УДК 514.742.24

О ВОЗМОЖНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ВЕКТОРОВ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ON POSSIBILITY OF VECTOR PRODUCT DETERMINATION OF TWO VECTORS IN MULTIDIMENSIONAL SPACE

И.П. Попов
I.P. Popov

Курганский государственный университет, Россия, 640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4

Kurgan state university, 63/4 Sovetskaja St, Kurgan, 640020, Russia

E-mail: ip.popow@yandex.ru

Аннотация
Целью работы является определение векторного произведения двух векторов **c** = [**a**, **b**] в n-мерном евклидовом пространстве при $n > 3$, которое удовлетворяет общепринятому инвариантному определению, в соответствии с которым оно является вектором, модуль которого равен площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**, его направление перпендикулярно обоим векторам и векторы **a**, **b** и **c** образуют правую тройку векторов. В работе применяются ортонормированные базисы. Доказывается, что для двух линейно независимых векторов **a** и **b** в R^n существует их векторное произведение. Вводится понятие m-расщепления и симметричного m-расщепления базисных векторов, под которыми понимается трансформация R^n в R^{n+m-1} путем замены $\mathbf{e}_i$ на m векторов $\mathbf{e}_{i1},...,\mathbf{e}_{ij},...,\mathbf{e}_{im}$, ортогональных друг другу и всем другим базисным векторам исходного базиса. Решается некоторым образом обратная задача – при известном векторном произведении определение координат всех трех векторов в R^n. Устанавливается условие, в соответствии с которым векторное произведение **c** = [**a**, **b**] в R^n лежит на одной прямой с проекцией суммы базисных ортов на (n – 2)-плоскость, перпендикулярную векторам **a** и **b**.

Abstract
The aim of the paper is to define the vector product of two vectors **c** = [**a**, **b**] in n-dimensional Euclidean space for $n > 3$. Orthonormal bases are used in this paper. It is proved that for two linearly independent vectors **a** and **b** in R^n exists their vector product. We introduce the notion of m-splitting and symmetric m-splitting of basis vectors, by which is meant a transformation R^n in R^{n+m-1} by replacing $\mathbf{e}_i$ by m vectors $\mathbf{e}_{i1},...,\mathbf{e}_{ij},...,\mathbf{e}_{im}$ orthogonal to each other and to all other basis vectors of the original basis. The inverse problem is solved in some way – for a known vector product the definition of the coordinates of all three vectors in R^n. A condition is established in accordance with which the vector product **c** = [**a**, **b**] in R^n lies on one line with the projection of the sum of the basis vectors to the (n – 2)-plane perpendicular to the vectors **a** and **b**.

Ключевые слова: векторное произведение, многомерное пространство, базис, расщепление.
Keywords: vector product, multidimensional space, basis, splitting.

Целью работы является установление векторного произведения двух векторов **c** = [**a**, **b**] в n-мерном евклидовом пространстве при $n > 3$, которое, безусловно, удовлетворяет общепринятому инвариантному определению, в соответствии с которым оно является вектором, модуль которого равен площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**, его направление перпендикулярно обоим векторам и векторы **a**, **b** и **c** образуют правую тройку векторов.

Далее применяются ортонормированные базисы [1].

Теорема существования

Теорема 1. *Для двух линейно независимых векторов* **a** *и* **b** *в* R^n *существует их векторное произведение* **c** = [**a**, **b**].

Доказательство. Три линейно независимых вектора **a**, **b** и **g** имеют инвариантное описание, включающее в себя длины векторов, углы между ними и их взаимную ориентацию. Для каждого из этих трех векторов *однозначно* определена их проекция на любой другой вектор. Другими словами, определены их попарные скалярные произведения.

В этой связи векторы **a**, **b** и **g** могут иметь *однозначное* координатное описание в базисах любой размерности, начиная с 3 (пассивная точка зрения (alias)). При координатном описании они сохраняют размеры, углы между ними и взаимную ориентацию, поскольку в базисе любой размерности их попарные скалярные произведения остаются неизменными. Другими словами, координатное описание той или иной размерности при пассивной точке зрения не меняет сущность векторов и их отношений друг к другу. Следовательно, если в качестве вектора **g** рассматривать вектор **c**, являющийся при инвариантном описании векторным произведением векторов **a** и **b**, то его сущность в этом качестве не изменится при координатном описании в R^n. Теорема доказана.

