УДК 517.968.43

ОБ ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СССР. СИЛЬНЫЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ [1]

ABOUT THE HISTORY OF DEVELOPMNENT OF NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS IN THE USSR. STRONG NONLINEARITIES

Е.М. Богатов
E.M. Bogatov

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»,
Россия, Старый Оскол, 309516, Белгородская обл., г. Старый Оскол, мкр. Макаренко, 42

Stary Oskol Technological Institute of National Research University of Science and Technology "MISIS", 309512, mkr. Makarenko,42 Stary Oskol, Belgorod region, Russia

E-mail: embogatov@inbox.ru

Аннотация. Работа посвящена некоторым вопросам истории развития теории нелинейных интегральных уравнений до середины XX в. Основной упор делается на достижения советских математиков - В.В. Немыцкого, М.А. Красносельского, Я.Б. Рутицкого и др. Проводится анализ некоторых качественных методов решения уравнений Гаммерштейна:

$$u(x) = \lambda \int_{\mathrm{D}} K(x,y) f(y,u(y))dy;$$

и Урысона:

$$u(x) = \lambda \int_{\mathrm{D}} K(x,y,u(y))dy.$$

Особое внимание уделяется раскрытию содержания способов исследования указанных уравнений с существенно нестепенными нелинейностями в пространствах Орлича; методология изучения операторов Гаммерштейна и Урысона с полиномиальными нелинейностями рассматривается в контексте пространств C и L^p. Оценивается взаимное влияние развития теории нелинейных интегральных уравнений и функционального анализа в рассматриваемый период. Приводятся физические предпосылки к изучению нелинейных интегральных уравнений с сильными нелинейностями, основанные на задачах теории горения.

Resume. The work is dedicated to the development of the theory of nonlinear integral equations to the middle of XX century, developed by the Soviet mathematicians - V.V. Nemytskii, M.A. Krasnosel'skii, Ya.B. Rutitskii and others. The analysis of some qualitative methods for solving Hammerstein equation:

$$u(x) = \lambda \int_{\mathrm{D}} K(x,y) f(y,u(y))dy$$

and Urysohn equation:

$$u(x) = \lambda \int_{\mathrm{D}} K(x,y,u(y))dy.$$

Special attention is paid to the disclosure of the research methods content of the equations with essentially nonpower nonlinearities in Orlicz spaces. The methodology of studing Hammerstein and Urysohn operators, which has polynomial nonlinearities, is considered in the context of C and L^p spaces. We estimate the mutual influence of the theory of nonlinear integral equations and functional analysis in the period under consideration. The physical background to the study of nonlinear integral equations with strong nonlinearities, based on the problems of combustion theory is given.

Ключевые слова: история функционального анализа, теория интегральных уравнений, советская математика, уравнение Урысона, уравнение Гаммерштена, стационарное уравнение горения, оператор Немыцкого, нестепенные нелинейности, нелинейные операторы, вполне непрерывные операторы, теоремы существования, пространства Орлича, В.В. Немыцкий, М.А. Красносельский, Я.Б. Рутицкий.

[1] Некоторые результаты данной работы докладывались на конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна -2016" [1].

Keywords: history of functional analysis, theory of integral equations, Soviet mathematics, Hammerstein equation, Urysohn equation, stationary combustion equation, Nemytskii operator, nonpower nonlinearities, nonlinear operators, compact operators, existence theorems, Orlicz spaces, V. V. Nemytskii, M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii.

Введение

С появлением первых идей об интегральных уравнениях в XVIII в. до самого конца XIX в. рассматривались лишь отдельные частные, нередко не связанные между собой задачи, обычно стимулированные прикладными проблемами. Только в конце XIX в. была осознана потребность в необходимости построения общей теории. В первое десятилетие XX в. после работ В. Вольтерра, И. Фредгольма, Д. Гильберта, Э. Шмидта пришло понимание того, что родился новый раздел анализа со своим предметом исследований и системой понятий. В то же самое время, с конца XIX в. в поле зрения попали и нелинейные интегральные уравнения (А.М. Ляпунов, А. Пуанкаре, Э. Шмидт). Но методы их исследования до самого начала 1930-х гг. или находились в традиционном русле классического анализа (уравнение - решение, точное или приближённое), или, если старались выявить качественный характер всего множества решений, ограничивались поиском малых решений и малых изменений параметра. Последнее было обусловлено не недостатком желания исследовать проблему во всей её общности, а наличием существовавшего инструментария для достижения такой цели. Поэтому начало 1930-х гг. можно с некоторой долей условности считать завершением первого этапа развития теории нелинейных интегральных уравнений.

Теория интегральных уравнений явилась одним из главных источников построения грандиозной обобщающей конструкции на высоком уровне абстракции - функционального анализа. По словам Г. Вейля: "Общим результатом всей этой деятельности стало значительное изменение во взглядах на анализ" [2,с.649]. С созданием функционального анализа к началу 1930-х гг. появились адекватные инструменты для дальнейшего прогресса в теории нелинейных интегральных уравнений. Кроме функционального анализа, для решения новых задач было совершенно естественным также привлечение топологических методов, в основе которых лежат фундаментальные понятия предела и непрерывности. Появилась возможность замечательного обобщения, которое было заложено в работах Гильберта по интегральным уравнениям: от интегральных уравнений - к операторным уравнениям, в том числе нелинейным. Если раньше были доступны анализу лишь локальные задачи, то теперь постепенно вырисовывались возможности подходов к нелокальным проблемам: выявление качественного характера всего множества решений; выявление всего множества значений параметров, когда существуют различные классы решений, зависимость решений от значений параметра; изучение уравнений со специальными классами операторов, таких как монотонные и т.д. Нелинейные уравнения в исключительных случаях удаётся решить в явном виде. Поэтому важнейшее значение приобретают теоремы существования решений, что в свою очередь требует уточнения самого понятия решения. Другими словами, требуется определить, в каком функциональном пространстве мы ищем решение.

Между зарождением теории нелинейных интегральных уравнений и осмыслением их роли в развитии функционального анализа и математики в целом потребовалось определённое время и в середине XX в. стали появляться отдельные работы в этом направлении [3, с. 456-458], [4, с. 695-698;728-732], однако систематического изучения данного вопроса не было до начала 1990-х гг. Диссертация И.А. Александровой "Из истории теории интегральных уравнений" [5] выполненная в 1992 г., стала первой попыткой изменить ситуацию. Но *нелинейным* интегральным уравнениям была посвящена только одна (пятая) глава, в которой рассматривались работы лишь некоторых советских учёных, а вклад таких математиков, как В.В. Немыцкий, М.А. Красносельский, Я.Б. Рутицкий, уже давно ставших общепризнанными классиками в данной области (см., например,
[6, с. 637], [7, с. 546]) отражён не был. Других серьёзных усилий проследить историю развития теории нелинейных интегральных уравнений в СССР до настоящего времени, по-видимому, не предпринималось.

Качественный поворот в построении теории - выход на сцену методов топологии и функционального анализа

История нелинейных интегральных уравнений в СССР берёт своё начало с работы П.С. Урысона, написанной в 1918 г., когда он был ещё 20-летним студентом, и опубликованной в 1923 г. [8]. Урысон исходил из работы Э. Пикара [9], изучавшего дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + F(x,y) = 0 \tag{1}$$

и рассматривал интегральное уравнение[2]

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s,y(s))ds \qquad (2)$$

где $y(x)$ - искомая функция.

В основу Урысон положил метод последовательных приближений Пикара, применение которого обосновывалось построением последовательностей "верхних" и "нижних" функций, между которыми заключено искомое решение [8, § 3]. Он показал, что при некоторых условиях на скорость роста $K(x,y,u)$ по u, включающих в себя, в частности, существование положительной производной $K_u(x,y,u)$, убывающей с ростом u и ограниченной снизу, существует интервал (α,β) положительных значений величины λ такой, что при каждом $\lambda \in (\alpha,\beta)$ уравнение (2) имеет единственное положительное решение $y(x, \lambda)$, монотонно возрастающее с ростом λ.

