УДК 519

# О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ЧАСТНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДЖРБАШЯНА И БЛЯШКЕ

# ON BOUNDARY PROPERTIES OF PARTIAL PRODUCTS OF DJRBASHYAN AND BLASCHKE

**В.С. Закарян, Р.В. Даллакян**
**V.S. Zakaryan, R.V. Dallakyan**

Национальный Политехнический Университет Армении, Ереван, Армения.
National Polytechnic University Of Armenia, Yerevan, Armenia.
E-mail: mathdep@seua.am, dallakyan57@mail.ru

**Аннотация**
Пользуясь аппаратом интегродифференцирования Римана – Лиувилля, М.М. Джрбашян обобщил класс мероморфных в единичном круге функций $N$ Р. Неванлинны, вводя в рассмотрение классы $N_\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$. Фундаментальную роль в этих исследованиях играют произведения $B_\alpha$, которые в специальном случае $\alpha=0$ превращаются в произведения Бляшке. В этой заметке исследуется граничное поведение частного произведения $B_\alpha$, $(-1<\alpha<0)$ и $B_0 \equiv B$ - Бляшке.

**Abstract**
Using the Riemann-Liouville integration-differentiation operator M. M. Djrbashyan generalized the class of Nevanlinnea's meromorphic functions in the unit circle, introducing classes $N_\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$. Essential roles in these investigations plays products $B_\alpha$, which is special case $\alpha=0$ coincide with the Blaschke product.In this work we investigate boundary properties partial products $B_\alpha$, $(-1<\alpha<0)$ and $B_0 \equiv B$ - products Blaschke.

**Ключевые слова**: Оператор интегродифференцирования Римана – Лиувилля, произведения Бляшке и Джрбашяна, класс гармонических в единичном круге функций $U_\alpha$, $\alpha$ – емкость множества $E$.
**Keywords**: Riemann-Liouville integration-differentation operator, Blyashke and Djrbashyan product, class of $U_\alpha$ functions harmonic in unite circle, $\alpha$ capacity of a set $E$.

## Введение

Пусть $D$ – единичный круг комплексной плоскости C, $-1<\alpha<+\infty$ и пусть последовательность $\{z_n\}\subset D$, $z_n \neq 0, n=1,2,\cdots$, такая что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-|z_n|\right)^{1+\alpha}<+\infty. \tag{1}$$

Бесконечное произведение $B_\alpha(z;\{z_n\})$, $z\in D$ М. М. Джрбашяна определяется следующим образом [1, гл. IX]:

$$B_\alpha(z;\{z_n\})=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\{-W_\alpha(z;z_n)\},$$

где для $\xi\in D$

$$W_\alpha(z;\xi)=\int_{|\xi|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\xi^{-k}\int_0^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-\bar{\xi}^k\int_{|\xi|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}z^k..$$

В специальном случае $\alpha=0$ эти произведения превращаются в произведения Бляшке [1, с. 625]:

$$B_0(z;\{z_n\})=B(z;\{z_n\})=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n-z}{1-\bar{z}_n z}\cdot\frac{|z_n|}{z_n}.$$

В работе [2] было доказано следующее утверждение о взаимосвязи между произведениями $B_\alpha, (-1<\alpha<0)$ и $B$.

**Теорема.** Пусть $-1<\alpha<0$ и пусть последовательность $\{z_n\}\subset D$ удовлетворяет условию (1). Тогда

$$B_\alpha(z;\{z_n\}) = B(z;\{z_n\})\cdot \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\Theta}z)d\omega(\Theta)\right\},$$

где

$$S_\alpha(z) = \Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right\},\ |z|<1,$$

$\omega(\Theta)$ – некоторая невозрастающая функция ограниченной вариации на $[0,2\pi]$.

Отметим, что для любой функции $\omega(x)$ из класса $\Omega$ [3, гл. 1] М.М. Джрбашяном также определены классы $N_\omega$ и произведения $B_\omega$. Подобные классы и произведения А. М. Джрбашяном определены и на верхной полуплоскости, о которых можно читать в книге [4] А.М. Джрбашяна.