Расщепление базисных векторов

Определение 1. *m-расщеплением базисного вектора* $\mathbf{e}_i$ *является трансформация* R^n *в* R^{n+m-1} *путем замены* $\mathbf{e}_i$ *на m векторов* $\mathbf{e}_{i1},\ldots,\mathbf{e}_{ij},\ldots,\mathbf{e}_{im}$, *ортогональных друг другу и всем другим базисным векторам исходного базиса, при этом*

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{m} k_{ij}\mathbf{e}_{ij},$$

где k_{ij} *– направляющие косинусы* $\mathbf{e}_i$ *в базисе* $\mathbf{e}_{i1},\ldots,\mathbf{e}_{ij},\ldots,\mathbf{e}_{im}$.

Выбор направляющих косинусов k_{ij} может быть сопряжен с произволом. Произвол минимизируется при *симметричном m*-расщеплении.

Определение 2. *Симметричное m-расщепление базисного вектора – это m-расщепление, при котором*

$$\forall j \in [1,m] \Big| k_{ij} = \frac{|\sqrt{m}|}{m}.$$

Представление векторного произведения двух векторов в R^n

Теорема 2. *Векторное произведение* **c** = [**a**, **b**] *может быть представлено в* R^n.

Доказательство. Пусть в R^3 имеются два линейно независимых вектора **a** и **b**. Их координаты равны

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для векторов **a** и **b** в R^3 определено векторное произведение **c** = [**a**, **b**].

Его координаты равны

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Базисный вектор $\mathbf{e}_3$ подвергается симметричному $(n-2)$-расщеплению. В образовавшемся R^n (в базисе ${}^1\mathbf{e}_1, {}^1\mathbf{e}_2, \ldots, {}^1\mathbf{e}_n$) имеют место все три вектора (пассивная точка зрения), координаты которых, соответственно, равны

$$ {}^1a = \begin{pmatrix} {}^1a_1 \\ {}^1a_2 \\ 0_3 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix},\ {}^1b = \begin{pmatrix} {}^1b_1 \\ {}^1b_2 \\ 0_3 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix},\ {}^1c = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ {}^1c_3 \\ \vdots \\ {}^1c_n \end{pmatrix}. \qquad (1) $$

Здесь

$$ \forall i \in [3, n] \| \ {}^1c_i = \frac{\left|\sqrt{n-2}\right|}{n-2} c_3 . $$

Произвольная квадратная матрица отображения T [2] позволяет получить координаты всех трех векторов в другом базисе этой же размерности ${}^2\mathbf{e}_1, {}^2\mathbf{e}_2, ..., {}^2\mathbf{e}_n$.

$$ {}^2a = T \cdot {}^1a = \begin{pmatrix} {}^2a_1 \\ \vdots \\ {}^2a_n \end{pmatrix},\ {}^2b = T \cdot {}^1b = \begin{pmatrix} {}^2b_1 \\ \vdots \\ {}^2b_n \end{pmatrix},\ {}^2c = T \cdot {}^1c = \begin{pmatrix} {}^2c_1 \\ \vdots \\ {}^2c_n \end{pmatrix}. \qquad (2) $$

Таким образом, в произвольном базисе ${}^2\mathbf{e}_1, {}^2\mathbf{e}_2, ..., {}^2\mathbf{e}_n$ для двух векторов **a** и **b** имеет место их векторное произведение **c** = [**a**, **b**] с координатами (2). Теорема доказана.

Тем самым решена некоторым образом обратная задача – при известном векторном произведении определение координат всех трех векторов в R^n.

Пример 1. Найти векторное апризведение двух векторов в R^4 путем преобразования трехмерного базиса в четырехмерный.

