УДК 517.952

О ПСЕВДОПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ON THE PSEUDO-POLYNOMIAL SOLUTIONS OF TWO-DIMENSIONAL EQUATIONCONTAINING THE PRODUCTION OF PARTIAL DERIVATIVES

И.В. Рахмелевич
I.V. Rakhmelevich

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Nizhny Novgorod State University, 23 Gagarin Ave, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Аннотация
Исследовано двумерное уравнение, содержащее произведение частных производных любых порядков. С помощью метода разделения переменных получены псевдополиномиальные решения этого уравнения, которые выражаются через полиномы от независимых переменных и функции одной переменной, которые либо определяются как решения некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, либо являются произвольными. Доказана теорема, позволяющая на основании известного частного решения данного уравнения получить новое семейство решений.

Abstract
There is investigated two-dimensional equation containing the production of partial derivatives of any order. Pseudo-polynomial solutions of this equation have been received with the help of variables separation method. These solutions are expressed through the polynomials of independent variables and the functions of one variable which either define as the solutions of some ordinary differential equations or are arbitrary. There is proved the theorem which allows to receive a new family of solutions on the base of known particular solution of the given equation.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, частная производная, разделение переменных, псевдополиномиальное решение.
Keywords: differential equation, partial derivative, separation of variables, pseudo-polynomial solution.

Введение

В настоящее время известно достаточно много работ, посвященных нахождению полиномиальных решений для уравнений в частных производных. В большинстве из них изучались решения такого типа для линейных уравнений [1-4]. При этом существенный интерес представляют нелинейные уравнения, в том числе содержащие произведение частных производных. Так, в работах
[5-9] изучались решения нелинейных уравнений, содержащих произведение степеней частных производных первого порядка. Целью данной работы является исследование псевдополиномиальных решений двумерных уравнений в частных производных, содержащих произведение частных производных любого порядка. Псевдополиномиальными будем называть решения, выражающиеся через полиномы от независимых переменных и функции, которые либо определяются как решения некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), либо являются произвольными.

1. Постановка задачи

Рассмотрим класс двумерных уравнений относительно неизвестной функции $u(x,y)$, содержащих произведение частных производных:

$$\prod_{k=1}^{K} \frac{\partial^{m_k+n_k} u}{\partial x^{m_k} \partial y^{n_k}} = f(x)g(y). \qquad (1)$$

Здесь $f(x)$, $g(y)$ – некоторые заданные функции, а m_k, n_k удовлетворяют условию:

$$m_k + n_k \geq 1,$$

при всех $k \in \Xi$, где $\Xi = \{1, \ldots, K\}$ – множество значений индекса k.

Уравнение (1) имеет семейства решений, которые будут приведены в следующем разделе.

2. Основные результаты

Теорема 1

1. Пусть $m, n \in \mathbf{N}$ – такие, что для каждого $k \in \Xi$ имеет место одна из двух ситуаций:

$$m < m_k,\ n \geq n_k, \tag{2}$$

либо

$$m \geq m_k,\ n < n_k. \tag{3}$$

При этом оба подмножества $\Xi_1 \subset \Xi$, $\Xi_2 \subset \Xi$ значений индекса k, для которых выполняются условия (2) и (3) соответственно, предполагаются непустыми.

Тогда уравнение (1) имеет следующие решения:

$$u(x, y) = P_m(x)Y(y) + Q_n(y)X(x), \tag{4}$$

где $P_m(x), Q_n(y)$ – полиномы степеней m, n с произвольными коэффициентами, а функции $X(x), Y(y)$ являются решениями следующих ОДУ:

$$\prod_{k\in\Xi_1} X^{(m_k)}(x) = \frac{\mu f(x)}{\prod_{k\in\Xi_2} P_m^{(m_k)}(x)}, \quad \prod_{k\in\Xi_2} Y^{(n_k)}(y) = \frac{\nu g(y)}{\prod_{k\in\Xi_1} Q_n^{(n_k)}(y)}, \tag{5}$$

причем постоянные μ, ν удовлетворяют условию $\mu\nu = 1$.