В конце 1920-х- начале 1930-х гг. в математике произошло смещение акцентов - вместо поиска решения (точного или приближённого) заданного нелинейного дифференциального или интегрального уравнения, стали предприниматься попытки изучить свойства решений этих уравнений без нахождения самих решений. Такие *качественные* методы исследования восходят к А. Пуанакаре и А.М. Ляпунову. Главное внимание в них уделяется поведению и эволюции системы, описываемой данными уравнениями; свойствам, присущим всему рассматриваемому классу функций, которые представляются уже в качестве единого объекта. Значительное место в этом заняло установление теорем существования решений интегральных уравнений, особенно нелинейных, поскольку последние (в отличие от линейных) демонстрируют качественно более сложное поведение.

Весьма важное место в математике занимает теорема о неподвижной точке, доказанная для непрерывных отображений в конечномерных пространствах голландским математиком Л. Брауэром в 1911 г. и носящая его имя. Справедливости ради надо заметить, что данную теорему о неподвижной точке за несколько лет до Брауэра установил латвийский математик П. Боль [11] и эту теорему иногда называют теоремой Брауэра-Боля.

В 1926 г. в Институте математики и механики МГУ П.С. Александровым и В.В. Немыцким был сделан доклад, в котором было приведено доказательство теоремы о существовании неподвижной точки при непрерывном преобразовании выпуклого компактного множества гильбертого пространства в себя [12,с.146-147], [13, с. 202-203].

Работа Александрова и Немыцкого осталась неопубликованной, поскольку в 1927 г. польский математик Ю. Шаудер получил более общие результаты для банаховых пространств. По словам Немыцкого, Шаудер "использовал гениально простую идею Биркгофа и Келлога" [14], [15, с.143] о существовании инвариантной функции у преобразования

$$F(u) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,u)dt,$$

с помощью которой доказывалось наличие решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$.

Шаудер показал, что *если в линейном полном нормированном пространстве непрерывный оператор переводит замкнутое выпуклое тело в свою компактную часть, то существует неподвижная точка* [16]. Эта теорема и её обобщения стали важнейшей основой установления существования решений нелинейных уравнений.

Для обеспечения простоты в использовании данного принципа Шаудера Немыцкий даёт определение вполне непрерывного оператора для нелинейного случая. Нелинейный оператор A был назван Немыцким вполне непрерывным *на данном множестве*, если он [15, с.445]

- непрерывен на М;
- преобразует это множество в компактное.

Данное определение немного отличалось от имеющегося для линейного случая[3] (в частности, линейный вполне непрерывный оператор всегда непрерывен).

Это позволило Немыцкому упростить постановку задачи вывода условий полной непрерывности операторов Урысона

$$H_0 u(x) = \int_D K(x,y,u(y))dy \qquad (3)$$

и Гаммерштейна

$$H_1 u(x) = \int_D K(x,y) f(y,u(y))dy \qquad (4)$$

для решения интегральных уравнений

---

[2] Пионером в исследовании данного интегрального уравнения следует, по-видимому, считать румынского учёного Г. Брату, ученика Э. Пикара [10, с. 117].

[3] По Ф. Риссу, линейное преобразование вполне непрерывно, если оно переводит любую ограниченную последовательность в компактную. [17, с.73].

$$u(x) = \lambda H_0 u(x) \qquad (5)$$

$$u(x) = \lambda H_1 u(x) \qquad (6)$$

в подходящих функциональных пространствах. Этими пространствами оказались пространства C и L^p, поскольку критерии компактности в других пространствах к тому времени попросту отсутствовали.

В пространстве C Немыцким было получено наиболее простое и естественное условие полной непрерывности оператора Урысона. Оно заключалось в том, что функция $K(x,y,u(y))$ непрерывна по совокупности всех трёх переменных: $x, y \epsilon D, |u| \le a$ [15, с.150].
Так как оператор Гаммерштейна является частным случаем оператора Урысона, то условие полной непрерывности последнего даёт одновременно условие полной непрерывности оператора (4) в пространстве C.

Условия полной непрерывности оператора Гаммерштейна в пространстве L^p включали в себя ограничения на функцию $f(y,u)$, не позволяющие ей расти быстрее, чем $|u|^p$, а также на ядро $K(x,y)$, чтобы оно было интегрируемым со степенью q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Схема получения этих условий, выработанная Немыцким, включала в себя несколько этапов.

На первом этапе Немыцкий применил свой оригинальный приём "расщепления" оператора H_1 на две части - *линейную* интегральную вида

$$A(u) = \int_D K(x,y)u(y)dy \qquad (7)$$

и *нелинейную* вида[4]

$$\mathbf{f}(u)=f(x,u(x)). \qquad (8)$$

Тогда H_1 представляется в виде $H_1 u = A\mathbf{f}(u)$ и можно разграничить требования к оператору A и к оператору $\mathbf{f}$ (эта идея в начале 1950-е гг. получила своё развитие в работах М.М. Вайнберга [19] и М.А. Красносельского [21]).

На втором этапе доказывалась компактность интегрального оператора A с использованием признака компактности семейства функций в L^p М. Рисса [22].

Последний этап заключался в поиске условий, при которых оператор $\mathbf{f}$ непрерывен и ограничен (см. ниже).

Теоремы о существовании решения уравнений (5),(6) были доказаны Немыцким при малых значениях параметра λ [15, с.150; 167]. В них Немыцкий существенно усилил результат Гаммерштейна [23], отказавшись, для уравнения (6), от условия непрерывности $f(x,u)$ по совокупности аргументов и от требований того, что линейный оператор (7) должен быть положительным и вполне непрерывным, как оператор, действующий из L^2 в C [24, с. 181].

Условиями этих теорем явилось (в соответствии с принципом Шаудера) объединением условий, при которых операторы H_0, H_1 являются вполне непрерывными с условиями, при которых они преобразуют некоторый шар пространства в свою часть (последнее обеспечивается малостью λ). Для оператора Гаммерштейна, в частности, условия полной непрерывности имели следующий вид:

а. $\exists B = Const$: $\int_D |K(x,y)|^q dx \le B$; $\int_D |K(x,y)|^q dy \le B$.

б. $f(y,u)$ удовлетворяет условию Гёльдера по переменной u:

$$|f(y,u_1) - f(y,u_2)| \le M\,|u_1 - u_2|^\nu.$$

По сравнению с методом Пикара, использованного Урысоном, подход Немыцкого позволил отказаться от ограничительного требования дифференцируемости ядра. После его работ [15], [20] стало ясно, что вопрос о существовании решений уравнения Гаммерштейна при малых λ со степенными нелинейностями и ограниченным в L^p ядром можно считать закрытым.

С начала 1930-х гг. нелинейные задачи стали интенсивно изучать в Киевском НИИ математики и к началу 1940-х гг. образовалась научная школа нелинейной механики, оказавшая большое влияние на тематику математических исследований в Киеве. К концу 1940-х гг. к нелинейным интегральным уравнениям обратился М.А Красносельский, видный представитель Киевской математической школы. Он увидел в уравнениях Урысона и Гаммерштейна источник для получения результатов качественного характера (теорем существования решений, теорем о структуре спектра, о точках бифуркации и т.п.). Изучая оператор (8) в контексте вышеупомянутой методики Немыцкого, Красносельский получил довольно неожиданный результат. *Пусть функция $f(x,u)$ измерима по x при каждом $u \epsilon R$ и почти при всех $x \in [a,b]$. Если оператор $\mathbf{f}$ действует из L^p в L^q, то он непрерывен и ограничен на каждом шаре пространства L^p, а функция $f(x,u)$ удовлетворяет неравенству*

$$|f(x,u)| \le a(x) + b|u|^{\frac{p}{q}} \text{ где } a(x) \epsilon L^q,\ b>0. \qquad (9)$$

Из этого неравенства, в частности, вытекает, что пространства L^p нельзя использовать для изучения оператора Гаммерштейна с "сильными" нелинейностями, например, когда $f(x,u) \equiv e^u$ [25,с. 30].