В трехмерном базисе координаты векторов **a** и **b** равны

$$ a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}. $$

Координаты векторного произведения **c** = [**a**, **b**] равны

$$ c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}. $$

Базисный вектор $\mathbf{e}_3$ подвергается симметричному 2-расщеплению. В образовавшемся R^4 координаты векторов равны

$$ {}^1a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ {}^1b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ {}^1c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7{,}071 \\ 7{,}071 \end{pmatrix}. $$

Произвольная квадратная матрица отображения

$$ T = \begin{pmatrix} 0{,}497 & 0{,}628 & 0{,}287 & -0{,}527 \\ 0{,}47 & 0{,}22 & -0{,}814 & 0{,}262 \\ -0{,}171 & 0{,}604 & 0{,}296 & 0{,}72 \\ 0{,}709 & -0{,}439 & 0{,}41 & 0{,}369 \end{pmatrix} $$

позволяет получить координаты всех трех векторов в другом базисе этой же размерности

$$ {}^2a = T \cdot {}^1a = \begin{pmatrix} 2{,}876 \\ 1{,}599 \\ 1{,}47 \\ 0{,}101 \end{pmatrix},\ {}^2b = T \cdot {}^1b = \begin{pmatrix} 3{,}138 \\ 1{,}099 \\ 3{,}02 \\ -2{,}197 \end{pmatrix},\ {}^2c = T \cdot {}^1c = \begin{pmatrix} -1{,}695 \\ -3{,}902 \\ 7{,}184 \\ 5{,}503 \end{pmatrix}. $$

Здесь **c** = [**a**, **b**].

Ориентация векторного произведения

В R^3 вектор **c** = [**a**, **b**] лежит на линии пересечения плоскостей, нормалями которых являются векторы **a** и **b** или в терминах многомерного пространства – в 1-плоскости, образованной пересечением двух 2-плоскостей. В этой 1-плоскости можно построить два противоположно направленных вектора, величина которых равна модулю векторного произведения, и ортогональных векторам **a** и **b**. Формально концы этих векторов образуют в 1-плоскости 0-сферу.

В R^4 векторы **a** и **b** служат нормалями двум 3-плоскостям, пересечением которых является 2-плоскость, все векторы которой ортогональны векторам **a** и **b**. Концы векторов, величина которых равна модулю векторного произведения, образуют в этой 2-плоскости 1-сферу (окружность).

В R^n векторы **a** и **b** служат нормалями двум $(n-1)$-плоскостям, пересечением которых является $(n-2)$-плоскость. Концы векторов, величина которых равна модулю векторного произведения, и ортогональных векторам **a** и **b**, образуют в этой $(n-2)$-плоскости $(n-3)$-сферу.

И в R^3 и в R^n имеет место неоднозначность при выборе направления векторного произведения двух векторов. В R^3 приходится выбирать из векторов, ограниченных 0-сферой, в R^n – из векторов, ограниченных $(n-3)$-сферой.

В R^3 неоднозначность преодолевается постулированием – в качестве направления **c** выбирается вектор правый относительно **a** и **b**.

Неоднозначность в R^n может быть преодолена также, как и в R^3 – выбором одного наиболее подходящего варианта.

По аналогии с взаимным расположением вектора **c** и вектора, являющегося суммой базисных ортов, имеющем место для частного случая (1), для произвольного базиса можно принять следующее

Условие 1. *Векторное произведение* **c** = [**a**, **b**] *в* R^n *лежит на одной прямой с проекцией суммы базисных ортов на* $(n-2)$*-плоскость, перпендикулярную векторам* **a** *и* **b**.

Векторное произведение в R^3 формально удовлетворяет условию 1.

Повороты координатных 2-плоскостей

Пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ вектор **d** имеет координаты d.

Повороту ij-й координатной 2-плоскости соответствует следующая матрица перехода

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1_{11} & 0_{12} & \cdots & 0_{1i} & \cdots & 0_{1j} & \cdots & 0_{1n} \\ 0_{21} & 1_{22} & \cdots & 0_{2i} & \cdots & 0_{2j} & \cdots & 0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0_{i1} & 0_{i2} & \cdots & \cos\varphi & \cdots & \sin\varphi & \cdots & 0_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0_{j1} & 0_{j2} & \cdots & -\sin\varphi & \cdots & \cos\varphi & \cdots & 0_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n1} & 0_{n2} & \cdots & 0_{ni} & \cdots & 0_{nj} & \cdots & 1_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

При этом cosφ и sinφ находятся из условия

$$d_j = 0\text{, если } \cos\varphi \quad \begin{array}{l} d_i \cos\varphi + d_j \sin\varphi = {}^1d_i, \\ -d_i \sin\varphi + d_j \cos\varphi = {}^1d_j. \end{array}$$

$${}^1d_j = 0\text{, если } \cos\varphi = \frac{d_i}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}}, \; \sin\varphi = \frac{d_j}{\sqrt{d_i^2 + d_j^2}}.$$

При этом

$$^1d_i = \sqrt{d_i^2 + d_j^2} .$$

Все другие координаты остаются без изменения.