2. Пусть $m, n \in \mathbf{N}$ – такие, что для каждого $k \in \Xi$ выполняются условия (2), т. е. $\Xi_2 = \varnothing$. Тогда уравнение (1) имеет решение вида (4) при дополнительном условии, что $g(y), Q_n(y)$ удовлетворяют соотношению:

$$\prod_{k=1}^{K} Q_n^{(n_k)}(y) = g(y). \tag{6}$$

При этом $Y(y)$ – произвольная функция, дифференцируемая достаточное число раз, а функция $X(x)$ должна удовлетворять следующему ОДУ:

$$\prod_{k=1}^{K} X^{(m_k)}(x) = \mu f(x) \tag{7}$$

Аналогично, если $m, n \in \mathbf{N}$ – такие, что для каждого $k \in \Xi$ выполняются условия (3), т. е. $\Xi_1 = \varnothing$, то уравнение (1) имеет решение вида (4) при дополнительном условии, что $f(x), P_m(x)$ удовлетворяют соотношению:

$$\prod_{k=1}^{K} P_m^{(m_k)}(x) = f(x). \tag{8}$$

При этом $X(x)$ – произвольная функция, дифференцируемая достаточное число раз, а функция $Y(y)$ должна удовлетворять следующему ОДУ:

$$\prod_{k=1}^{K} Y^{(n_k)}(y) = g(y). \tag{9}$$

Доказательство

1. Рассмотрим функцию вида (4) и запишем выражение для производных, входящих в левую часть уравнения (1):

$$\frac{\partial^{m_k+n_k}u}{\partial x^{m_k}\partial y^{n_k}} = P_m^{(m_k)}(x)Y^{(n_k)}(y) + X^{(m_k)}(x)Q_n^{(n_k)}(y). \qquad (10)$$

Для $k \in \Xi_1$ из первого условия (2) следует: $P_m^{(m_k)}(x) = 0$, поэтому для таких k

$$\frac{\partial^{m_k+n_k}u}{\partial x^{m_k}\partial y^{n_k}} = X^{(m_k)}(x)Q_n^{(n_k)}(y). \qquad (11)$$

Далее, для $k \in \Xi_2$ из второго условия (3) следует: $Q_n^{(n_k)}(y) = 0$, поэтому для данных k

$$\frac{\partial^{m_k+n_k}u}{\partial x^{m_k}\partial y^{n_k}} = P_m^{(m_k)}(x)Y^{(n_k)}(y). \qquad (12)$$

Используя (11) и (12), левую часть уравнения (1) можно представить в виде:

$$\prod_{k=1}^{K}\frac{\partial^{m_k+n_k}u}{\partial x^{m_k}\partial y^{n_k}} = \prod_{k\in\Xi_1}\left\{X^{(m_k)}(x)Q_n^{(n_k)}(y)\right\}\cdot\prod_{k\in\Xi_2}\left\{P_m^{(m_k)}(x)Y^{(n_k)}(y)\right\}. \qquad (13)$$

Используя соотношение (13), уравнение (1) можно преобразовать так:

$$\frac{\prod\limits_{k\in\Xi_2}P_m^{(m_k)}(x)\cdot\prod\limits_{k\in\Xi_1}X^{(m_k)}(x)}{f(x)}\cdot\frac{\prod\limits_{k\in\Xi_1}Q_n^{(n_k)}(y)\cdot\prod\limits_{k\in\Xi_2}Y^{(n_k)}(y)}{g(y)} = 1. \qquad (14)$$

Левая часть уравнения (14) представляет собой произведение двух сомножителей, первый из которых зависит от x, а второй от y. Поэтому, в соответствии с известным методом разделения переменных [10,11], уравнение (14) можно удовлетворить только в том случае, если

$$\frac{\prod\limits_{k\in\Xi_2}P_m^{(m_k)}(x)\cdot\prod\limits_{k\in\Xi_1}X^{(m_k)}(x)}{f(x)} = \mu, \quad \frac{\prod\limits_{k\in\Xi_1}Q_n^{(n_k)}(y)\cdot\prod\limits_{k\in\Xi_2}Y^{(n_k)}(y)}{g(y)} = \nu, \qquad (15)$$

где μ,ν – постоянные, удовлетворяющие условию $\mu\nu = 1$. Из (15) непосредственно следуют уравнения (5).

