УДК 517.982

ОБ АБСОЛЮТНО КАЛЬДЕРОНОВЫХ ЭЛЕМЕНТАХ БАНАХОВОЙ ПАРЫ (l_1, c_0)

ON ABSOLUTE CALDERON'S ELEMENTS OF BANACH PAIR (l_1, c_0)

В.И. Дмитриев, Л.И. Студеникина, Т.В. Шевцова
V.I. Dmitriev, L.I. Studenikina, T.V.Shevtsova

Юго-Западный государственный университет,
Россия, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Southwest State University, 94, 50 years of October street, Kursk, 305040, Russia

E-mail: sli-kursk@yandex.ru

Аннотация
Назовем элемент банаховой пары абсолютно кальдероновым, если его интерполяционная орбита в любой (относительно полной) банаховой паре совпадает с его *K*-орбитой. Мы исследуем абсолютно кальдероновы элементы "стандартной" банаховой пары (ℓ_1, c_0). Найдены семь различных характеризаций таких элементов. Сформулированы нерешенные задачи.

Abstract
We determine an element of Banach pair to be absolute Calderon`s if its interpolation orbit in any (relatively complete) Banach pair coincides with its *K*-orbit. We study the absolute Calderon`s elements of the "standard" Banach pair (ℓ_1, c_0). We have found seven various characterizations of such elements. Several unsolved problems are formulated.

Ключевые слова: банахова пара, K – функционал Петре, интерполяционная орбита элемента, пространства ℓ_p.

Keywords: Banach pair, Peetre`s K – functional, interpolation orbit of element, spaces ℓ_p.

Пусть $\overline{A} = (A_0, A_1)$ – пара банаховых пространств (банахова пара, см. [1-2]) K – функционал Петре элементов $a \in A_0 + A_1$ определяется формулой

$$K(t, a; \overline{A}) = \inf\left\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} : a_0 + a_1 = a\right\},$$

где $t > 0$. При фиксированном $a \neq 0$ функция $K(t) = K(t, a; \overline{A})$ является положительной вогнутой функцией на $(0; \infty)$, характеризующей, в некотором смысле, местоположение элемента a в паре $\overline{A}$. Функция $K(t)$ имеет обратную: $K^{-1} : (K(0+), K(\infty)) \to (0, \infty)$.

Если $\overline{A}$ и $\overline{B}$ – две банаховы пары, $a \in A_0 + A_1$, то множество всех таких элементов $b \in B_0 + B_1$, для которых $K(t, b; \overline{B}) \leq c\, K(t, a; \overline{A})$ при всех $t > 0$ с некоторой постоянной c (зависящей от b), образует т.н. K-орбиту элемента a в паре $\overline{B}$: $K - orb(a; \overline{A} \to \overline{B})$. Просто орбитой $Orb(a; \overline{A} \to \overline{B})$ элемента a называется множество $\{Ta\}$, где T пробегает совокупность всех линейных ограниченных операторов из пары $\overline{A}$ в пару $\overline{B}$ (см.[1-3], [6]). Всегда $Orb\, a \subset K - orb\, a$.

Проблема эффективной характеризации орбит элементов является одной из центральных задач теории интерполяционных пространств (см. [1-5]); дело в том, что если A и B – промежуточные пространства пар $\overline{A}$ и $\overline{B}$, то действие любого линейного оператора $T: \overline{A} \to \overline{B}$ «на краях пар» влечет его действие $T: \overline{A} \to \overline{B}$ «между краями» (интерполяция оператора), только если $a \in A$ влечет $orb\ (a; \overline{A} \to \overline{B}) \subset B$. Первый фундаментальный результат в этом направлении был получен Митягиным Б.С. (частично) и Кальдероном А.П.: если $\overline{A} = (L_1, L_\infty)$, $\overline{B} = (L_1, L_\infty)$, то $Orb\, a = K - orb\, a$ для любого $a \in L_1 + L_\infty$ (отметим, что описание орбит вида $Orb\, a = K - orb\, a$ является эффективным). Однако для многих других банаховых пар аналогичное утверждение, вообще говоря, не имеет места, что означает, что найдутся элементы $a \in A_0 + A_1$, для которых вложение $Orb\, a \subset K - orb\, a$ оказывается строгим, по крайней мере, в некоторых банаховых парах $\overline{B}$ (см.[3], [6]). В такой ситуации представляют интерес те элементы a заданной пары $\overline{A}$, с которыми подобного случиться не может.

Элемент $a \in A_0 + A_1$ назовем абсолютно кальдероновым, если $Orb(a; \overline{A} \to \overline{X}) = K - orb(a; \overline{A} \to \overline{X})$ для любой банаховой пары $\overline{X}$ (с несущественным ограничением: $\overline{X}$ должна обладать свойством т.н. относительной полноты ([1-2])).