Как известно из работы [5, с. 54], для существования радиального предела произведения Бляшке в граничной точке $e^{i\varphi}$ необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялось условие Фростмана:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-|z_n|}{|e^{i\varphi}-z_n|}<+\infty.$$

Для произведений $B_\alpha$ $(-1<\alpha<0)$ доказано, что если имеет место условие типа Фростмана [6, с. 139]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z_n|}{|e^{i\varphi}-z_n|}\right)^{1+\alpha}<+\infty,$$

то в граничной точке $e^{i\varphi}$ существует конечный и отличный от нуля предел произведения $B_\alpha$. Отметим, что вопрос о справедливости обратного утверждения пока остается открытым.

Рассмотрим систему всех множеств $\{B\}$, измеримых по Борелю и лежащих на $[0,2\pi]$. Будем называть мерой $\mu$ всякую неотрицательную, вполне аддитивную функцию множеств, определенную на $\{\beta\}$ и нормированную, т. е. $\mu([0,2\pi])=1$. Будем говорить, что мера сосредоточена на $B$ и писать $\mu\prec B$, если $m(B)=1$, т. е. если

$$\int_B d\mu = \int_0^{2\pi} d\mu = 1.$$

Скажем, что множество $E$, измеримое по Борелю, имеет положительную $\gamma$-емкость $(0<\gamma<1)$, если найдется такая $\mu\prec E$, для которой функция

$$V_\gamma(x;z)=\int_0^{2\pi}\frac{d\mu}{|e^{it}-re^{ix}|^\gamma}$$

остается равномерно ограниченной по $x$ при $r\to 1-0$, то есть если при некотором $\mu\prec E$ имеем

$$V_\gamma(\mu)=\sup_{0\le r\le 1}\left\{\max_{0\le x\le 2\pi}V_\gamma(x;r)\right\}<+\infty.$$

Если же для любой меры $\mu \prec E$ $V_\gamma(\mu) = +\infty$, то скажем, что $E$ имеет $\gamma$-емкость равную нулю, и напишем $cap_\gamma E = 0$.

В работе [6] доказано, что если последовательность $\{z_n\} \subset D$ удовлетворяет условию (1) и имеет место $1+\alpha$ условие типа Фростмана $(-1<\alpha<0)$, то везде на $[0,2\pi]$ существуют конечные радиальные значения (отличные от нуля) произведения $B_\alpha(z;\{z_n\})$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0,2\pi]$, $1+\alpha$-емкость которого равна нулю: $cap_{1+\alpha}E = 0$.

Более того, если точка $z = e^{i\varphi}$ не является точкой сгущения для последовательности $\{z_n\}$, то произведение $B_\alpha(z;\{z_n\})$ непрерывно в некоторой окрестности точки $z = e^{i\varphi}$ ($|z| \le 1$).

Если последовательность $\{z_n\} \subset D$ удовлетворяет условию (1), то, согласно источнику [7], для произведения Бляшке также везде на $[0,2\pi]$ существует радиальный предел (по модулю равный равный единице) кроме, быть может, некоторого исключительного, некоторого множества $E$, для которого $cap_{1+\alpha}E = 0$.

Оператор интегро-дифференцирования $D^{-\alpha}(-1<\alpha<+\infty)$ в смысле Римана-Лиувилля с началом в нулевой точке определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha}\{\varphi(r)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r (r-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt, \text{ если } 0<\alpha<+\infty,$$

$$D^0\{\varphi(r)\} = \varphi(r),$$

$$D^{-\alpha}\{\varphi(r)\} = \frac{d}{dr}D^{-(1+\alpha)}\{\varphi(r)\}, \text{ если } -1<\alpha<0.$$

Обозначим через $U_\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$ класс гармонических в единичном круге $D$ функций $u(z)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi}|u_\alpha(re^{i\varphi})|d\varphi\right\} < +\infty,$$

где при данном $\alpha$

$$u_\alpha(re^{i\varphi}) \equiv r^{-\alpha}D^{-\alpha}u(re^{i\varphi}).$$

Из литературы [1, с. 649] известно, что если $u(z)$ – гармоническая в единичном круге функция, то при любом $\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ ассоциированная с ней функция $u_\alpha(z)$ также будет гармонической.