2. Пусть для некоторых $m, n \in \mathbf{N}$ при всех $k \in \Xi$ выполнены условия (2), т. е. $\Xi_2 = \varnothing$. Тогда при всех $k \in \Xi$ производные, входящие в (1), выражаются с помощью соотношения (11). Проводя рассуждения, аналогичные предыдущему пункту, получаем, что уравнение (1) в этом случае можно представить в виде:

$$\frac{\prod\limits_{k\in\Xi}X^{(m_k)}(x)}{f(x)}\cdot\frac{\prod\limits_{k\in\Xi}Q_n^{(n_k)}(y)}{g(y)} = 1 \qquad (16)$$

Разделяя переменные в (16), приходим к уравнениям (6) и (7). Для случая $\Xi_1 = \varnothing$ доказательство проводится полностью аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2

Пусть $u_0(x,y)$ – любое решение уравнения (1),

$$\widetilde{m} = \min(m_k)\big|_{k\in\Xi} - 1, \quad \widetilde{n} = \min(n_k)\big|_{k\in\Xi} - 1. \qquad (17)$$

Пусть также существуют такие $m', n' \in \mathbf{N}$, что для каждого $k \in \Xi$ выполнено хотя бы одно из условий:

$$m' < m_k,\ n' < n_k. \tag{18}$$

Тогда функция

$$u(x,y) = u_0(x,y) + P_{\widetilde{m}}(x)Y_0(y) + Q_{\widetilde{n}}(y)X_0(x) + R_{m'n'}(x,y) \tag{19}$$

также является решением уравнения (1), где $P_{\widetilde{m}}(x), Q_{\widetilde{n}}(y)$ – полиномы с произвольными коэффициентами, причём $P_{\widetilde{m}}(x) \equiv 0$ *при* $\widetilde{m} = -1$, *и* $Q_{\widetilde{n}}(y) \equiv 0$ при $\widetilde{n} = -1$; $R_{m'n'}(x,y)$ – полином степени m' по x и степени n' по y с произвольными коэффициентами; $X_0(x), Y_0(y)$ – произвольные функции, дифференцируемые достаточное число раз.

Доказательство

Запишем производные для функции (19), входящие в левую часть уравнения (1):

$$\frac{\partial^{m_k+n_k} u}{\partial x^{m_k} \partial y^{n_k}} = \frac{\partial^{m_k+n_k} u_0}{\partial x^{m_k} \partial y^{n_k}} + P_{\widetilde{m}}^{(m_k)}(x)Y^{(n_k)}(y) + X^{(m_k)}(x)Q_{\widetilde{n}}^{(n_k)}(y) + \frac{\partial^{m_k+n_k} R_{m'n'}}{\partial x^{m_k} \partial y^{n_k}} \tag{20}$$

Так как $\widetilde{m}, \widetilde{n}$ определяются выражениями (17), то при всех $k \in \Xi$

$$P_{\widetilde{m}}^{(m_k)}(x) \equiv 0, \quad Q_{\widetilde{n}}^{(n_k)}(y) \equiv 0. \tag{21}$$

Далее, из того, что при каждом $k \in \Xi$ выполнено хотя бы одно из условий (18), следует:

$$\frac{\partial^{m_k+n_k} R_{m'n'}}{\partial x^{m_k} \partial y^{n_k}} = 0. \tag{22}$$

Из (20) – (22) имеем, что $\dfrac{\partial^{m_k+n_k} u}{\partial x^{m_k} \partial y^{n_k}} = \dfrac{\partial^{m_k+n_k} u_0}{\partial x^{m_k} \partial y^{n_k}}$. Тогда, если $u_0(x,y)$ является решением уравнения (1), то и $u(x,y)$ также удовлетворяет этому уравнению. Теорема доказана.