---

[4] Следуя Вайнбергу, оператор $f(u)$ стали впоследствии называть *оператором Немыцкого* [18, с. 204].

Условия полной непрерывности оператора Урысона в пространстве L^p были получены позднее, в 1950 г., М.А. Красносельским и Л.А. Ладыженским[5] при дальнейшем развитии идей Немыцкого. Они показали, что если функция $K(x,y,u(y))$ удовлетворяет условию Каратеодори (непрерывна по u и измерима по совокупности остальных переменных) и неравенству

$$|K(x,y,u(y))| \leq R(x,y)f(y,u),$$

где $f(y,u)$ растёт не быстрее $|u|^{\alpha_1}$ а $R(x,y)$ интегрируема с некоторой степенью α_2 на $D \times D$, тогда оператор Урысона H_o действует из L^{p_1}в L^{p_2}, где $p_i = p_i(\alpha_1, \alpha_2)$ и вполне непрерывен [26, с.308].

Простейшим примером такой ситуации может служить интегральное уравнение с оператором Лалеску A_l [27, с. 165]:

$$A_l u(x) = \int_D [f_0(x,s)u(s) + f_1(x,s)u^2(s) + \cdots + f_n(x,s)u^n(s)]ds$$

где $f_i(x,s)$ - ограниченная или интегрируемая с некоторой степенью функция.

В случае, когда подынтегральная функция, определяющая операторы H_o, H_1, содержит существенно нестепенные нелинейности, то, вообще говоря, данные операторы не будут даже определены на всех функциях пространства L^p. Например, если

$$A_1 u(x) = \int_D K(x,y)e^{u(y)}dy \tag{10}$$

где $K(x,y) > m > 0$, $(x,y \in D)$, то в каждом L^p найдётся такая функция $u(y)$, что $K(x,y)e^{u(y)}$ при каждом x будет неинтегрируемой по y [28, с.68]. Подчеркнём, что уравнения с оператором вида (10) впервые были рассмотрены Г. Брату в 1910 году [29, с. 897] и впоследствии они стали носить его имя (см., например, [30, с. 414). В СССР о работах Брату и Лалеску долгое время почти ничего не было известно.

Таким образом, задача построения такого функционального пространства E, в котором действуют нелинейные операторы H_o, H_1 и являются в нём вполне непрерывными, с середины 1930-х гг. стала одной из наиболее актуальных в теории нелинейных интегральных уравнений [28, с.60]. В указанном контексте к задачам с оператором вида (10) достаточно долго не могли найти подход. Ситуация поменялась с опубликованием статьи А. Цанена, вышедшей в 1946 г., в которой он использовал новый тип банаховых пространств, введённых в 1932 г. В. Орличем, для рассмотрения линейных интегральных операторов с неинтегрируемым в пространстве L^p ядром $K(x,y)$ [31].

Примеры появления уравнений Гаммерштейна и Урысона в физических задачах

Одним из источников возникновения интереса к нелинейным интегральным уравнениям были нелинейные дифференциальные уравнения, в частности, уравнение Пикара (1). Переход к соответствующему интегральному уравнению с помощью функции Грина линейной задачи был известен с начала XX в. [9]. Характерным примером из механики, приводящем к уравнению вида (1), была задача о колебаниях маятника

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 siny = 0,$$

хорошо известная европейским учёным того времени [32, с. 424].

Более перспективной с точки зрения приложений была задача описания волнового движения тяжёлой жидкости, приводящая *непосредственно* к уравнению Урысона. Она была решена А.И Некрасовым в 1920-е гг. (подробности см. в [33]) и получила своё развитие в работах Н.Н. Назарова [34, с. 493-494].

В конце 1930-х – начале 1940-х гг. начала формироваться математическая теория горения. У её истоков стояли известные советские физики Я.Б. Зельдович и Д.А. Франк-Каменецкий [35]-[36]. При создании математической модели они опирались на результаты А.Н. Колмогорова[6], И.Г. Петровского и Н.С. Пискунова [37], датируемые 1937 годом, в которых рассматривалось уравнение диффузии с нелинейной правой частью

$$\frac{\partial v}{\partial t} - k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(v)$$

где $F(v)$ - функция вида $kv(1\text{-}v)$, $k>0$, определённая на отрезке [0,1].

Описывая стационарный процесс горения и теплового взрыва в плоских и цилиндрических сосудах в рамках указанной теории, Франк-Каменецкий получил задачу Дирихле для полулинейного уравнения Лапласа :

$$\Delta\theta = -F(\theta), \tag{11}$$

$$\theta|_S = 0, \tag{12}$$

[5] Работа была опубликована в 1954 году.

[6] Справедливости ради следует отметить, что Колмогорову здесь принадлежало описание физической модели, а математическая теория была разработана в основном его соавторами [38].

где $\theta = \theta(x,y)$ - безразмерная температура; $(x,y)\epsilon D$, S - граница области D; $F(\theta)$ - скорость тепловыделения, равная $2e^{\theta}$ при тепловом взрыве [39, с. 124], и имеющая вид некоторой выпуклой функции при тепловом распространении пламени [39, с. 236].

Математическая теория горения и взрыва также продолжила своё развитие в работах других учёных (подробную библиографию см. в [39]). С определённого момента пришло понимание необходимости доказывать теоремы существования решения задачи (11)-(12) и выявлять их качественные свойства для широкого класса функций $F(\theta)$. Если допускать возможность появления разрывных решений задачи (11)-(12), то более естественным был бы переход к уравнению Гаммерштейна посредством функции Грина[7] с последующим рассмотрением его в пространствах суммируемых функций. Но для функций вида $F(\theta)= e^{\theta}$ пространства L^p не подходили; в этом случае единственно приемлемым классом функций был класс Юнга так называемых "сверхсуммируемых" функций [40], преобразованный Орличем, после соответствующего согласования свойств сходимости и интегрируемости, в пространство его имени (см. следующий параграф). Однако, указанный функционально-аналитический подход ещё не нашёл широкого распространения (даже среди математиков), поэтому при исследовании задачи (11)-(12) до середины 1960-х гг. преобладали численные методы[8]. С другой стороны, результаты Франк-Каменецкого, Зельдовича и их последователей до конца 1950-х гг. были вне поля зрения математиков[9] и разработка теории интегральных уравнений Гаммерштейна и Урысона диктовалась (как это часто бывает) главным образом внутренней логикой развития предмета.

Пространства Орлича

Прежде, чем перейти непосредственно к предмету нашего рассмотрения, сделаем несколько предварительных замечаний.

В. Орлич (1903-1990) - выпускник Львовского университета, ученик Банаха, стажировался в Гёттингене в 1929-1931 гг. под руководством Э. Ландау. В середине 1930-х он перешёл в Познаньский университет, где основал получившую известность математическую школу. В тот же период у Ландау также стажировался ученик Г. Штейнгауза З. Бирнбаум. За недолгий период сотрудничества Орлича с Бирнбаумом ими была написана большая работа "Об обобщении понятия взаимно сопряжённых потенциалов" [43]. Она была представлена в редакцию *Studia Mathematica* в октябре 1930 г. и с некоторыми добавлениями опубликована в следующем году. Главным результатом этой работы является всестороннее рассмотрение и углубление свойств восходящих к Юнгу N-функций (определение см. ниже) с точки зрения их использования в задачах интегрируемости и сходимости, после чего Орлич смог обобщить пространство L^p (работы [44]-[45])[10].

Непрерывная выпуклая функция $M(u)$ называется N-функцией[11], если она чётна и удовлетворяет условиям [46, с. 497]

$$M(0) = 0; \lim_{|u|\to 0}\frac{M(u)}{|u|}=0; \lim_{|u|\to\infty}\frac{M(u)}{|u|} = \infty.$$

Две N-функции, $M(u)$ и $N(v)$ считаются *дополнительными* друг к другу, если их производные являются взаимно-обратными монотонными функциями.

Простейшим примером пары дополнительных N-функций могут служить функции $M(u) = \frac{|u|^p}{p}$, $N(v) = \frac{|v|^q}{q}$, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ [43, с.10].