Таким образом, поворотом ij-й координатной 2-плоскости в соответствии с матрицей перехода T_{ij} можно изменять координаты i и j вектора **d**, например, обнулять координату j.

Определение векторного произведения двух векторов в R^n

Пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ векторы **a** и **b** имеют координаты

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Координаты суммы базисных ортов **s** равны

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для перехода к новому базису ${}^*\mathbf{e}_1, {}^*\mathbf{e}_2, ..., {}^*\mathbf{e}_n$, в котором векторы **a**, **b** и **s** будут иметь координаты

$${}^*a = \begin{pmatrix} {}^*a_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}, \ {}^*b = \begin{pmatrix} {}^*b_1 \\ {}^*b_2 \\ 0_3 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}, \ {}^*s = \begin{pmatrix} {}^*s_1 \\ {}^*s_2 \\ {}^*s_3 \\ \vdots \\ {}^*s_n \end{pmatrix}, \ \forall i \in [3, n] \| \ {}^*s_i = \frac{\sqrt{n - {}^*s_1^2 - {}^*s_2^2}}{n-2},$$

следует выполнить $3n - h - l - 3$ поворотов координатных 2-плоскостей. Здесь h – число ненулевых координат обоих векторов в новом базисе, l – число нулевых координат в исходном базисе. В рассматриваемом случае $h = 3$. Каждому повороту соответствует своя матрица T_k типа (3).

Матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ к базису ${}^*\mathbf{e}_1, {}^*\mathbf{e}_2, ..., {}^*\mathbf{e}_n$ равна

$$T = \prod_{k=3n-h-l-3}^{1} T_k ,$$

т.е. перемножение производится в обратной последовательности. При этом

$${}^*a = Ta , \ {}^*b = Tb , \ {}^*s = Ts .$$

Координаты вектора **c** = [**a**, **b**] в новом базисе ${}^*\mathbf{e}_1, {}^*\mathbf{e}_2, ..., {}^*\mathbf{e}_n$ в соответствии с условием 1 равны

$${}^*c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^*c_3 \\ \vdots \\ {}^*c_n \end{pmatrix}, \ \forall i \in [3, n] \| \ {}^*c_i = \frac{\sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}}{n-2}, \ i \in [3, n]. \tag{4}$$

Знак радикала в (4) выбирается таким образом, чтобы вектор **c** образовывал с **a** и **b** правую тройку векторов.

Координаты вектора **c** = [**a**, **b**] в исходном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ равны

$$c = T^{-1} \cdot {}^*c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Если $\forall i \in [3,n] \| \, {}^{*}s_i = 0$, т.е. сумма базисных ортов **s** линейно зависима от векторов **a** и **b**, то их векторное произведение в соответствии с условием 1 неопределимо.

Пример 2. В R^4 по известным значениям **a** и **b** отыскать **c** = [**a**, **b**].

