УДК 512

О СОВПАДЕНИИ КЛАССОВ СПЕКТРАЛЬНО ОБРАТИМЫХ И ГАМИЛЬТОНОВЫХ АВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ABOUT EQUIVALENCE OF SPECTRAL REVERSIBLE AND HAMILTONIAN DYNAMICAL SYSTEM

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин
Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin

Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod State University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: virch48@bsu.edu.ru

Аннотация
В сообщении анонсируется доказательство утверждения о том, что любая дифференцируемая автономная спектрально обратимая четномерная динамическая система является гамильтоновой.

Abstract
In the communication it is announced the proof of the assertion about coincidence of the class of spectrally reversible differentiable autonomous dynamical systems with any fixed even dimension and the class of autonomous Hamiltonian systems with the same dimension.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, касательные динамические системы, спектральная обратимость.
Keywords: Hamiltonian systems, tangent dynamical systems, spectral reversibility.

Пусть $\mathsf{F}:\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ – непрерывно дифференцируемая биекция четномерного евклидового пространства. Это означает, что матриц-функция

$$\mathsf{G}(\mathbf{X})=\frac{\partial \mathsf{F}_j(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}, \qquad \mathbf{X}=\langle \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_{2n}\rangle \tag{1}$$

невырождена почти всюду на $\mathbf{R}^{2n}$, т.е. почти всюду на $\mathbf{R}^{2n}$ имеет место $\det\mathsf{G}(\mathbf{X})\neq 0$. Далее мы предполагаем, что значения матриц-функции $\mathsf{G}(\mathbf{X})$ почти всюду на $\mathbf{R}^{2n}$ имеют *скалярный тип* (см. [1]), то есть в своем *каноническом представлении* не содержат *клеток Жордана*. В частности, это имеет место всегда, если почти всюду на $\mathbf{R}^{2n}$ характеристическое уравнение матрицы $\mathsf{G}(\mathbf{X})$ не имеет кратных корней.

Рассмотрим *автономную* систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{X}}=\mathsf{F}(\mathbf{X}), \qquad \mathbf{X}=\langle \mathbf{x}_j; \mathbf{j}=1\div 2\mathbf{n}\rangle\in\mathbf{R}^{2n}, \tag{2}$$

решениями которой являются вектор-функции $\mathbf{X}(\mathbf{t})=\langle \mathbf{x}_1(\mathbf{t}),\mathbf{x}_2(\mathbf{t}),\ldots,\mathbf{x}_{2n}(\mathbf{t})\rangle$, зависящие от параметра $\mathbf{t}$. Здесь точка обозначает производную по $\mathbf{t}$. Термин *автономная система* означает, что правая часть всех уравнений в (2) не зависит от $\mathbf{t}$. Далее, системы дифференциальных уравнений вида (2) будем называть *динамическими системами* с *фазовым* *пространством* $\mathbf{R}^{2n}$. Ввиду непрерывной дифференцируемости правой части системы (2), ее локальные решения всегда существуют и единственны. В дальнейшем, мы не занимаемся изучением каждого отдельного решения. Наше внимание будет сосредоточено на изучении всего многообразия систем (2).

Система (2) называется *гамильтоновой в канонической форме*, если отображение $\mathbf{F}$ представимо в форме

$$\mathbf{F}_j(\mathrm{X}) = \mathbf{J}_{jk}\frac{\partial \mathbf{H}(\mathrm{X})}{\partial \mathbf{x}_k}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(здесь и далее принято соглашение о суммировании от 1 до $2\mathbf{n}$ по любым имеющимся в формуле парно повторяющимся индексам), где $\mathbf{H}: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbf{R}^{2n}$, у которой *гессиан* не равен нулю почти всюду на $\mathbf{R}^{2n}$,

$$\det \mathrm{H}(\mathrm{X}) \neq 0, \qquad \mathrm{H}(\mathrm{X}) = \det\left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}_j \partial \mathbf{x}_k}\right)_{j,k=1\div 2n} \tag{4}$$

Отличие от нуля гессиана гарантирует выполнение условия невырожденности $\det \mathbf{G}(\mathrm{X}) \neq 0$.

Пусть функция $\mathbf{H}$ представляет собой квадратичную форму

$$\mathbf{H}(\mathrm{X}) = \frac{1}{2}(\mathrm{AP},\mathrm{P}) + (\mathrm{BP},\mathrm{Q}) + \frac{1}{2}(\mathrm{CQ},\mathrm{Q}),$$

где A, B, C - $\mathbf{n}\times\mathbf{n}$ матрицы такие, что $\mathrm{A}^+ = \mathrm{A}$, $\mathrm{C}^+ = \mathrm{C}$, + обозначает операцию транспонирования, и $\mathbf{P} = \langle \mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_n\rangle$, $\mathbf{Q} = \langle \mathbf{q}_1,\dots,\mathbf{q}_n\rangle$ - $\mathbf{n}$-мерные векторы соответственно в $\mathbf{P}$- и $\mathbf{Q}$-пространствах, прямая сумма которых составляет пространство $\mathbf{R}^{2n}$. В этом случае динамическая система (4) линейна

$$\dot{\mathrm{X}} = \mathbf{G}\mathrm{X}, \qquad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -\mathrm{B}^+ & -\mathrm{C} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{pmatrix} \tag{5}$$

и невырождена $\det \mathbf{G}(\mathrm{X}) \neq 0$. В соответствии со сказанным выше, предполагается, что генераторы $\mathbf{G}$ имеют скалярный тип, т.е. собственные векторы каждого такого генератора образуют полный набор в $\mathbf{R}^{2n}$.