В статье [44] Орлич ввёл в рассмотрение классы суммируемых функций L_M, у которых вместо степенной функции под знаком интеграла фигурировала N-функция $M(u)$. Необходимость в такого рода рассмотрении стала возникать в теории рядов, когда при нахождении коэффициентов Фурье данной функции $f(x)$ по тригонометрической системе, $f(x)$ не принадлежала пространствам L^p [49].

Принадлежность функции u классу L_M определялась конечностью величины $\rho_M(u) = \int_a^b M\big(u(x)\big)dx$.

Норма в L_M была введена Орличем в работе [45], как

---

[7] Как это сделал в несколько более общем случае А. Гаммерштейн [23, с.124].

[8] Одной из первых работ в направлении качественных методов исследования (11)-(12) в исходной постановке можно считать [41].

[9] Ситуация начала меняться только после выхода большой статьи И.М. Гельфанда в УМН [42].

[10] Подробную историю создания пространства Орлича см. в [47, с.104-111], [48].

[11] Подобные функции также находят своё применение в приложениях. В частности, если в задаче теплового взрыва(11)-(12) $F(\theta)$является N-функцией, то её решения являются устойчивыми к малым возмущениям [41].

$$\|u\|_{L_M} = \sup_{\rho_N(v)\le 1} \int_a^b uvdx, \quad (13)$$

Здесь *M(u)* - *N*-функция; *N(v)* - дополнительная к *M(u)* функция. Функции *u*, входящие в (13) должны удовлетворять условию $\rho_M(ku) < \infty$ для некоторого *k*>0 [45, с.93].

Отметим, что нормированное пространство Орлича, порождённое функцией $M(u) = \frac{|u|^p}{p}$ совпадает с L^p [44, с.214].

Получившееся банахово пространство было обозначено Орличем через L_M^*. Его сепарабельность и рефлексивность была доказана Орличем при условии, что данное пространство порождено функциями, удовлетворяющими так называемому Δ_2- условию при больших *u* [44, с.210]:

$$\exists\ k \in R\ M(2u) \le kM(u) \text{ для } |u| \ge a \quad (14)$$

В предположении о гладкости функции *M(u)* Δ_2- условие равносильно тому, что функция *M(u) растёт не быстрее степенной* (это было отмечено ещё в 1928 г. Дж. Бёркилем [50, с.494]). В качестве примера такой функции можно привести [43, с.30]

$$M(u) = |u|^\alpha(|\ln|u||+1),\ \alpha > 1 \quad (15)$$

На основе построенной Орличем теории пространств L_M^* , удовлетворяющих Δ_2- условию, Цанену удалось доказать полную непрерывность *линейных* интегральных операторов с неограниченными ядрами, интегрируемыми с некоторыми *N*-функциями [31].

Использование пространств Орлича в теории нелинейных интегральных уравнений

С *нелинейными* интегральными операторами дело обстояло сложнее. Если для степенных нелинейностей оператора Гаммерштейна хорошо подходили пространства L^p [51], то для неполиномиальных, (например экспоненциальных) как уже было отмечено (см. (9)), данные пространства оказались недостаточными.

В начале 1950-х гг. на одном из семинаров в Киевском НИИ математики Б.И. Коренблюм сообщил М.А. Красносельскому и Я.Б. Рутицкому о новом функциональном пространстве, введённом Орличем - пространстве L_M^* [52, с. 143]. Возникла идея использовать их для замены L^p в схеме исследования уравнений Урысона и Гаммерштейна с сильными нелинейностями. Однако здесь обнаружилась проблема: Δ_2 -условие, обеспечивающее "хорошие" свойства пространств Орлича (рефлексивность, сепарабельность, теорему о представлении линейных функционалов и т.п.), не позволяло использовать эти пространства для исследования разрешимости интегральных уравнений с существенно нестепенными нелинейностями.

Таким образом, появилась необходимость отказаться от ограничительного Δ_2- условия и произвести реконструкцию теории пространств Орлича на основе новой классификации *N*-функций, определяемой их поведением на бесконечности. На этом пути Красносельский и Рутицкий сначала выделили из множества *N*-функций подмножество, состоящее из функций, растущих *быстрее любой степенной*. Это подмножество задавалось так называемым Δ_3- условием [53, с. 23]. *N*-функция *M(u)* удовлетворяет Δ_3- условию, если

$$M(u) \sim |u|M(u) \quad (16)$$

Ясно, что функция *uM(u)* растёт не медленнее *M*, так что Δ_3- условие означает, что умножение на аргумент не порождает более "быстрорастущий" класс, что уже означает быстрый рост [54, с. 16]. Δ_3- условию удовлетворяет, например, функция

$$M(u) = (1 + |u|)^{\ln(1+|u|)} - 1.$$

N-функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ называются *эквивалентными* ($M_1(u) \sim M_2(u)$), если существуют такие числа k_1, k_2, что при $u \ge u_0$ выполнены неравенства

$$M_1(k_1 u) \le M_2(u) \le M_1(k_2 u). \quad (17)$$

Из класса *N*-функций, удовлетворяющих Δ_3- условию, были выделены более узкие классы функций, имеющих *экспоненциальные нелинейности* [53, с. 25]. *N*-функция *M(u)* удовлетворяет Δ^2 - условию, если

$$M(u) \sim M^2(u). \quad (18)$$

Это условие означает, что существуют *b*>0, $u_0 \ge 0$, такие, что [55, с.40]

$$M^2(u) \le M(bu), \quad u \ge u_0.$$

Δ^2 - условию удовлетворяет, например, функция

$$M(u) = e^{|u|} - |u| - 1.$$

Основой для введения именно такой классификации явилось, по-видимому, то, что при определении нормы Орлича участвуют функции, дополнительные друг к другу - *M(u)* и *N(v)*. К моменту создания пространств L_M^* имелось два типа условий - Δ_2 и Δ' (см. ниже). Новая классификация могла стать более удобной и удачно восполнить имеющуюся, если бы она не потребовала введения новых категорий *N*-функций, помимо уже существующих. Поскольку функции, удовлетворяющие Δ_3- условию дополняются функциями, удовлетворяющими Δ_2 - условию [53, с. 24], а функции, удовлетворяющие Δ^2- условию, дополняются функциями, удовлетворяющими Δ' - условию[12], то полученная градация N - функций вполне вписывается в теорию пространств Орлича, не нарушая первоначального замысла её основателей.

Поскольку основная цель построения новой теории пространств Орлича на начальном этапе - доказательство теории существования нелинейных интегральных уравнений на основе принципа Шаудера, применительно к оператору Гаммерштейна выстраивалась следующая логическая цепочка:

Выявление условий, когда оператор (4) вполне непрерывен
⇩
Получение признаков компактности семейств функций в пространствах Орлича
⇩
Использование признака компактности Колмогорова в качестве ориентира

Так как широко известный признак Колмогорова компактности семейств функций в пространствах L^p основан на возможности приближения функций этого семейства ограниченными функциями, имело смысл рассматривать множество таких функций и в пространствах Орлича. Идя по этому пути, Красносельский и Рутицкий выделили в L_M^* подпространство E_M - замыкание в L_M^* множества ограниченных функций, которое обладает целым рядом полезных свойств (сепарабельность, линейность, теорема о представлении линейных функционалов). Кроме того, с помощью E_M удалось ввести новый вид сходимости, относительно которой пространство Орлича оказалось *слабо полно* и *слабо компактно*[13] [53, с. 30]. А именно, последовательность функций $u_n(x) \in L_M^*$ была названа *(o)-слабо сходящейся*, если последовательность чисел

$$l(u_n) = \int_D u_n(x)v(x)dx$$

сходится $\forall v(x) \in E_N$.