$$a = \begin{pmatrix} 3,37 \\ 2,762 \\ -2,395 \\ -0,532 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3,289 \\ 1,539 \\ -5,697 \\ 1,834 \end{pmatrix}.$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0,815 & 0 & -0,579 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,579 & 0 & 0,815 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^1a = T_1 a = \begin{pmatrix} 4,134 \\ 2,762 \\ 0 \\ -0,532 \end{pmatrix}.$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0,831 & 0,556 & 0 & 0 \\ -0,556 & 0,831 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^2a = T_2 \cdot {}^1a = \begin{pmatrix} 4,972 \\ 0 \\ 0 \\ -0,532 \end{pmatrix}.$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0,994 & 0 & 0 & -0,106 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,106 & 0 & 0 & 0,994 \end{pmatrix}, \quad {}^3a = T_3 \cdot {}^2a = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$T_{31} = T_3 T_2 T_1 = \begin{pmatrix} 0,674 & 0,552 & -0,479 & -0,106 \\ -0,453 & 0,831 & 0,322 & 0 \\ 0,579 & 0 & 0,815 & 0 \\ 0,072 & 0,059 & -0,051 & 0,994 \end{pmatrix}, \quad {}^3b = T_{31} b = \begin{pmatrix} 5,6 \\ -2,043 \\ -2,738 \\ 2,443 \end{pmatrix}.$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,641 & 0 & 0,767 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,767 & 0 & -0,641 \end{pmatrix}, \quad {}^4b = T_4 \cdot {}^3b = \begin{pmatrix} 5,6 \\ 3,185 \\ -2,738 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,758 & -0,652 & 0 \\ 0 & 0,652 & 0,758 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^5b = T_5 \cdot {}^4b = \begin{pmatrix} 5,6 \\ 4,2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$T_{51} = T_5 T_4 T_{31} = T_5 T_4 T_3 T_2 T_1 = \begin{pmatrix} 0,674 & 0,552 & -0,479 & -0,106 \\ -0,115 & -0,37 & -0,718 & 0,578 \\ 0,665 & -0,318 & 0,458 & 0,497 \\ 0,301 & -0,676 & -0,214 & -0,638 \end{pmatrix}.$$

Сумма ортов исходного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ в базисе ${}^5\mathbf{e}_1, {}^5\mathbf{e}_2, {}^5\mathbf{e}_3, {}^5\mathbf{e}_4$ имеет координаты

$${}^5s = T_{51} s = T_{51} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,641 \\ -0,625 \\ 1,302 \\ -1,226 \end{pmatrix}.$$

$$T_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0297 & -0,9996 \\ 0 & 0 & 0,9996 & 0,0297 \end{pmatrix}, \quad {}^6s = T_6 \cdot {}^5s = \begin{pmatrix} 0,641 \\ -0,625 \\ 1,265 \\ 1,265 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от исходного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ к базису ${}^6\mathbf{e}_1, {}^6\mathbf{e}_2, {}^6\mathbf{e}_3, {}^6\mathbf{e}_4$ равна

$$T_{61} = T_6 T_{51} = T_6 T_5 T_4 T_3 T_2 T_1 = \begin{pmatrix} 0,674 & 0,552 & -0,479 & -0,106 \\ -0,115 & -0,37 & -0,718 & 0,578 \\ -0,281 & 0,666 & 0,228 & 0,652 \\ 0,673 & -0,338 & 0,451 & 0,478 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$${}^6a = T_{61}a = {}^3a\,,\ {}^6b = T_{61}b = {}^5b\,,\ {}^6s = T_{61}s\,.$$

Координаты вектора **c** = [**a**, **b**] в последнем базисе ${}^6\mathbf{e}_1, {}^6\mathbf{e}_2, {}^6\mathbf{e}_3, {}^6\mathbf{e}_4$ в соответствии с (4) равны

$${}^6c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14,849 \\ 14,849 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора **c** = [**a**, **b**] в исходном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ равны

$$c = T_{61}^{-1} \cdot {}^6c = \begin{pmatrix} 5,822 \\ 4,869 \\ 10,081 \\ 16,786 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Порядок обнуления координат и, следовательно, значения промежуточных матриц могут быть иными. При этом нетрудно убедиться, что итоговая матрица T (T_{61}) и значение вектора **c** в исходном базисе не изменяются.

Список литературы
References

1. Попов И.П. 2017. Операторы типа набла: поверхностный, нулевой и мнимый нулевой. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. № 6(255), выпуск 46: 44–53.

Popov I.P. 2017. Operators type of nabla: surface, zero and zero imaginary. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika [Scientific statements Belgorod State University. Mathematics. Physics]. № 6(255), 46: 44–53.

2. Чурсанова А.С. 2017. Оценка собственных значений матриц. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. № 6(255), выпуск 46: 59–61.

Chursanova A.S. 2017. The estimate of matrix eigenvalues. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika [Scientific statements Belgorod State University. Mathematics. Physics]. № 6(255), 46: 59–61.