УДК: 517.925.7

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТОЧНЫХ КРИТЕРИЕВ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

THE EXACT CRITERIA FOR THE EXISTENCE OF MOVABLE SINGULAR POINTS OF SOLUTIONS OF A CLASS OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER IN THE COMPLEX REGION

Т.Ю. Леонтьева
T.Yu. Leont'eva

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, 428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38

I. Yakovlev named Chuvash State Pedagogical University, 38 K. Marx St, Cheboksary, 428000, Russia

E-mail: betty2784@mail.ru

Аннотация
Один из аспектов дифференциальных уравнений – это приложение в различных областях деятельности человека в виде математической модели. Наличие подвижных особых точек делает необходимым развитие теории и методов решения нелинейных дифференциальных уравнений. Характер подвижной особой точки связан с классом рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения, и их координаты практически невозможно определить без соответствующего математического аппарата, являющегося основой для программного обеспечения персональных компьютеров. Указанные задачи являются составляющими для аналитического приближенного метода решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками. Успешная апробация этого метода была проведена в последнее время для ряда классов нелинейных дифференциальных уравнений. Результаты статьи расширяют данный класс уравнений с подвижными особыми точками.

Abstract
One aspect of the differential equations of this application in various fields of human activities in a mathematical model. Nonlinear differential equations require the development of theory and methods of their solution due to the presence of moving singular points. The nature of mobile singularity associated with the class of nonlinear differential equations and their position is almost impossible to determine without a corresponding mathematical apparatus, which is the basis for the software of personal computers. These tasks are integral to approximate the analytical method for solving nonlinear differential equations with moving singular points. Successful testing of this method has been carried out in recent years for a number of classes of nonlinear differential equations. The results of this paper extend this class of nonlinear differential equations with moving singular points.

Ключевые слова*:* нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, подвижная особая точка, координаты, приближенное решение, возмущение подвижной особой точки, точные критерии существования, комплексная область.
Keywords*:* nonlinear differential equation of the second order, a movable singular point, coordinates, approximate solution, perturbation of the movable singular point, the exact criteria for the existence of the solution, complex region.

Введение

Классические методы решения применимы лишь к линейным дифференциальным уравнениям, а для нелинейных дифференциальных уравнений необходима разработка нового аналитического приближенного метода решения в силу наличия подвижных особых точек. В настоящее время разработан и предложен в работах [Орлов 2006а, б; Орлов 2008а, б; Орлов 2009; Орлов 2010; Редкозубов, Орлов 2009] аналитический приближенный метод решения нелинейных дифференциальных уравнений, в котором одной из задач является нахождение подвижной особой точки с заданной точностью. Решение этой задачи связано с разработкой точных критериев существования подвижных особых точек в комплексной области, которые представляют собой необходимые и достаточные условия и классифицируются на точечные и интервальные критерии. С практической точки зрения, предпочтительными являются интервальные критерии, а точечные позволяют лишь констатировать факт их существования и применимы для проведения контроля.

Объекты и методы исследования

Объектом исследования является один класс нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальной правой частью пятой степени. Существующие методы решения дифференциальных уравнений можно классифицировать на точные, приближенные и асимптотические. Преобладающее большинство работ, посвященных решению дифференциальных уравнений, основывается на точных и частично асимптотических методах, лишь незначительная их часть использует формальный аппарат аналитического приближенного метода, но без строгого обоснования всех пунктов этих методов. В данной работе представлено решение одного из этапов аналитического приближенного метода решения исследуемого класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с подвижными особыми точками, позволяющее находить координаты последних с заданной точностью. Решения данной задачи для других классов нелинейных дифференциальных уравнений представлены в работах [Орлов 2006а, б; Редкозубов, Орлов 2009; Орлов, Гузь 2013; Орлов и др. 2016]. Предыдущие этапы исследуемого метода решения рассматриваемого класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка были опубликованы ранее [Орлов, Леонтьева 2013а, б; Орлов, Леонтьева 2014; Леонтьева 2015; Орлов, Леонтьева 2016].

Результаты и их обсуждение

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\begin{gathered} y''(z)=a_0(z)y^5(z)+a_1(z)y^4(z)+a_2(z)y^3(z)+ \\ +a_3(z)y^2(z)+a_4(z)y(z)+a_5(z) \end{gathered}, \tag{1}$$

где $a_i, i=0,1,\ldots,5$ – аналитические функции в рассматриваемой области. С помощью замены переменной

$$y(z)=\frac{v(z)}{\sqrt[4]{a_0(z)}}-\frac{a_1(z)}{5a_0(z)}$$

при условии:

$$\frac{a_1(z)}{5a_0(z)}=\frac{a_2(z)}{2a_1(z)}=\frac{a_3(z)}{a_2(z)}=\frac{2\left(a_4(z)+\frac{a_0''(z)}{4a_0(z)}-\frac{5}{16}\left(\frac{a_0''(z)}{a_0(z)}\right)^2\right)}{a_3(z)},$$