Вернёмся к нелинейным интегральным уравнениям. В рамках переработанной теории пространств Орлича Красносельскому и Рутицкому удалось сформулировать условие полной непрерывности операторов Гаммерштейна в L_M^* с нелинейной частью, удовлетворяющей условию Каратеодори и неравенству

$$|f(x,u)| \le b(x) + R(|u|),\ x \in D,\ u \in (-\infty, +\infty) \tag{19}$$

где $R(u)$ - положительная, монотонно возрастающая при $u \ge 0$, непрерывная функция; $b(x) \in L_N$ [56, с. 95]. При этом функция $\alpha K(x,y)$ должна быть $M(u)$-интегрируемой функцией по совокупности переменных:

$$\int_D \int_D \mathrm{M}[\alpha\, K(x,y)]dxdy < \infty \quad \forall\alpha > 0. \tag{20}$$

Получение достаточных условий полной непрерывности оператора H_1 в пространствах Орлича было проведено аналогично тому, как это делалось для пространств L^p [57, с. 68]:

а. вывод условий непрерывности и ограниченности оператора Немыцкого **f**, действующего из L_M^* в $L_{M_1}^*$;

б. определение условий полной непрерывности линейного интегрального оператора $Au(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy$, действующего из $L_{M_1}^*$ в $L_{M_2}^*$.

Отметим, что для оператора **f**, действующего из $L_{M_1}^*$ в $L_{M_2}^*$было получено неравенство, аналогичное (9):

$$M_2[f(x,u)] \le a(x) + bM_1(u), \text{ где } a(x) \in L^1,\ b > 0.$$

Его можно интерпретировать, как ограничение на рост функции $f(x,u)$ по переменной u.

Красносельским и Рутицким было доказано, что достаточные условия полной непрерывности H_1 в пространстве Орлича зависит от скорости роста функции $R(u)$ на бесконечности. Для $b(x) \equiv b = Const$ они имеют следующий вид:

[12] Функция $M(u)$ удовлетворяет Δ'- условию при больших значениях аргумента, если $\exists\, Q \in R$: $M(uv) \le QM(u)M(v)$ для $|u| \ge a, |v| \ge a$. Это условие было введено Р. Купером и использовано З. Бирнбаумом и В. Орличем при выводе необходимого и достаточного условия $M(u)$ - интегрируемости произведения двух функций [43, с. 45].

[13] Это помогло доказать полную непрерывность оператора А с неограниченными ядрами $K(x,y)$ [58, с. 30].

Если выполняются условия (19)-(20); функция M(u) удовлетворяет Δ_3 или Δ^2 - условию, а R(u) имеет подчинённый M(u) порядок роста, тогда оператор H_1 вполне непрерывен в некотором шаре пространства L_M^* [56, с.95-96].

В качестве примера того, как работают указанные условия можно взять оператор (10) с нелинейностью $f(x,u)=e^{c|u|}$, ядро $K(x,y)=\sqrt{ln|x-y|}$ при $x,y \in [a,b]$; $c \in R$ и пространство Орлича L_M^*, порождённое функцией $M(u)=e^{u^2}-1$ [57, с. 231]. В этом случае оператор (10) будет вполне непрерывным оператором в некотором шаре L_M^*.

В рассмотренных случаях функция $M(u)$ росла быстрее некоторой степенной функции при $u \to \infty$. Это означало, что ядро $K(x,y)$ принадлежало некоторому пространству $L^p(D \times D)$. Красносельский и Рутицкий нашли возможность отказаться от этого условия, предполагая, что неравенство (20) может выполняться для функций $M(u)$, растущих медленнее, чем $|u|^\varepsilon$ $\forall(\varepsilon > 1)$ (то есть удовлетворяющих Δ_2 - условию). При этом получилось, что главная часть функции $f(x,u)$ должна мажорироваться (при больших u) очень медленно растущей функцией:

$$R(u) < \frac{cM(u)}{u} \qquad (21)$$

где $C>0$ - некоторая постоянная.

Условие (21) оказалось достаточным для того, чтобы оператор H_1 был вполне непрерывным в некотором пространстве Орлича [56, с.98-99].

Иллюстрацией вполне непрерывного оператора Гаммерштейна со "слабой" нелинейностью может служить оператор

$$H_1u(x) = \int_a^b K(x,y)\, ln(1+|u|)\, dy \qquad (22)$$

где $K(x,y)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|\, ln(1+|K(x,y)|)\, dxdy < \infty,$$

а функция $M(u)$ равна $|u|ln(1+|u|)$ [56, с.103].

При выполнении условия полной непрерывности оператора H_1 в пространстве L_M^* доказательство теоремы существования решений уравнения (4) не вызвало больших затруднений. То, что оператор λH_1 переводит шар пространства L_M^*:

$B_\rho(\theta) = \{u(x) \in L_M^* : \|u\|_M \le \rho\}$ в свою часть при малых λ, было показано Красносельским и Рутицким с использованием непрерывности оператора Немыцкого в L_M^* и некоторых свойств N-функций [56, с.115-116].

Перейдём к уравнению Урысона (5). Его разрешимость была установлена по тому же алгоритму, что и для уравнения (6) [57,§ 19]:

1) получение условий полной непрерывности оператора H_0

$$H_0u(x) = \lambda \int_D K(x,y,u(y))dy$$

2) применение принципа Шаудера.

Условия полной непрерывности H_0 для функции $K(x,y,u)$, удовлетворяющей неравенству

$$|K(x,y,u)| \le k(x,y)[a(x) + R(|u|)], \quad (x \in D, u \in (-\infty,\infty)) \qquad (23)$$

включают в себя ограниченность ядра:

$$k(x,y) \in E_M \times E_M \qquad (24)$$

и естественные предположения:

$$a(x) \in L_N^*;\ R(u) \qquad (25)$$

неотрицательная возрастающая функция, имеющая подчинённый $M(u)$ порядок роста.

Соответствующая теорема формулируется (и доказывается) подобно тому, как это было сделано для оператора H_1 [59, с. 364].

При выполнении условий (23)-(25) и Δ'- условия на дополнительную к M(u) функцию оператор Урысона H_0 вполне непрерывен в некотором шаре пространства L_M^* где M(u)- N - функция, удовлетворяющая Δ_3 или Δ^2 -условию.

Теорема существования решений в пространстве L_M^* в условиях полной непрерывности оператора H_0 была доказана Красносельским и Рутицким для уравнения

$$u(x) = \lambda \int_D K(x,y,u(y))dy \qquad (26)$$

при достаточно малых λ.

В качестве примера нелинейного ядра для (26) можно взять функцию

$$K(x,y,u(y)) \le |\, ln\, r\, |^{1-\beta_0} e^{\alpha|u|}, \qquad (27)$$

где r - расстояние между точками $x,y \in [a,b]$.

Тогда уравнение (26) имеет решение в L_M^* где $M(u)$- любая функция вида $e^{|u|^{1+\beta}}-1$, где $0<\beta<\beta_0$ [57, с. 239-241].

Случай "слабых" нелинейностей мало отличается от случая, рассмотренного для оператора H_1.

Заметим, что условия существования решений у уравнений Урысона и Гаммерштейна, полученные с применением пространств Орлича, отличаются от аналогичных условий, возникающих при использовании пространств C и L^r (см. предыдущий раздел). Как уже упоминалось выше[14], это связано с тем, что в пространствах Орлича действуют и вполне непрерывны такие операторы H_0 и H_1, которые не действуют в пространствах непрерывных функций и функций, интегрируемых со степенью r. Так, в двух последних примерах операторы H_0 и H_1 нельзя рассматривать без дополнительных предположений в пространствах L^r в последнем из них по причине "сильной" нелинейности оператора Урысона (см.(27)), а в предпоследнем - по причине того, что ядро оператора Гаммерштейна $K(x,y)$ может иметь "сильные" особенности (см.(22)) [57, с. 241-242].

Подчеркнём, что Красносельский настолько глубоко приобщился к идеям Орлича, связанным с N - функциями, классами L_M и пространствами L_M^* и сумел так квалифицированно развить данную теорию в направлении её использования в решении нелинейных интегральных уравнений, что вскоре после выхода монографии [57] *Выпуклые функции и пространства Орлича* его стали считать вторым (!!) после Орлича специалистом по теории пространств Орлича [60, с. vii][15].