Следствие

Уравнение (1) имеет следующие решения:

$$u(x,y) = X(x)Y(y) + P_{\widetilde{m}}(x)Y_0(y) + Q_{\widetilde{n}}(y)X_0(x) + R_{m'n'}(x,y). \tag{23}$$

Здесь $P_{\widetilde{m}}(x), Q_{\widetilde{n}}(y), R_{m'n'}(x,y)$, $X_0(x), Y_0(y)$ определяются согласно условию теоремы 2, а функции $X(x), Y(y)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\prod_{k=1}^{K} X^{(m_k)}(x) = \mu f(x), \quad \prod_{k=1}^{K} Y^{(n_k)}(y) = \nu g(y), \tag{24}$$

где μ, ν – постоянные, удовлетворяющие условию $\mu\nu = 1$.

Доказательство

Подставим функцию $u_0(x,y) = X(x)Y(y)$ в уравнение (1) и представим его в виде:

$$\frac{\prod_{k=1}^{K} X^{(m_k)}(x)}{f(x)} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{K} Y^{(n_k)}(y)}{g(y)} = 1 \tag{25}$$

Разделяя переменные в (25) аналогично (14), (16), получаем, что функция $u_0(x,y) = X(x)Y(y)$ является решением уравнения (1) только в том случае, если $X(x), Y(y)$ удовлетворяют уравнениям (24). Тогда, согласно теореме 2, функция, определяемая выражением (23), также является решением уравнения (1). Следствие доказано.

Пример

Рассмотрим уравнение, не содержащее смешанных производных:

$$\prod_{k\in\Xi_1}\frac{\partial^{m_k}u}{\partial x^{m_k}}\cdot\prod_{k\in\Xi_2}\frac{\partial^{n_k}u}{\partial y^{n_k}}=f(x)g(y). \qquad (26)$$

Для уравнения (26) $n_k=0$ при всех $k\in\Xi_1$, и $m_k=0$ при всех $k\in\Xi_2$.Согласно доказанным выше теоремам 1,2, уравнение (26) имеет следующие семейства решений:

Семейство 1:

$$u(x,y)=P_m(x)Y(y)+Q_n(y)X(x)+R_{m'n'}(x,y), \qquad (27)$$

где степени полиномов m, n, m', n' удовлетворяют условиям:

$$0\le m\le \min(m_k)\big|_{k\in\Xi_1}-1,\quad 0\le n\le \min(n_k)\big|_{k\in\Xi_2}-1, \qquad (28а)$$

$$m'=\min(m_k)\big|_{k\in\Xi_1}-1,\quad n'=\min(n_k)\big|_{k\in\Xi_2}-1, \qquad (28б)$$

а функции $X(x), Y(y)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\prod_{k\in\Xi_1}X^{(m_k)}(x)=\frac{\mu f(x)}{\left[P_m(x)\right]^{K_2}},\quad \prod_{k\in\Xi_2}Y^{(n_k)}(y)=\frac{\nu g(y)}{\left[Q_n(y)\right]^{K_1}}, \qquad (29)$$

где K_1, K_2 – число элементов в множествах Ξ_1, Ξ_2 соответственно.

Семейство 2:

$$u(x,y)=X(x)Y(y)+R_{m'n'}(x,y), \qquad (30)$$

где m', n' определяются условиями (28б), а функции $X(x), Y(y)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\prod_{k\in\Xi_1}X^{(m_k)}(x)=\mu f(x),\quad \prod_{k\in\Xi_2}Y^{(n_k)}(y)=\nu g(y), \qquad (31)$$

Отметим, что в обоих семействах решений отсутствуют слагаемые $P_{\tilde m}(x)Y_0(y)+Q_{\tilde n}(y)X_0(x)$, поскольку из (17) $\tilde m=-1$, $\tilde n=-1$, и согласно теореме 2, $P_{\tilde m}(x)\equiv 0$ *и* $Q_{\tilde n}(y)\equiv 0$.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе исследовано дифференциальное уравнение с двумя независимыми переменными, содержащее произведение частных производных любых порядков. Получены псевдополиномиальные решения этого уравнения, которые выражаются через полиномы от независимых переменных и функции, которые либо определяются как решения некоторых ОДУ, либо являются произвольными. Доказана теорема, позволяющая на основании известного частного решения данного уравнения получить новое семейство решений. В качестве примера рассмотрены решения двумерного уравнения, не содержащего смешанных производных. Полученные в данной работе результаты могут быть обобщены на класс многомерных уравнений, содержащих произведение частных производных любых порядков.