уравнение (1) приводится к нормальному виду:

$$v''(z)=v^5(z)+r(z),$$

где

$$\begin{gathered} r(z)=-\frac{a_1^5(z)\sqrt[4]{a_0(z)}}{5^5a_0^4(z)}-\frac{3a_0''(z)\sqrt[4]{a_0(z)}}{20a_0^2(z)}+a_5(z)\sqrt[4]{a_0(z)}+ \\ +\frac{a_1''(z)\sqrt[4]{a_0(z)}}{5a_0(z)}-\frac{2a_0'(z)a_1'(z)\sqrt[4]{a_0(z)}}{5a_0^2(z)}+\frac{2\left(a_0'(z)\right)^2a_1(z)\sqrt[4]{a_0(z)}}{5a_0^3(z)}-, \\ -\frac{\left(a_0''(z)\right)^2a_1(z)\sqrt[4]{a_0(z)}}{16a_0^3(z)}+\frac{a_0'(z)}{2a_0(z)}u'(z) \end{gathered}$$

во всех областях, где выполняется условие $a_0(z)\neq 0$ [8]-[9].

Рассмотрим задачу Коши:

$$y''(z)=y^5(z)+r(z), \tag{2}$$

$$y(z_0)=y_0,\ y'(z_0)=y_1. \tag{3}$$

Используя формулу регуляризации

$$y^2(z)=\frac{1}{w_1(z)}, \tag{4}$$

получим задачу Коши:

$$2w_1''(z)w_1(z)=3\left(w_1'(z)\right)^2-4-4\cdot\left(\sqrt{w_1(z)}\right)^5 r(z), \tag{5}$$

$$w_1(z_0)=w_{1,0},\ w_1'(z_0)=w_{1,1}. \tag{6}$$

Решение уравнения (5) можно представить в виде следующего разложения:

$$w_1(z)=u_1(x,y)+iv_1(x,y),$$

которое характеризуется двумя фазовыми пространствами:

$$\Phi_1=\{x,y,u_1(x,y)\},\quad \Phi_2=\{x,y,v_1(x,y)\}.$$

Для формулировки следующих теорем необходимы определения [Орлов 2011].

Определение 1. Линия в некоторой области комплексной плоскости называется правильной, если для координат точек этой линии существует взаимно-однозначное соответствие.

Определение 2. Линия в некоторой области комплексной плоскости называется неправильной в направлении оси *Ox* (*Oy*), если на этой линии существуют, по крайней мере, две точки, имеющие одинаковые вторые (первые) координаты.

Определение 3. Неправильная линия в направлении осей *Ox* (*Oy*) называется неправильной линией.

Теорема 1. z^* – подвижная особая точка решения $y(z)$ задачи Коши (2)-(3) тогда и только тогда, когда функции $u_1(x,y)$ и $v_1(x,y)$ в некоторой области G_1 ($z^*\in G_1$) фазовых пространств Φ_1 и Φ_2 являются непрерывными относительно своих аргументов и меняют знаки при переходе через точку $z^*(x^*,y^*)$, двигаясь вдоль некоторой правильной линии l ($z^*\in l\subset G_1$ $l\in\Phi_1$ $l\in\Phi_2$).

Доказательство.

I. (Необходимость). z^* – подвижная особая точка решения задачи Коши (2)-(3). На основании результатов, полученных в работе [Орлов, Леонтьева 2014], решение задачи Коши (2)-(3) в окрестности подвижной особой точки представимо в виде:

$$y(z)=\left(z^*-z\right)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(z^*-z\right)^{n/2}, \tag{7}$$

где $C_0=\sqrt[4]{3/4}$, $C_1=C_2=C_3=C_4=C_8=0$. Отсюда следует, что решение $y(z)$ в некоторой окрестности G_1 точки z^* будет определяться главной частью в формуле (7):

$$y(z)=\mathrm{O}\left(\sqrt[4]{3/4}\big/\sqrt{z^*-z}\right).$$

Учитывая замену переменной (4), для $w_1(z)$ в области G_1 получим:

$$w_1(z)=\mathrm{O}\left(2/\sqrt{3}\cdot\left(z^*-z\right)\right).$$

При этом

$$\begin{gathered} sign(u_1(x,y))=sign\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(x^*-x\right)\right). \\ sign(v_1(x,y))=sign\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(y^*-y\right)\right) \end{gathered} \tag{8}$$

Положим для определенности, что z^* находится в первой четверти плоскости xOy фазовых пространств Φ_1 и Φ_2. В качестве правильной линии l рассмотрим часть окружности $|z|=|z^*|$ в области G_1. Тогда для всех точек $z\in l$: $\arg z>\arg z^*$ следует, что

$$x<x^*,\ y>y^*, \tag{9}$$

а для точек $z\in l$: $\arg z<\arg z^*$

$$x>x^*,\ y<y^*. \tag{10}$$

Таким образом, функции $u_1(x,y)$ и $v_1(x,y)$, двигаясь по правильной линии l при переходе через точку z^*, являются непрерывными относительно своих аргументов и одновременно меняют знаки в соответствующих фазовых пространствах. Не нарушая общности, это утверждение справедливо для z^* в любой четверти координатной плоскости xOy фазовых пространств Φ_1 и Φ_2.