Заключение

Теория нелинейных интегральных уравнений, зародившись в начале XX в. из уравнений равновесия вращающейся жидкости Ляпунова-Шмидта, к началу 1930-х гг. обогатилась двумя новыми объектами для исследований - уравнениями Урысона и Гаммерштейна. К ним и было приковано основное внимание исследователей до начала 1960-х гг. Параллельно шло развитие теории линейных уравнений в банаховых пространствах, на которую стали опираться специалисты по нелинейному анализу. Использование аппарата теории линейных интегральных уравнений при поиске решений нелинейных интегральных уравнений, начатое ещё Ляпуновым, оставалось основным приёмом при доказательстве разрешимости последних до конца 1950-х гг.

Оказалось, что в конце 1930-х гг. была построена стационарная теория горения и теплового взрыва, задачи которой приводились к уравнению Гаммерштейна с сильными нелинейностями, что могло бы дать дополнительный стимул к активизации исследований в области нелинейных интегральных уравнений. Но, к сожалению, результаты Зельдовича и Франк-Каменецкого не попали в то время в круг научных интересов математиков, специализирующихся на уравнениях Гаммерштейна и Урысона в СССР, поэтому эволюция соответствующих физических и математических теорий происходила параллельно по законам их внутренней логики развития.

В процессе «разворота» теории операторов в сторону решения нелинейных интегральных уравнений пришлось переосмыслить понятия *компактности* и *непрерывности*, создать специальные приёмы для расщепления операторов Гаммерштейна и Урысона. На этом пути были сформулированы и доказаны теоремы существования для нелинейных уравнений, порождённых вполне непрерывными операторами. Методика использования оператора суперпозиции $f(x,u(x))$, предложенная Немыцким для исследования нелинейных операторов, действующих в пространствах C и L^p и развитая в дальнейшем Красносельским для операторов, действующих в L_M^*, применялась также Вайнбергом в контексте вариационных методов решения нелинейных интегральных уравнений и систем [18]. Практически сразу она нашла своё применение и в зарубежных исследованиях, проводимых в Японии [61], Франции [62] и других странах (обзор результатов и библиография по данной теме хорошо представлены в [63]).

Значительным шагом вперёд в развитии нелинейного функционального анализа стало использование *пространств Орлича* для исследования нелинейных интегральных уравнений с сильными нелинейностями. После доклада М.А. Красносельского и Я.Б. Рутицкого на заседании Московского математического общества в 1954 г. [56], данная идея была достаточно быстро распространена московскими математиками (М.И. Вишиком [64] и Ю.А. Дубинским [65]) на нелинейные *дифференциальные* уравнения, а через них пришла и за границу [66]. Отметим, что при доказательстве разрешимости соответствующих нелинейных краевых задач использовалась техника, основанная на теоремах вложения Соболева [67], что привело в итоге к необходимости создания нового типа функциональных пространств - *пространств Соболева-Орлича*[16].

Опубликование монографии Красносельского и Рутицкого [57] стимулировало исследования по теории пространств Орлича. В результате эти пространства стали применяться в теории функций, в гармоническом анализе, в теории вероятностей, в математической статистике, в теории интерполяций,

[14] См. пояснения к формуле (10).

[15] В этой связи ему (вместе с Орличем) была посвящена монография известных на западе учёных М.М. Рао (США) и З.Д. Рена (КНР) *Применение пространств Орлича*, опубликованная в 2002 г. в издательстве "Marcel Dekker".

[16] В них были задействованы *классы* Орлича.

в теории симметричных пространств, в эргодической теории, в теории мартингала, в теории риска и т.д. Следует отметить, что указанная монография была переведена и издана в США и Индии, что говорит о той значимости, которую имели эти результаты. Проведённые за 25 лет исследования[17] (1935-1960 гг.) по теории нелинейных интегральных уравнений вовлекли в научную работу в данной области функционального анализа сотни математиков (см., например, [4], [13], [68]).

Автор выражает искреннюю признательность Р.Р. Мухину (СТИ НИТУ МИСИС) за постановку задачи и полезные советы, а также М.А. Муратову (Симфероволь, КФУ) и В.П. Богатовой за помощь в предоставлении необходимых материалов.

Отдельная благодарность участникам общегородского семинара по истории математики МГУ (руководитель С.С. Демидов) и общегородского семинара по дифференциальным уравнениям МЭИ (руководители - Ю.А. Дубинский и А.А. Амосов) за обсуждение работы.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект 17-03-00383.

Список литературы
References

1. Богатов Е.М. К вопросу об истории развития теории нелинейных интегральных уравнений в СССР (1920-1960) /Е.М. Богатов// Материалы междун. конф. "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2016" ред. В.А. Костин. Издательско-полигр. центр "Научная книга", Воронеж, 2016. - С. 86-88.

Bogatov E.M. To a question about the history of the theory of nonlinear integral equations in the USSR (1920-1960) / E.M.Bogatov // Materials intern. conf. "Voronezh winter mathematical school S.G. Krein-2016", ed. V.A. Kostin. Publishing house *Science Book*, Voronezh, 2016.- P.86-88

2. Weyl H. David Hilbert and his mathematical work / H. Weyl // Bull. Amer. Math. Soc. 50:9 (1944), P. 612-654.

3. Шилов Г.Е. К истории развития функционального анализа на Украине / Г.Е. Шилов // Историко-матем. исслед., Вып. IX (1956), С. 427-476.

Shilov G.E. On the history of the functional analysis development in Ukraine / G.E. Shilov // Historical and mathemat. studies, 9 (1956), - P. 427-476.

4. Красносельский М.А.,. Функциональный анализ / М.А. Красносельский, М.А. Наймарк , Г.Е. Шилов // В сб. Математика в СССР за 40 лет. Под ред. А.Г. Куроша. Т.1. ГИФФЛ, М.:, 1959, С. 680-683.

Krasnosel'skii M. A. Functional analysis / M. A. Krasnosel'skii, M. A.. Naimark, G.E. Shilov // Mathematics in the USSR during 40 years (1917-1957) Vol. 1 Review articles. Moscow, Fizmatgiz, 1959. – P. 680-683.

5. Александрова И.Л. Из истории теории интегральных уравнений / И.Л. Александрова. Дисс.... кандидата физико-математических наук: 07.00.10.- М., ИИЕТ РАН, 1992.

Aleksandrova I.L. About the history of the theory of integral equations / I.L. Aleksandrova PhD Thesis, Moscow, IHST RAS, 1992.

6. Ziedler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. II/B: Nonlinear Monotone Operators / E. Ziedler.- Springer-Verlag, New York, 1990. - 741 p.

7. Ziedler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. III: Variational Methods and Optimization / E. Ziedler.- Springer-Verlag, New York. 1985. - 662 p.

8. Урысон П. С. Об одном типе нелинейных интегральных уравнений / П. С. Урысон // Матем. сб., 31:2 (1923). - С. 236-255.

Urysohn P. Sur une classe d'équations intégrales non lineaires / P. Urysohn // Mat. Sb., 31:2 (1923), P. 236–255.

9. Picard E. Traité d'Analyse, t. I-III / E. Picard. - Gauthier-Villars. Paris, 1905.

10. Bratu G. Sur les équations intégrales non linéaires/ G. Bratu // Bulletin de la S. M. F., 42 (1914). - P. 113-142.

11. Гайдук Ю.М. Научные заслуги П. Боля в оценках его современников / Ю.М. Гайдук // Историко-матем. исслед., Вып. XXXII-XXXIII (1990).- С. 120-137.

Haiduk Yu. M. Scientific merits of P. Bohl in the assessments of his contemporaries [in Russian] / Yu. M. Haiduk // Historical and mathemat. studies, XXXII-XXXIII (1990).- P. 120-137.

12. Математика: Наука в СССР за пятнадцать лет (1917-1932)-М.-Л.: ГТТИ, 1932.- 239 с.

Mathematics: The Science of the USSR in fifteen years (1917-1932). [in Russian] GTTI, Moscow-Leningrad, 1932.-239 p.