В работе [8] доказано, что если для некоторой точки $e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ при каком-либо $\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ выполняется условие

$$\overline{\lim_{z\to e^{i\varphi}}}(1-|z|)^{1+\alpha}|u(z)| = d > 0,$$

где $z \to e^{i\varphi}$ по касательному к единичной окружности пути, то $u(z)$ не принадлежит классу $U_\alpha$.

Отметим, что это утверждение в специальном случае $\alpha = 0$ доказано А. Г. Нафталевичем [9].

Перейдем к результатам настоящей работы.

**Теорема 1.** Пусть $-1<\alpha<0$, последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке-Джрбашяна и пусть $n(r)$ – количество точек $z_n$, лежащих в круге $|z| \le r < 1$. Тогда если

$$n(r) \le \frac{\lambda(r)}{(1-r)^{1+\alpha}},$$

где $\lambda(r)$ такая, что

$$\lim_{r\to 1-0}\lambda(r)=0,$$

то для любого значения $\varphi$, $\varphi\in[0,2\pi]$

$$\lim_{z\to e^{i\varphi}}(1-|z|)^{1+\alpha}\left|\log\left|\frac{B_\alpha(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})}\right|\right|=0.$$

**Доказательство.** Из определений функций $B_\alpha(z;\{z_n\})$ и $B(z;\{z_n\})\equiv B_0(z;\{z_n\})$ имеем:

$$\left|\log\left|\frac{B_\alpha(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})}\right|\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}[W_0(z;z_n)-W_\alpha(z;z_n)]\right|.$$

Согласно источнику [10] известно, что если $|z|<1,|\xi|<1$, то справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}[W_\alpha(z;\xi)-W_0(z;\xi)]\geq-\frac{\alpha}{2+\alpha}\int_{|\xi|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha-1}{x}dx>0. \tag{2}$$

Из неравенства (2) следует, что предыдущее равенство примет следующий вид:

$$\left|\log\left|\frac{B_\alpha(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})}\right|\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}[W_\alpha(z;z_n)-W_0(z;z_n)].$$

Напишем это равенство в таком виде:

$$\begin{gathered}\left|\log\left|\frac{B_\alpha(re^{i\varphi};\{z_n\})}{B(re^{i\varphi};\{z_n\})}\right|\right|=\\=\sum_{|z_n|\leq r}\operatorname{Re}\left[W_\alpha(re^{i\varphi};z_n)-W_0(re^{i\varphi};z_n)\right]+\sum_{|z_n|>r}\operatorname{Re}\left[W_\alpha(re^{i\varphi};z_n)-W_0(re^{i\varphi};z_n)\right]\end{gathered} \tag{3}$$

Из работы [3 с. 106] известно, что если $z=re^{i\varphi}$, $r<1$, $|\zeta|<1$, то

$$|W_\alpha(z;\xi)-W_0(z;\xi)|\leq C\cdot\left(\frac{1-|\xi|}{e^{i\varphi}-\xi}\right)^{1+\alpha}, \tag{4}$$

где $C$ – некоторое положительное число не зависящее ни от $z$, ни от $\zeta$. Пользуясь этим неравенством, оценим сверху следующую сумму:

$$\begin{gathered}\sum_{|z_n|\leq r}\operatorname{Re}\left[W_\alpha(re^{i\varphi};z_n)-W_0(re^{i\varphi};z_n)\right]\leq\sum_{|z_n|\leq r}\operatorname{Re}\left|W_\alpha(re^{i\varphi};z_n)-W_0(re^{i\varphi};z_n)\right|\leq\\ \leq C\sum_{|z_n|\leq r}\left(\frac{1-|z_n|}{|e^{i\varphi}-z_n|}\right)^{1+\alpha}\leq C\sum_{|z_n|\leq r}1=Cn(r)=\frac{C\lambda(r)}{(1-r)^{1+\alpha}}.\end{gathered}$$

Следовательно, имея в виду неравенство (2) и то, что $\lambda(r)\to 0$, когда $r\to 1-0$, имеем:

$$\lim_{z\to e^{i\varphi}}(1-r)^{1+\alpha}\sum_{|z_n|\leq r}\operatorname{Re}[W_\alpha(re^{i\varphi};z_n)-W_0(re^{i\varphi};z_n)]=0. \tag{5}$$