Сформулируем основную задачу: охарактеризовать все абсолютно кальдероновы элементы заданной банаховой пары $\overline{A}$. Разумеется, в такой общей формулировке задача весьма трудна. В настоящей заметке мы исследуем эту задачу для канонической пары пространств последовательностей $\overline{A} = (\ell_1, c_0)$.

Всюду ниже термин «оператор» значит «линейный непрерывный оператор». Мы используем далее понятие «орбитально эквивалентные элементы», объясним его: если $\overline{A}$ и $\overline{B}$ банаховы пары, то элементы $a \in A_0 + A_1$ и $b \in B_0 + B_1$ называются орбитально эквивалентными, если

$$Orb(a; \overline{A} \to \overline{X}) = Orb(b; \overline{B} \to \overline{X})$$

для любой банаховой пары $\overline{X}$. Легко понять, что a и b орбитально эквивалентны только лишь в том случае, если существуют операторы $T: \overline{A} \to \overline{B}$ и $S: \overline{B} \to \overline{A}$, такие, что $Ta = b$ и $Sb = a$.

Теперь сформулируем наш основной результат.

Теорема. Пусть $f \in \ell_1 + c_0 = c_0$. Положим $K(t) = K(t, f, \ell_1, c_0)$. Пусть $1 \le p < \infty$. Нижеследующие утверждения равносильны:

1) элемент f представляет собой абсолютно кальдеронов элемент пары (ℓ_1, c_0);
2) (для $f \neq 0$) существует постоянная γ, $0 < \gamma < 1$, такая, что
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{-1}(\gamma(K(n))}{n^2} < \infty;$$
3) элемент f пары (ℓ_1, c_0) орбитально эквивалентен некоторому элементу «весовой» пары вида $(\ell_1^{w_0}, \ell_p^{w_1})$; поясним: $\|x\|_{\ell_q^w} = \|w \cdot x\|_{\ell_q}$, где вес w – это положительная последовательность;
4) существует вес $w \in \ell_1$ (а, значит, пространство $\ell_1^w \supset \ell_\infty$), такой, что элемент f пары (ℓ_1, c_0) орбитально эквивалентен элементу f как элементу пары (ℓ_1, ℓ_1^w);

5) существует оператор из пары (ℓ_1, c_0) в пару (ℓ_1, c_0), абсолютно суммирующий из c_0 в c_0, для которого элемент f является неподвижной точкой;
6) существует оператор из пары (ℓ_1, c_0) в пару (ℓ_1, c_0), ядерный из c_0 в c_0, оставляющий элемент f на месте.

При доказательстве теоремы нам понадобится следующий факт, (см.[4]).

Лемма. Пусть $\overline{B} = (B_0, B_1)$ – банахова пара. Если $f \in c_0$, $B \in B_1$ и $b = Tf$, где T – оператор из пары (ℓ_1, c_0) в пару $\overline{B}$, абсолютно суммирующий из c_0 в B_1, то найдется вес $w \in \ell_1$ (равносильно $\ell_1^w \supset \ell_\infty$), такой, что $b \in Orb(f; (\ell_1, \ell_1^w) \to \overline{B})$.

Доказательство. Норму оператора T как оператора из ℓ_1 в B_0 обозначим через k_0, а абсолютно суммирующую норму оператора T как оператора из c_0 в B_1 – через k_1.

Пусть (e_n) – стандартный базис пространства c_0. Имеем

$$\sum_n |\varphi_n| \|Te_n\|_{B_1} = \sum_n \|T(\varphi_n e_n\|_{B_1} \le$$

в силу абсолютной суммируемости

$$\le k_1 \max_{\varepsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_n \varepsilon_n \varphi_n e_n \right\|_{c_0} = k_1 \sup_n |\varphi_n|$$

для любой последовательности (φ_n), имеющей конечное число ненулевых членов. Следовательно,

$$\sum_n \|Te_n\|_{B_1} \le k_1.$$

Положим $w_n = \|Te_n\|_{B_1}$, если $Te_n \ne 0$, и $w_n = 1/n^2$, если $Te_n = 0$. Имеем $w = (w_n) \in \ell_1$.

Рассмотрим теперь ряд $\sum_n \lambda_n Te_n$ (λ_n – числа).