13. Вайнберг М. М. Виктор Владимирович Немыцкий (к шестидесятилетию со дня рождения) / М. М. Вайнберг, Р. Э. Виноград, Б. П. Демидович // УМН, 1961, том 16, вып. 1 (97), С. 201–212.

Vainberg M. M. Victor Vladimirovich Nemytskii (on the sixtieth birthday anniversary) / M. M. Vainberg, R. E. Vinograd, B. P. Demidovich // Uspekhi Mat. Nauk, 16:1 (97) (1961), P. 201–212.

14. Birkhoff G.D. Invariant points in function space / G.D. Birkhoff, Kellog O.D. // Trans. Amer. Math. Soc., 23 (1922), P. 95-115.

15. Немыцкий В. В. Метод неподвижных точек в анализе / В. В. Немыцкий // УМН, 1936, вып. 1, С. 141–174.

Nemytskii V. V. Fixed-point method in analysis / V. V. Nemytskii // Uspekhi Mat. Nauk, 1936, № 1, P. 141–174

[17] Ввиду ограниченности объёма, мы не смогли охватить такие важные направления в развитии теории нелинейных интегральных уравнений, как вариационные и топологические методы, а также теорию конусов. Это требует отдельного рассмотрения, и мы надеемся проследить историю данных вопросов в последующих работах.

16. Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalraumen / J. Schauder // Math. Z., 26 (1927), S. 47-65.

17. Riesz F. Über lineare Funktionalgleichungen / F. Riesz // Acta Math., 41 (1918), P. 71-98.

18. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов / М. М. Вайнберг М., ГИТТЛ, 1956. - 344 с.

Vainberg M.M. Variational methods for the study of nonlinear operators / M.M. Vainberg (Russian) Gostehizdat, Moscow, 1956. - 344 p.

19. Вайнберг М. М. О непрерывности некоторых операторов специального вида / М. М. Вайнберг // ДАН СССР 73:2 (1950), С. 253-255.

Vainberg M. M. Continuity of the operator of special type / M. M. Vainberg // Doklady Akad. Nauk SSSR 73:2 (1950), p. 253-255.

20. Немыцкий В. В. Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений / В. В. Немыцкий // Матем. сб., 1934, том 41, № 3, С. 421–452.

Niemytzki V. Théorèmes d'existence et d'unicité des solutions de quelques équations intégrales non-linéaires / V. Niemytzki // Mat. Sb., 41:3 (1934). - P. 421–452

21. Красносельский М.А. Непрерывность оператора fu(x)=f[x,u(x)] / М.А. Красносельский // ДАН СССР 77, № 2 (1951), С. 185-188.

Krasnosel'skii M.A. The continuity of the operator fu(x)=f[x,u(x)] / M.A. Krasnosel'skii // Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 77:2 (1951).- P. 185-188.

22. Riesz M. Sur les ensembles compacts de fonctions sommables // Acta Sci. Math., (Szeged) 6 (1933).- P. 136-142.

23. Hammerstein, A. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen / M. Riesz // Acta Math., 54 (1930), S. 117-176.

24. Александров П.С. Виктор Владимирович Немыцкий (некролог) / П.С. Александров, М. М. Вайнберг, Р. Э. Виноград, Б. П. Демидович // УМН, 1968, том 23, вып. 2 (140), С. 179–192.

Aleksandrov P. S. Viktor Vladimirovich Nemytskii (obituary) / P. S. Aleksandrov, M. M. Vainberg, R. E. Vinograd, B. P. Demidovich // Uspekhi Mat. Nauk, 23:2 (140) (1968). - P. 179–192.

25. Рутицкий Я.Б., М.А. Красносельский в Киеве / Я.Б. Рутицкий. - Сб. Материалы к истории математического факультета ВГУ, Воронеж, ВГУ, 1998, С. 28-31.

Rutickii Ya. B. Krasnosel'skii M.A. v Kieve / Ya. B. Rutickii - Materials to the history of mathematics department of VSU, Voronezh State University, 1998, P. 28-31.

26. Красносельский М. А. Условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона, действующего в пространстве L^p / М. А. Красносельский , Л. А. Ладыженский // Тр. ММО, 3, ГИТТЛ, М., 1954, С. 307-320.

Krasnosel'skii M. A., Ladyzhenskii L. A. Conditions for complete continuity of P. S. Uryson's operator acting in the space L^p / M. A. Krasnosel'skii, L. A. Ladyzhenskii // Tr. Mosk. Mat. Obs., 3 (1954), P. 307–320.

27. Lalescu T. Sur l'équation de Volterra / T. Lalescu // J. de Math., ser. 6, vol. 4 (1908), p. 125-202.

28. Красносельский М. А., Некоторые задачи нелинейного анализа / М. А. Красносельский // УМН, 1954, том 9, вып. 3 (61), С. 57–114.

Krasnosel'skii M.A. Some problems of nonlinear analysis / M. A. Krasnosel'skii // Uspekhi Mat. Nauk, 9:3 (61) (1954). - P. 57–114.

29. Bratu G. Sur certaines équations intégrales non linéaires / G. Bratu // C. R. Acad. Sci. Paris, 150 (1910). - P. 896-899.

30. Davis H. T. Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations / H. T. Davis - Dover, New York, 1962. - 566 p.

31. Zaanen A.C. On A Certain Class of Banach Spaces / A.C. Zaanen // Ann. of Math., Second Series, 4 (1946), Vol. 47. - P. 654-666.

32. Bateman H. Report on the history and present state of the theory of integral equations / H. Bateman // British Assoc. for the Advancement of Sci., 80 (1910).- P. 345-424.

33. Богатов Е.М. Из истории нелинейных интегральных уравнений / Е.М. Богатов , Р.Р. Мухин // Изв. вуз., Прикл. нелин. динамика, 2, 2016.

Bogatov E.M. About the history of nonlinear integral equations / E.M. Bogatov, R.R. Mukhin // Iz. Vuz. Applied Nonlinear Dynamics, 2, 2016.

34. Математика в СССР за 40 лет (1917-1957) Том 2. Библиография. Сборник / М.: Физматгиз, 1959. - 821 с.

Mathematics in the USSR for 40 years (1917-1957), Vol. 2. References. Collection / M .: Fizmatgiz, 1959. - 821 p.

35. Франк-Каменецкий Д.А. Распределение температур в реакционном сосуде и стационарная теория теплового взрыва / Д.А. Франк-Каменецкий // Журнал физ. химии, 13 (1939). № 6, С. 738-755.

Frank-Kamenetskiy D.A. The temperature distribution in the reaction vessel and stationary thermal explosion theory / D.A. Frank-Kamenetskiy // J. of Phys. Chemistry, 13 (1939). Iss. 6. - P. 738-755.

36. Зельдович Я.Б. К теории теплового распространения пламени / Я.Б. Зельдович, Д.А. Франк-Каменецкий // Журн. физ. химии, 12: 1 (1938), С. 100-105.

Zel'dovich Ya.B. To the thermal flame propagation theory / Ya.B. Zel'dovich., D.A. Frank-Kamenetskiy // J. of Phys. Chemistry, 12: 1 (1938), - P. 100-105.

37. Колмогоров А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюлл. МГУ 1, вып. 6 (1937), С. 1-26.

Kolmogorov A.N. Study of diffusion equation coupled with an increase of the number of substances, and its application to a biological problem / A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovsky, N.S. Piskunov // Bull. Moscow State Univ. 1, Iss.. 6 (1937).- P. 1-26.

38. Тихомиров В.М. Вопросы естествознания в творчестве А. Н. Колмогорова / В.М. Тихомиров // ВИЕТ, № 3, 2003.

Tikhomirov V.M. Questions of natural science in the work of Kolmogorov / V.M. Tikhomirov // VIET, № 3, 2003.

39. Зельдович Я.Б. Математическая теория горения и взрыва / Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Б. Либрович, Г.М. Махвиладзе - М: Наука, 1980. - 478 с.

Zeldovich Ya. B. Mathematical theory of combustion and explosions / Ya. B. Zeldovich, G. I. Barenblatt , V. B. Librovich and G. M. Makhviladze.- M.: Nauka Publishing House.1980. - 478 p.