В работе [1, с. 624] доказано, что если $0\leq|z|<|\xi|<1$, то

$$W_\alpha(z;\xi)=\log\left(1-\frac{z}{\xi}\right)+\omega_\alpha(z;\xi),$$

где

$$\omega_\alpha(z;\xi)=\int_{|\xi|}^{1}\left[\left(1-\frac{\bar{\xi}z}{x}\right)^{-1-\alpha}+\left(1-\frac{xz}{\xi}\right)^{-1-\alpha}-1\right]\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx,$$

причем

$$\lim_{|\xi|\to 1-0}\sup\frac{|\omega_\alpha(re^{i\varphi};\xi)|}{(1-|\xi|)^{1+\alpha}}\leq\frac{1}{1+\alpha}\left[\frac{2}{(1-r)^{1+\alpha}}+1\right]. \tag{6}$$

Пусть $r$ достаточно близкое к 1 число. Пользуясь последними фактами, оценим сверху вторую сумму правой части равенства (3):

$$\sum_{|z_n|>r}\mathrm{Re}\left[W_\alpha\left(re^{i\varphi};z_n\right)-W_0\left(re^{i\varphi};z_n\right)\right]=\sum_{|z_n|>r}\mathrm{Re}\left[\omega_\alpha\left(re^{i\varphi};z_n\right)-\omega_0\left(re^{i\varphi};z_n\right)\right]\le$$

$$\le\sum_{|z_n|>r}\left\{\left|\omega_\alpha\left(re^{i\varphi};z_n\right)\right|-\mathrm{Re}\int_{|z_n|}^{1}\left[\left(1-\frac{\overline{z}_n re^{i\varphi}}{x}\right)^{-1}+\left(1-\frac{xre^{i\varphi}}{\xi}\right)^{-1}-1\right]dx\right\}.$$

Нетрудно убедиться, что при $x\in[z_n;1]$, $r<|z_n|$

$$\mathrm{Re}\left(1-\frac{\overline{z}_n re^{i\varphi}}{x}\right)^{-1}\ge 0$$

$$\mathrm{Re}\left(1-\frac{xre^{i\varphi}}{z_n}\right)^{-1}\ge 0,$$

следовательно, из последнего неравенства будем иметь:

$$\sum_{|z_n|>r}\mathrm{Re}\left[W_\alpha\left(re^{i\varphi};z_n\right)-W_0\left(re^{i\varphi};z_n\right)\right]\le\sum_{|z_n|>r}\mathrm{Re}\left[\omega_\alpha\left(re^{i\varphi};z_n\right)+\log\frac{1}{|z_n|}\right].$$

Отсюда, пользуясь оценкой (6), для достаточно близких к 1 чисел $r$ будем иметь

$$\sum_{|z_n|>r}\mathrm{Re}\left[W_\alpha\left(re^{i\varphi};z_n\right)-W_0\left(re^{i\varphi};z_n\right)\right]\le\sum_{|z_n|>r}\log\frac{1}{|z_n|}+\frac{1}{1+\alpha}\left[\frac{2}{(1-r)^{1+\alpha}}+1\right]\sum_{|z_n|>r}\left(1-|z_n|\right)^{1+\alpha}.$$

Значит,

$$(1-r)^{1+\alpha}\sum_{|z_n|>r}\mathrm{Re}\left[W_\alpha\left(re^{i\varphi};z_n\right)-W_0\left(re^{i\varphi};z_n\right)\right]\le(1-r)^{1+\alpha}\sum_{|z_n|>r}\log\frac{1}{|z_n|}+$$

$$+(1-r)^{1+\alpha}\frac{1}{1+\alpha}\sum_{|z_n|>r}\left(1-|z_n|\right)^{1+\alpha}+\frac{2}{1+\alpha}\sum_{|z_n|>r}\left(1-|z_n|\right)^{1+\alpha}.$$

Из условия (1) следует, что

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)^{1+\alpha}\sum_{|z_n|>r}\log\frac{1}{|z_n|}=0$$

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)^{1+\alpha}\sum_{|z_n|>r}\left(1-|z_n|\right)^{1+\alpha}=0$$

$$\lim_{r\to 1-0}\sum_{|z_n|>r}\left(1-|z_n|\right)^{1+\alpha}=0.$$

Это означает, что

$$\lim_{?\to e^{i\varphi}}(1-r)^{1+\alpha}\sum_{|z_n|>r}\mathrm{Re}\left[W_\alpha\left(re^{i\varphi};z_n\right)-W_0\left(re^{i\varphi};z_n\right)\right]=0. \qquad (7)$$

Из равенства (3) с использованием формул (5), (7) и следует справедливость утверждения теоремы.

