2a_0(x,0)\right)\tau_1^2(x)dx\le 0, \tag{35}$$

так как $\tau'(l)=\tau'(0)$. Сравнивая (34), (35) заключаем, что $J=0$ или, с учетом вида правой части (34), имеем $\tau_1(x)=\tau_2(x)=0$.

Доказывается [1,3] следующая

Теорема 3. Пусть $u(x,y)$ – решение в области Ω_+ однородной задачи 1. Тогда $u(x,y)\equiv 0$ в Ω.

Опираясь на найденную функцию $\tau(x)$, в области Ω_+ приходим к задаче 2.

Задача 2. Определить решение в области Ω_+ уравнения (1) при $y>0$, непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega_+}$ и удовлетворяющее граничным условиям (2) и $u(x,0)=\tau(x)$.

А в области Ω_- решаем задачу 3. [4,5]

Задача 3. Определить решение уравнения (1) в области Ω_- при $y<0$, непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega_-}$, удовлетворяющее граничным условиям (3) и $u(x,0)=\tau(x)$.

Опираясь на все проведенные доказательства, имеет место

Теорема 4. Если $\varphi_1(y)\in C^1[0,h],\ \varphi_2(y),\ \varphi_3(y)\in C[0,h],\ \ \psi_1(x)\in C^2[0,l/2],$ $\psi_2(x)\in C^1[0,l/2],\ \ a_0(x,y),\ a_1(x,y),\ a_{1x}(x,y)\in C(\overline{\Omega_+}),\ \ \varphi_1(0)=\psi_1(0),\ \ \alpha,\beta=const$, , $\alpha^2+\beta^2\ne 0$, $\beta_2(y)\ne 0$, то существует единственное решение задачи 1.

Список литературы
References

1. Джураев Т.Д. 1979. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно – составного типов. / Т.Д. Джураев // Ташкент: ФАН. С238.

Juraev T.D. 1979 Boundary value problems for equations of mixed and mixed - composite type. / TD Juraev Tashkent //: FAN. p 238

2. Сабитов К.Б. 1989. К теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа со спектральным параметром. / К.Б. Сабитов // Дифференц. уравнения. Т.25, №1, С.117-126.

Sabitov K.B. 1989. The theory of equations of mixed parabolic-hyperbolic type with a spectral parameter. / KB Sabitov // Differential equation. V.25, №1, S.117-126.

3. Джураев Т.Д. 1986. Краевые задачи для уравнений параболо- гиперболического типа. / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов // Ташкент: ФАН, С. 220.

Juraev T.D. 1986 Boundary value problems for equations of hyperbolic type parabolic-hyperbolic type with a spectral parameter. / Juraev T.D., Sopuev A.M. Mamazhanov // Tashkent: FAN, S. 220.

4. Елеев В.А. 1976. О некоторых задачах типа задачи Коши и задач со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения. / В.А. Елеев // Дифференц. уравнения. Т.12, №1 С. 44-58.

Eleev V.A. 1976. Some problems of Cauchy type problems and problems with shift for a degenerate hyperbolic equation. / VA Eleev // Differential equations. Vol.12, №1 pp 44-58.

5. Иргашев Ю. 1976. Некоторые краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. / Ю. Иргашев // Ташкент: ФАН. С.17-27.

Irgashev Yu. 1976. Some boundary value problems for a third order equations with multiple characteristics. / Yu Irgashev // Tashkent: FAN. p.17-27.