Ранее в работах авторов (см. [2]) было показано, что генератор $\mathbf{G}$ каждой системы (5) обладает свойством обратимости спектра. В условиях, когда матрица $\mathbf{G}$ имеет скалярный тип, это означает, что все множество ее собственных значений $\{\lambda_j; \mathbf{j} = 1\div 2\mathbf{n}\}$ разбивается на совокупность пар $\{\{\lambda_{j_s}; \lambda_{k_s}\}; \mathbf{s} = 1\div \mathbf{n}\}$, где в каждой паре имеет место $\lambda_{j_s} = -\lambda_{k_s}$. В связи с этим в работах [3], [4] было введены понятия о *спектрально обратимых матрицах* $\mathbf{G}$ и *спектрально обратимых* линейных динамических системах $\dot{\mathrm{X}} = \mathbf{G}\mathrm{X}$, у которых генераторы $\mathbf{G}$ представляются спектрально обратимыми матрицами. Было показано, что имеет место

Теорема 1. Каждая спектрально обратимая матрица $\mathbf{G}$ подобна генератору линейной гамильтоновой системы. Т.е. для каждой спектрально обратимой матрицы $\mathbf{G}$ существует такая вещественная невырожденная матрица $\mathbf{V}$, что справедлива формула

$$\mathbf{V}\mathbf{G}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{J}\mathbf{K}, \ \mathbf{K}^+ = \mathbf{K}. \tag{6}$$

Таким образом, класс линейных спектрально обратимых систем эквивалентен классу линейных гамильтоновых систем. Понятие спектральной обратимости распространяется на нелинейные динамические системы. С этой целью для систем вида (1) вводится понятие *касательной динамической системы*. Будем говорить, что линейная динамическая система

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(\mathbf{X})\mathbf{Y} \tag{7}$$

является касательной в точке $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{2n}$ фазового пространства системы (1). Тогда систему (1) будем называть *спектрально обратимой*, если касательная система (7) в каждой точке $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{2n}$ является спектрально обратимой. В связи с этим возникает вопрос о связи между классами **H** и **S**, соответственно, гамильтоновых систем и спектрально обратимых систем. Непосредственно из определения следует, что класс **H** содержится в классе **S**, $\mathbf{H} \subset \mathbf{S}$. В настоящем сообщении мы анонсируем обратное включение. А именно, справедлива

Теорема 2. Любая спектрально обратимая система (1) является гамильтоновой.

Существенными моментами при доказательстве этого утверждения являются следующие два пункта.

1. Доказывается, что на основе матриц-функции $\mathbf{G}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{2n}$, используя утверждение теоремы 1 можно построить непрерывные матриц-функции $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{K}(\mathbf{X})$, для которых имеет место

$$\mathbf{V}(\mathbf{X})\mathbf{G}(\mathbf{X})\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{J}\mathbf{K}(\mathbf{X}), \mathbf{K}^{+}(\mathbf{X}) = \mathbf{K}(\mathbf{X}). \tag{8}$$

Это осуществляется построением разностного уравнения на произвольной сетке в $\mathbf{R}^{2n}$ с произвольным шагом $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + \Delta_1] \times \ldots \times [\mathbf{x}_{2n}, \mathbf{x}_{2n} + \Delta_{2n}]$, решение которого с некоторым начальным условием определяют матриц-функции $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{V}(\mathbf{X})$, которые стремятся к требуемым матриц-функциям $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ при стремлении шага к нулю.

2. Далее доказывается, что значения матриц-функции $\mathbf{J}\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{J}\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{X})\mathbf{J}\mathbf{K}(\mathbf{X})\mathbf{V}(\mathbf{X})$ при подходящем выборе $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ являются симметричными матрицами. Так как

$$(\mathbf{J}\mathbf{G})_{ij}(\mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{J}\mathbf{F})_i(\mathbf{X}),$$

то отсюда следует, что

$$(\mathbf{J}\mathbf{G})_{ij}(\mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}\mathbf{J}_{ik}\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{x}_k}$$

при подходящем выборе функции $\mathbf{H}(\mathbf{X})$.

Список литературы
References

1. Глазман И.М., Любич Ю.И. 1969. Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 476 с.

Glazman I.M., Lyubich Yu.I. 1969. Finite dimensional linear analysis by problems. M.: Nauka, 476 p.

2. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. 2011. Симметричность спектра линейных гамильтоновых систем. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 17(112); 24: 79-180.

Virchenko Yu.P., Subbotin A.V. 2011. Spectrum symmetry of linear hamiltonian systems. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. 17(112), 24, 79-180.

3. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. 2011. Свойство локальной обратимости гамильтоновых динамических систем. Материалы Международной конференции "Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел"\ Белгород, 17-21 октября 2011 : 37-38.

Virchenko Yu.P., Subbotin A.V. 2011. The property of local reversibility of Hamiltonian dynamical systems. Materials of International conference "Complex Analysis and its applications to differential equations and number theory. Belgorod 17-21 October 2011: 37-38.

4. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. 2013. О спектральном разложении генераторов гамильтоновых систем. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 5(148), 30: 135-141.

Virchenko Yu.P., Subbotin A.V. 2013. About spectral decomposition of generators of linear hamiltonian systems. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 5(148), 30: 135-141.

5. Гантмахер Ф.Р. 1966. Теория матриц, М.: Наука, 576 с.

Gantmakher F.R., 1966. Matrix Theory. M.: Nauka, 576 p.