Далее, пользуясь теоремой 1, докажем справедливость такого утверждения.

**Теорема 2.** Пусть $-1<\alpha<0$, последовательность $\{z_n\}\subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке-Джрбашяна. Тогда, если для некоторого значения $\varphi$, $\varphi\in[0,2\pi]$

$$\overline{\lim_{z\to e^{i\varphi}}}\left(1-|z|\right)^{1+\alpha}\cdot\left|\log\left|\frac{B_\alpha(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})}\right|\right|=d>0,$$

то существует последовательность $\{r_k\}$

$$0<r_1<r_2<\cdots<r_{k-1}<r_k<\cdots<1,\ r_k\xrightarrow[k\to\infty]{}1,$$

такая, что

$$n(r_k)=\frac{c}{(1-r_k)^{1+\alpha}},$$

где $c$ – некоторая константа.

**Доказательство.** Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{1+\alpha}>\sum_{|z_n|\le r}(1-|z_n|)^{1+\alpha}\ge(1-r)^{1+\alpha}\sum_{|z_n|\le r}1=(1-r)^{1+\alpha}n(r).$$

Значит, для любого значения $r, 0<r<1$, имеем

$$n(r)\le\frac{c}{(1-r)^{1+\alpha}},$$

где $c=\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{1+\alpha}$.

Пользуясь этим фактом и теоремой 1, нетрудно установить справедливость утверждения теоремы.

**Теорема 3.** Пусть $-1<\alpha<0$, последовательность $\{z_n\}\subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке-Джрбашяна и пусть $z$ стремится к граничной точке $e^{i\varphi}$ касательным путем. Тогда

$$\lim_{z\to e^{i\varphi}}(1-|z|)^{1+\alpha}\log\left|\frac{B_\alpha(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})}\right|=0.$$

**Доказательство.** Из теоремы о взаимосвязи между произведениями Бляшке и Джрбашяна имеем:

$$\log\left|\frac{B_\alpha(re^{i\varphi};\{z_n\})}{B(re^{i\varphi};\{z_n\})}\right|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}S_\alpha\left(re^{i(\varphi-\Theta)}\right)d\omega(\Theta)=u\left(re^{i\varphi}\right),$$

где $\omega(\Theta)$ – невозрастающая функция конечной вариации на $[0,2\pi]$. Покажем, что гармоническая функция $u\left(re^{i\varphi}\right)$ принадлежит классу $U_\alpha$. Так как [1, с. 576]

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}\left\{\operatorname{Re}S_\alpha\left(re^{i\varphi}\right)\right\}=\operatorname{Re}S_0\left(re^{i(\varphi-\Theta)}\right)=\frac{1-r^2}{1-2\cos(\varphi-\Theta)+r^2},$$

то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}r^{-\alpha}D^{-\alpha}u\left(re^{i(\varphi-\Theta)}\right)d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}r^{-\alpha}D^{-\alpha}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}S_\alpha\left(re^{i(\varphi-\Theta)}\right)d\omega(\Theta)\right\}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\Theta)+r^2}d\omega(\Theta)\right\}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\Theta)+r^2}d\varphi\right\}d\omega(\Theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\omega(\Theta).$$

Значит, действительно $u\left(re^{i\varphi}\right)\in U_\alpha$. В работе [8] доказано, что если $u\left(re^{i\varphi}\right)\in U_\alpha$ и $z$ стремится к граничной точке $e^{i\varphi}$ касательным путем, то

$$\lim_{re^{i\varphi}\to e^{i\varphi}}u\left(re^{i\varphi}\right)=0.$$

Из этого факта и следует справедливость утверждения теоремы.

Следуя М.М. Джрбашяну [2, с. 26], через $\Omega$ обозначим класс функций $\omega(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\omega(x)$ положительна и непрерывна на $[0,1)$.

2) $\omega(0)=1$, $\int_0^1\omega(x)dx<+\infty$.