40. Young W.H. On successions with subsequence converging to an integral / W.H. Young // Ibid., ser. 2, 24 (1926), P. 1-20.

41. Истратов А.Г., Либрович В.Б. Об устойчивости решений в стационарной теории теплового взрыва / А.Г. Истратов, В.Б. Либрович // ПММ, 1963, 27:2, С. 343-347.

Istratov A.G. On the stability of solutions in the stationary thermal explosion theory / A.G. Istratov, V.B. Librovich // AMM 1963, 27: 2. - P. 343-347.

42. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений / И. М. Гельфанд // УМН, 14:2 (86) (1959).- С. 87-158.

Gel'fand I. M. Some problems in the theory of quasi-linear equations / I. M. Gel'fand // Uspekhi Mat. Nauk, 14:2(86) (1959).- P. 87–158

43. Birnbaum Z.W. Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen / Z.W. Birnbaum , W. Orlicz // Studia Math. 3 (1931): S.1–67.

44. Orlicz W. Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B / W. Orlicz // Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Ser. A 1932, S. 207-220

45. Orlicz W. Über Räume (L_M) / W. Orlicz // Bull. Intern, de L'Acad. Pol., serie A, Cracovie, 1936. – S. 93–107.

46. Красносельский М.А. К теории пространств Орлича / М. А. Красносельский, Я.Б. Рутицкий // ДАН СССР, 81, № 4 (1951). - С.497-500.

Krasnosel'skii M.A. About the theory of Orlicz Spaces / M.A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii // Doklady Akad. Nauk SSSR, 81:4 (1951). - P. 497-500

47. Maligranda L., Wnuk W. Wladislav Orlicz (1903-1990) / L. Maligranda, W. Wnuk // Wiadom. Mat., 36 (2000), p. 85-147.

48. Богатов Е.М. Некоторые заметки об истории пространств Орлича / Е.М. Богатов // ТВИМ, 3 (2015), С. 24-39.

Bogatov E.M. Some notes on the history of Orlicz spaces / E.M. Bogatov // Taurida J. of Comput. Sc. Th. and Math., 3 (2015). P. 24-39.

49. Zygmund A. Sur les fonctions conjuguées / A. Zygmund// Fund. Math. Volume: 13, Issue: 1 (1929). - p. 284-303.

50. Burkill J.C. Strong and Weak Convergence of Functions of General Type / J.C. Burkill // Proc. Lond. Math. Soc.(2) 28 (1928), P. 493-500.

51. Красносельский М.А. Исследования по нелинейному функциональному анализу / М. А. Красносельский.- Автореферат докторской дисс. Ин-т матем. АН УССР. Киев, 1950, 21 с.

Krasnosel'skii M.A. Research on nonlinear functional analysis / M.A. Krasnosel'skii.- Abstract of doctoral diss. Inst. of Math. Ukrainian Academy of Sci. Kiev, 1950. - 21 p.

52. Рутицкий Я.Б. Памяти дорогого учителя / Я.Б. Рутицкий.- Красносельский Марк Александрович. К 80-летию со дня рождения / Сб. статей. М.: ИППИ РАН, 2000. - 216 с.

Rutickii Ya. B. In memory of my dear teacher / Ya. B. Rutickii.- Krasnosel'skii Mark Aleksandrovich. To the 80th anniversary. Coll. Sci. Works. IITP RAS, Moscow, 2000, P. 141-145.

53. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Общая теория пространств Орлича / М. А. Красносельский, Я.Б. Рутицкий // Труды семинара по функц. анализу. ВГУ, Воронеж. Вып.1 (1956) , - С. 3-38.

Krasnosel'skii M.A. Rutickii Ya. B., The general theory of Orlicz spaces / M.A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii // Proceedings of the Seminar on functional analysis, Voronezh State University, 1 (1956), P. 1-38.

54. Мамонтов А.Е. Основы теории пространств Орлича / А.Е. Мамонтов.- Учеб. пособие. Новосибирск, НГУ, 2003. — 50 с.

Mamontov A.E. Fundamentals of the theory of Orlicz spaces / A.E. Mamontov Novosibirsk, NSU, 2003.- 50 p.

55. Rao M.M. Theory of Orlicz spaces / M.M. Rao, Z.D. Ren - New York, Marcel Dekker, 1991. 445 p.

56. Красносельский М.А. Пространства Орлича и нелинейные интегральные уравнения / М. А. Красносельский, Я.Б. Рутицкий // Тр. ММО, 7, 1958, С. 63-120.

Krasnosel'skii M.A. Orlicz Space and nonlinear integral equations / M.A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii // Tr. Mosk. Mat. Obs., 7 (1958), P. 63–120.

57. Красносельский М.А. Выпуклые функции и пространства Орлича / М. А. Красносельский, Я.Б. Рутицкий .- ГИФМЛ. М.: 1958.- 271 с.

Krasnosel'skii M.A. Vypuklye funkcii i prostranstva Orlicza / M.A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii.- Moscow, Fizmatgiz, 1958. – 271 p.

58. Красносельский М.А. Линейные интегральные операторы, действующие в пространствах Орлича / М. А. Красносельский, Я.Б. Рутицкий // Труды семинара по функц. анализу. ВГУ, Воронеж. Вып.2 (1956), С.55-76.

Krasnosel'skii M.A. Linear integral operators acting in the Orlicz spaces / M.A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii // Proceedings of the Seminar on functional analysis, Voronezh State Univ., 2 (1956), P. 55-76.

59. Красносельский М.А. О некоторых нелинейных операторах в пространствах Орлича / М. А. Красносельский, Я.Б. Рутицкий // ДАН СССР. 1957. - Т. 117. -№ 3., С.363-366.

Krasnosel'skii M.A. About some nonlinear integral operators in Orlicz spaces / M.A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii // Doklady Akad. Nauk SSSR 117:3 (1957).- P. 363-366.

60. Rao M.M. Applications of Orlicz Spaces (Pure and Applied Mathematics) / M.M. Rao, Z.D. Ren.- Marcel Dekker, New York, 2002. – 464 p.

61. Yamamuro S. On the theory of some nonlinear operators / S. Yamamuro // Yokohama math. J. 10 (1962), P. 11-17.

62. Robert J. Continuité d'un opérateur non linéaire sur certains espaces de suites / J. Robert // C.R. Acad. Sci. Paris, 259 (1964), p.1287-1290.

63. Appell J. Nonlinear Superposition Operators / J. Appell, P. P. Zabreiko.- Cambridge University Press, Cambridge, 1990. - 320 p.

64. Вишик М.И. О разрешимости первой краевой задачи для квазилинейных уравнений с быстро растущими коэффициентами в классах Орлича / М.И. Вишик // ДАН СССР, 151:4 (1963), С.758-761.

Vishik M.I. About the solvability of the first boundary value problem for quasilinear equations with fast growing coefficients in Orlicz classes / M.I. Vishik // Doklady Akad. Nauk SSSR, 151:4 (1963), P. 758-761.

65. Дубинский Ю. А. Некоторые интегральные неравенства и разрешимость вырождающихся квазилинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений / Ю. А. Дубинский // Матем. сб., 64 (106):3 (1964).- С. 458-480.

Dubinskii Yu. A. Some integral inequalities and the solvability of degenerate quasi-linear elliptic systems of differential equations / Yu. A. Dubinskii // Mat. Sb. (N.S.), 64 (106):3 (1964), P. 458–480.

66. Donaldson T. Nonlinear elliptic boundary value problems in Orlicz-Sobolev spaces / T. Donaldson // JDE, 10 (1971), P. 507-528.

67. Donaldson T. Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorem / T. Donaldson, N. Trudinger// J. Func. Anal., 8 (1971), P. 52-75.

68. Красносельский Марк Александрович. К 80-летию со дня рождения / Сб. статей. М.: ИППИ РАН, 2000. – 216 с.

Krasnosel'skii Mark Aleksandrovich. To the 80th anniversary / Coll. Sci. Works. IITP RAS, Moscow, 2000.-216 p.