Список литературы
References

1. Карачик В.В. 2011. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами I. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика».– № 10(227): 4–17.

Karachik V.V. 2011. Polinomialnye resheniya differentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s postoyannymi koefficientami I. Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika . Mekhanika. Fizika. No 10(227).: 4–17 (in Russian).

2. Карачик В.В. 2011. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами II. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика».№ 32(249): 27–38.

Karachik V.V. 2011. Polinomialnye resheniya differentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s postoyannymi koefficientami II. Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika . Mekhanika. Fizika. No 32(249): 27–38 (in Russian).

3. Карачик В.В., Антропова Н.А. 2010. О решении неоднородного полигармонического уравнения и неоднородного уравнения Гельмгольца. Дифференциальные уравнения. Т.46, № 3: 384–395.

Karachik V.V., Antropova N.A. 2010. On the solution of the inhomogeneous polyharmonic equation and the inhomogeneous Helmholtz equation. Differential equations. V.46, No 3: 387–399.

4. Miles E.P., Williams E. 1959. Basic sets of polynomials for iterated Laplace and wave equations.Duke Mathematical Journal. V.26, No 1: 35–40.

Miles E.P., Williams E. 1959. Basic sets of polynomials for iterated Laplace and wave equations. Duke Mathematical Journal. V.26, No 1.: 35–40.

5. Рахмелевич И.В. 2015. О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 1: 12–19.

Rakhmelevich I.V. 2015. O dvumernyh hyperbolicheskih uravneniyah so stepennoy nelineynostiu po proizvodnym. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. No 1: 12–19. (In Russian).

6. Рахмелевич И.В. 2015. О некоторых новых решениях многомерного уравнения в частных производных первого порядка со степенными нелинейностями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 3: 18–25.

Rakhmelevich I.V. 2015. O nekotorykh novykh resheniyakh mnogomernogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka so stepennymi nelineynost'yami. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. No 3: 18–25 (in Russian).

7. Рахмелевич И.В. 2016. О решениях многомерного дифференциального уравнения произвольного порядка со смешанной старшей частной производной и степенными нелинейностями. Владикавказский математический журнал. № 4: 41–49.

Rakhmelevich I.V. 2016. O resheniyakh mnogomernogo differentsialnogo uravneniya so smeshannoy starshey chastnoy proizvodnoy i stepennymi nelineynost'yami. Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal. No 4: 41–49 (in Russian).

8. Рахмелевич И.В. 2016. О редукции многомерных уравнений первого порядка с мультиоднородной функцией от производных. Известия вузов. Математика. № 4: 57–67.

Rakhmelevich I.V. 2016. Reduction of multidimensional first order equations with multi-homogeneous function of derivatives. Russian Mathematics. V.60. № 4: 47–55.

9. Рахмелевич И.В. 2014. О решениях многомерного уравнения Клеро с мультиоднородной функцией от производных. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. Т. 14. № 4-1: 374–381.

Rakhmelevich I.V. 2014. O resheniyah mnogomernogo uravneniya Clairaut s multiodnorodnoy funkciey ot proizvodnyh. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seria. Seria: Matematica. Mehanica. Informatica. V.14. № 4-1: 374–381. (In Russian).

10. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. 2002. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М., Физматлит, 432 с.

Polyanin A. D. and Zaitsev V. F. 2012. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton.

11. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. 2005. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., Физматлит, 256.

Polyanin, A. D., Zaitsev, V. F., Zhurov A. I. 2005. Metody resheniya nelineynyh uravneniy matematicheskoy fiziki i mehaniki. M., Fizmatlit (In Russian).