Теперь докажем справедливость следующего утверждения.

**Теорема 4.** Пусть $-1<\alpha<0$, последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке-Джрбашяна и пусть

$$n(r_к)=\frac{c}{(1-r_к)^{1+\alpha}},k=1,2,...$$

где $c$ – некоторое постоянное, а последовательность $\{r_к\}$ такая, что

$$0<r_1<r_2<\cdots<r_{k-1}<r_k<\cdots<1,\ \lim_{k\to\infty} r_k\to 1.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|z_n|}^{1}\omega(x)dx=+\infty,$$

где $\omega(x)$ – любая неубывающая функция из класса $\Omega$, такая, что

$$\frac{\omega(r)}{(1-r)^{\alpha}}\xrightarrow[r\to 1-0]{}+\infty .$$

**Доказательство.** Допустим противное: существует неубывающая функция $\omega(x)\in\Omega$, такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|z_n|}^{1}\omega(x)dx<+\infty .$$

Тогда для любого натурального числа $k$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|z_n|}^{1}\omega(x)dx\ge\sum_{|z_n|\le r_k}\int_{|z_n|}^{1}\omega(x)dx\ge\left(\int_{r_k}^{1}\omega(x)dx\right)n(r_k).$$

Значит,

$$n(r_k)\le\frac{c_1}{\int_{r_k}^{1}\omega(x)dx},\ k=1,2,\cdots,$$

где $c_1=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|z_n|}^{1}\omega(x)dx$.

Из условия теоремы следует, что

$$\frac{c}{(1-r_k)^{1+\alpha}}=\frac{c_1}{\int_{r_k}^{1}\omega(x)dx},\ k=1,2,\cdots,$$

то есть

$$\frac{\int_{r_k}^{1}\omega(x)dx}{(1-r_k)^{1+\alpha}}\le\frac{c_1}{c},\ k=1,2,\cdots.$$

Отсюда, так как $\omega(x)$ – неубывающая функция, то будем иметь:

$$\frac{\omega(r_k)}{(1-r_k)^{\alpha}}\le\frac{c_1}{c},\ k=1,2,\cdots.$$

Это означает, что когда $r\to 1-0$ то $\frac{\omega(r)}{(1-r)^{\alpha}}$ не стремится к $+\infty$. Этим противоречием и завершается доказательство теоремы.

Из теоремы 2 с использованием теоремы 4 следует справедливость следующего утверждения.

**Теорема 5.** Пусть $-1<\alpha<0$, последовательность $\{z_n\}\subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке-Джрбашяна. Тогда, если для некоторого значения $\varphi,\ \varphi\in[0,2\pi]$

$$\overline{\lim_{z\to e^{i\varphi}}}(1-|z|)^{1+\alpha}\left|\log\left|\frac{B_\alpha(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})}\right|\right|=d>0,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|z_n|}^{1}\omega(x)dx=+\infty,$$

где $\omega(x)$ – любая неубывающая функция из класса $\Omega$, такая, что

$$\frac{\omega(r)}{(1-r)^\alpha}\xrightarrow[r\to1-0]{}+\infty .$$

Далее докажем справедливость такого утверждения.

**Теорема 6.** Пусть $-1<\alpha<0$, последовательность $\{z_n\}\subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке-Джрбашяна. Тогда, если для некоторого значения $\varphi$, $\varphi\in[0,2\pi]$

$$\overline{\lim_{z\to e^{i\varphi}}}(1-|z|)^{1+\alpha}\left|\log\left|\frac{B_\alpha(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})}\right|\right|=d>0,$$

то точка $e^{i\varphi}$ является точкой сгущения для последовательности $\{z_n\}$. Более того, ряд типа Фростмана в этой точке расходится:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z_n|}{|e^{i\varphi}-z_n|}\right)^{1+\alpha}=\infty .$$

**Доказательство.** Допустим противное: пусть точка $e^{i\varphi}$ не является точкой сгущения для последовательности $\{z_n\}$. . Тогда из неравенства (1) следует, что имеет место следующее условие типа Фростмана:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z_n|}{|e^{i\varphi}-z_n|}\right)^{1+\alpha}<+\infty . \qquad (8)$$