Если $\lambda = (\lambda_n) \in \ell_1$, то этот ряд сходится абсолютно в B_0:

$$\sum_n |\lambda_n| \|Te_n\|_{B_0} \le \sum_n |\lambda_n| k_0 \|e_n\|_{\ell_1} = k_0 \|\lambda\|_{\ell_1}.$$

Если же $\lambda = (\lambda_n) \in \ell_1^w$, то указанный ряд сходится абсолютно в B_1:

$$\sum_n |\lambda_n| \|Te_n\|_{B_1} \le \sum_n |\lambda_n| w_n = \|\lambda\|_{\ell_1^w}.$$

Для $\lambda \in \ell_1 + \ell_1^w$ определим

$$S\lambda = \sum_n \lambda_n Te_n.$$

S – оператор из пары (ℓ_1, ℓ_1^w) в пару $\overline{B}$. Учитывая, что (e_n) – шаудеровский базис в c_0, а T непрерывен из c_0 в $B_0 + B_1$, находим

$$Sf = \sum_n f_n Te_n = T\left(\sum_n f_n e_n \right) = Tf = b.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы.

3) $\Rightarrow$ 6). Пусть элемент f пары (ℓ_1, c_0) орбитально эквивалентен элементу x пары $(\ell_1^{w_0}, \ell_p^{w_1})$, $1 \le p < \infty$, т.е. $Tf = x$, где T : $(\ell_1, c_0) \to$ $(\ell_1^{w_0}, \ell_p^{w_1})$, и $Sx = f$, где S: $(\ell_1^{w_0}, \ell_p^{w_1}) \to (\ell_1, c_0)$. Положим $R = ST$. Имеем R: $(\ell_1, c_0) \to (\ell_1, c_0)$ и $Rf = f$. Предположим, что $1 \le p \le 2$. По теореме Гротендика оператор T как оператор из c_0 в ℓ_1^w является абсолютно 2-суммирующим. Следовательно, оператор R абсолютно 2-суммирует из c_0 в c_0. Поскольку, как известно, произведение двух абсолютно 2-суммирующих операторов представляет собой ядерный оператор, то оператор R^2 – ядерный из c_0 в c_0. Кроме того, $R^2 : (\ell_1, c_0) \to (\ell_1, c_0)$ и $R^2 f = f$.

Предположим теперь, что $2 < p < \infty$. Оператор T как оператор из c_0 в ℓ_p^w является абсолютно r-суммирующим при любом $r > p$. То же справедливо для R: $c_0 \to c_0$. Возьмем $r = 2^n$ с натуральным n. Поскольку, как известно, произведение абсолютно α–суммирующего и абсолютно β–суммирующего операторов есть абсолютно γ–суммирующий оператор, где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\gamma} \le 1$, то оператор R^2 абсолютно 2^{n-1}–суммирует из c_0 в c_0, $(R^2)^2 = R^{2^2}$ абсолютно 2^{n-2}–суммирует из c_0 в c_0, … $R^{2^{(n-1)}}$ абсолютно 2–суммирует из c_0 в c_0. Значит, R^{2^n} – ядерный из c_0 в c_0. Кроме того, $R^{2^n} : (\ell_1, c_0)$ $\to (\ell_1, c_0)$ и $R^{2^n} f = f$.

6) $\Rightarrow$ 5). Тривиально, так как ядерный оператор является абсолютно суммирующим.

5) $\Rightarrow$ 4). Пусть $T : (\ell_1, c_0) \to (\ell_1, c_0)$, T – абсолютно суммирующий из c_0 в c_0. $Tf = f$. В соответствии с леммой найдутся вес $w \in \ell_1$ и оператор S: $(\ell_1, \ell_1^w) \to$ (ℓ_1, c_0) так, что $Sf = f$. С другой стороны, поскольку $c_0 \subset \ell_1^w$, имеем $id : (\ell_1, c_0) \to$ (ℓ_1, ℓ_p^w), $idf = f$. Следовательно, элемент f пары (ℓ_1, c_0) орбитально эквивалентен элементу f пары (ℓ_1, ℓ_1^w).

4) $\Rightarrow$ 1). Пусть

$$Orb(f; (\ell_1, c_0) \to \overline{X}) = Orb(f; (\ell_1, \ell_1^w) \to \overline{X}) \qquad (*)$$

для любой банаховой пары $\overline{X}$. Известно, что интерполяция из пары весовых ℓ_1 – пространств в любую относительно полную банахову пару К–монотонна, (см.[2-4]). Поэтому, если $\overline{X}$ относительно полна, имеем:

$$Orb(f; (\ell_1, \ell_1^w) \to \overline{X}) = K - orb(f; (\ell_1, \ell_1^w) \to \overline{X}).$$

Обращаясь к условию (*) и вытекающей из (*) эквивалентности функций $K(t, f, \ell_1, c_0)$ и $K(t, f, \ell_1, \ell_1^w)$, можем заключить, что $Orb(f; (\ell_1, c_0) \to \overline{X}) = K - orb(f; (\ell_1 c_0) \to \overline{X})$.