Но из определений функций $B_\alpha(z;\{z_n\})$, $B(z;\{z_n\})$ и из неравенств (4) и (8) будем иметь:

$$\left|\log\left|\frac{B_\alpha(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})}\right|\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}[W_\alpha(z;z_n)-W_0(z;z_n)]\right|\le$$

$$\le\left|\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}[W_0(z;z_n)-W_\alpha(z;z_n)]\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z_n|}{|e^{i\varphi}-z_n|}\right)^{1+\alpha}<+\infty .$$

Значит,

$$\lim_{z\to e^{i\varphi}}(1-|z|)^{1+\alpha}\log\left|\frac{B_\alpha(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})}\right|=0 .$$

В случае когда точка $e^{i\varphi}$ является точкой сгущения последовательности $\{z_n\}$, расходимость ряда (8) типа Фростмана доказывается аналогичным образом.

Полученное противоречие и завершает доказательство первого утверждения теоремы.

**Теорема 7.** Пусть $-1<\alpha<0$, последовательность $\{z_n\}\subset D$ удовлетворяет условию (1) Бляшке-Джрбашяна и пусть $E$ – множество тех точек $e^{i\varphi}$, $\varphi\in[0,2\pi]$ для которых

$$\overline{\lim_{z\to e^{i\varphi}}}(1-|z|)^{1+\alpha}\left|\log\left|\frac{B_\alpha(z;\{z_n\})}{B(z;\{z_n\})}\right|\right|=d>0 .$$

Тогда $cap_{1+\alpha}E=0$.

**Доказательство.** По теореме 6, для тех $\varphi$, $\varphi \in [0,2\pi]$, для которых $e^{i\varphi} \in E$, имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1-|z_n|}{e^{i\varphi} - z_n} \right)^{1+\alpha} = +\infty .$$

Откуда и следует [3, с. 105] $cap_{1+\alpha} E = 0$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 15Т-1А083.

**Список литературы**
**References**

1. Джрбашян М. М. 1966. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Изд. “Наука”, Москва.

Djrbashian M. M. 1966. Integral transformation and representation of functions on the complex domain. – M. Nauka.

2. Джрбашян М. М., Захарян В. С. 1968. О факторизации $B_\alpha$, Мат. Зам, т. 4, N 1: 3-10.

Djrbashian M. M., Zakaryan V. S. 1968. On factorization of function $B_\alpha$. Math. zam, vol. 4. N. 1: 3-10.

3. Джрбашян М. М., Захарян В. С. 1993. Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. Изд. “Наука”, Москв.

Djrbashian M. M., Zakaryan V. S. 1993. Classes and boundary properties of functions meremorfhic in circle. Izd. Nauka, Moscow.

4. Djrbashian A. M. 2005. Functions of $\alpha$ -Bounded Type in the Half-Plane. Springer Science+Business Media.

5. Коллингвуд, Ловатер А. 1971. Теория предельных множеств. Изд. «Мир», Москва.

Kollingvud, Lovater A. 1971. Theory of boundary sets. Izd. Mir. Moscow.

6. Захарян В. С. 1968. О радиальных предельных значениях функций $B_\alpha$. Изв. АН Арм. ССР, Мат. 3 N 4: 5.

Zakaryan V. S. 1968. On radial boundary values of functions $B_\alpha$. Izv. AN Arm. SSR, Math. 3, N4: 5.

7. Broman A. 1947. On two classes of trigonometrical series. Thesis, University of Uppsala.

8. Dallakyan R. V. On the boundary behavior of functions in the Djrbashyan classes $U_\alpha$ and $A_\alpha$. Eurasian Math. Journal, vol. 4, Number 2 (2013): 57-63.

9. Нафталевич А. Г. 1956. Об интерполированиии функций ограниченного вида. Ученые Записки Вильнюсского университета, т. 5.

Naftalevich A. G.1956. On interpolation of function of bounded types. Uchenie zapiski vilnyusskogo universiteta, vol. 5.

10. Захарян В. С. 1988. Об одной оценке для произведения М. М. Джрбашяна. Известия АН Арм. ССР, Мат. XXIII, N2.

Zakaryan V. S. 1988. On an estimation for Djrbshian’s product. Izvestia AN Arm. SSR, Math. XXIII, N2