1) $\Leftrightarrow$ 2). Равносильность утверждений 1) и 2) доказана в работе [5].

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть f – абсолютно кальдеронов элемент пары (ℓ_1, c_0). Рассмотрим любую K_0–полную, (см.[1-2]), пару $(\ell_1^{w_0}, \ell_p^{w_1})$. Выберем элемент $x \in \ell_1^{w_0} + \ell_p^{w_1}$ так чтобы функция $K(t,x;\ \ell_1^{w_0}, \ell_p^{w_1})$ была эквивалентна функции $K(t, f, \ell_1, c_0)$. Так как элемент f абсолютно кальдеронов, то x принадлежит $Orb(f;(\ell_1, c_0) \to (\ell_1^{w_0}, \ell_p^{w_1}))$. Остается установить существование оператора из $(\ell_1^{w_0}, \ell_p^{w_1})$ в (ℓ_1, c_0), переводящего элемент x в элемент f. Но это вытекает из теоремы о K–монотонности интерполяции из пары $(\ell_{p_0}^{w_0}, \ell_{p_1}^{w_1})$ в пару $(\ell_{q_0}^{v_0}, \ell_{q_1}^{v_1})$ при $p_0 \le q_0$, $p_1 \le q_1$, (см. [4] или [3]).

Теорема доказана.

Просматривая доказательство импликации 4) $\Rightarrow$ 1), можно заметить, что утверждения 1) – 6) равносильны утверждению

7) элемент f пары (ℓ_1, c_0) орбитально эквивалентен некоторому элементу пары вида $(\ell_1^{w_0}, \ell_1^{w_1})$.

Заключительные замечания. На нижеследующие вопросы мы пока не знаем ответов.

Условие 6) естественно порождает следующую задачу. Для заданной банаховой пары $\bar{A} = (A_0, A_1)$ рассмотрим операторы T, непрерывные из A_0 в A_0 и ядерные из A_1 в A_1. Выражаясь несколько неопределенно, что представляют собой неподвижные элементы таких операторов?

Условие 2) можно переформулировать более удобным образом: найдутся неубывающая последовательность положительных чисел $(t(n))_{n=1}^{\infty}$ со свойством $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t(n)}{n^2} < \infty$ и постоянная $c > 1$, такие, что имеет место «самооценка» функции $K(t)$:

$$K(n) \le cK(t(n)).$$

Это неравенство дает сильные ограничения на рост функции $K(t)$ на бесконечности. Нетрудно доказать, что $K(t) = o(t^{\varepsilon}), t \to \infty$, при любом $\varepsilon > 0$. Мы имеем пример, в котором функция $K(t)$ при $t \to \infty$ эквивалентна функции $t^{\varepsilon(t)}$, где $\varepsilon(t) = \frac{1}{\ln \ln t}$. Но все-таки, каков максимально возможный (в каком-нибудь смысле) рост таких функций на бесконечности?

Список литературы
References

1. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. 1978. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука.

Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. 1982. Interpolation of linear operators, Transl. Math. Monogr., 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, xii, 375.

2. Брудный Ю.А., Крейн С.Г., Семенов Е.М. 1986. Интерполяция линейных операторов. ВИНИТИ, Итоги науки и техники, сер. «Мат.анализ», 24: 3-163.

Brudnyi Yu.A., Krein S.G., Semenov E.M. 1988. "Interpolation of linear operators", J. Soviet Math., 42:6 : 2009-2112.

3. Ovchinnikov V.I. 1984. The method of orbits in interpolation theory. Math.Reports. v.1, part 2.: 349-516.

Ovchinnikov V.I. 1984. "The method of orbits in interpolation theory". Math.Rep., 1:2 : 349-515.

4. Дмитриев В.И. 1981. Об интерполяции операторов в пространствах L_p. ДАН СССР, 260(5):1051-1054.

Dmitriev V.I. 1981. "On interpolation of operators in L_p-spaces". Soviet Math. Docl., 24:2: 373-376.

5. Дмитриев В.И. 1985. (O=KO)-массив банаховой пары (ℓ_1, c_0)/КПИ, Курск: 22. – Деп.ВИНИТИ, №2035–В86.

Dmitriev V.I. 1985. (O=KO)-set of Banach pairs (ℓ_1, c_0) /KPI. – Kursk: 22. – Dep.VINITI, № 2035–B86.

6. Овчинников В.И. 2014. Интерполяционные функции и интерполяционная конструкция Лионса-Петре. УМН, 69 4 (418): 103-168.

Ovchinnikov V.I. 2014., "Interpolation functions and interpolation construction of Lyons-Petre". UMN, 69 4 (418): 103-168.