II. (Достаточность). По условию теоремы функции $u_1(x,y)$ и $v_1(x,y)$ – непрерывны относительно своих аргументов и одновременно меняют знаки при движении вдоль некоторой правильной линии $l(l\subset G_1)$. В качестве правильной линии выберем часть окружности, проходящей через точку $z^*(x^*,y^*)$. Представив уравнение окружности в виде: $x^2+y^2=x^{*2}+y^{*2}$, получим

$$y=\pm\sqrt{x^{*2}-x^2+y^{*2}}\ .$$

Рассмотрим поведение указанной окружности в первой четверти:

$$y=\sqrt{x^{*2}-x^2+y^{*2}}$$

с учетом расположения точки z^*. Отсюда следует, что функции $u_1(x,y)$ и $v_1(x,y)$ переходят в категорию функций одной переменной, которые на концах интервала $[x_1,x_2]\subset G_1$ принимают значения разных знаков. По условию нашей теоремы $(u_1(x,y)\in C(G_1),\ v_1(x,y)\in C(G_1))$, на основании теоремы Больцано-Коши, следует существование некоторой точки x^*, в которой $u_1(x,y)$ и $v_1(x,y)$ одновременно обращаются в нуль. Тогда функции $u_1(x,y)$ и $v_1(x,y)$ имеют линейный множитель относительно своего аргумента, и для функции $w_1(z)$ следует структура выражения:

$$w_1(z)=(z^*-z)\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z^*-z)^n.$$

Отсюда, учитывая замену (4), получим:

$$y^2(z)=1\Big/\left((z^*-z)\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z^*-z)^n\right),$$

или

$$y(z)=(z^*-z)^{-1/2}\Big/\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z^*-z)^n\right)^{1/2},$$

где $C_0\neq 0$, что и завершает доказательство теоремы.

В силу абстрактности характера произвольной правильной линии, практически необходимо осуществление движения по ломаной, расположенной вдоль данной правильной линии. Это приводит к увеличению объема вычислений, которые связаны с уменьшением значений возникающих функционалов. Переход на неправильные линии позволяет существенно уменьшить объем вычислений.

Теорема 2. z^* – подвижная особая точка решения $y(z)$ задачи Коши (2)-(3) тогда и только тогда, когда функции $u_1(x,y)$ и $v_1(x,y)$ в некоторой области G_1 ($z^*\in G_1$) фазовых пространств Φ_1 и Φ_2 являются непрерывными относительно своих аргументов и меняют знаки при переходе через точку $z^*(x^*,y^*)$, двигаясь последовательно вдоль некоторых линий l_1 и l_2 неправильных в направлении осей *OX* и *OY* соответственно ($z^*\in l_1\subset G_1\quad z^*\in l_2\subset G_1\quad l_1\in\Phi_1\quad l_2\in\Phi_2$).

Доказательство.

I. (Необходимость). Так как z^* – подвижная особая точка решения задачи Коши (2)-(3), то, основываясь на теореме существования [Орлов, Леонтьева 2014], получаем существование некоторой окрестности G_1 точки z^*, в которой решение $y(z)$ будет определяться главной частью формулы (7):

$$y(z)=\mathrm{O}\left(\sqrt[4]{3/4}\Big/\sqrt{z^*-z}\right).$$

Отсюда следует, что для решения $w_1(z)$ уравнения (5), учитывая выражение (4), в области G_1 получим:

$$w_1(z) = \mathrm{O}\left(2/\sqrt{3}\cdot\left(z^* - z\right)\right).$$

Пусть прямая $l_1 : y = const$ - неправильная линия в направлении оси *OX*. При движении вдоль указанной линии l_1, с учетом соотношений (8) и теоремы существования [Орлов, Леонтьева 2014], функция u_1 как функция одной переменной меняет знак при переходе через точку z^*.

В дальнейшем за неправильную линию в направлении оси *OY* возьмем прямую $l_2 : x = x^* = const$. По аналогии получаем, что для функции $v_1(x, y)$ выполняется условие - $v_1(const, y) \in C(G_1)$ и меняется знак при переходе через точку z^*. Таким образом, получаем утверждение теоремы.

II. (Достаточность). По условию теоремы имеем, что функции $u_1(x, y)$ и $v_1(x, y)$ в некоторой области G_1 ($z^* \in G_1$) фазовых пространств Φ_1 и Φ_2 являются непрерывными относительно своих аргументов и меняют знаки при переходе через точку $z^*(x^*, y^*)$, двигаясь последовательно вдоль некоторых линий l_1 и l_2 неправильных в направлении осей Ох и Оу соответственно ($z^* \in l_1 \subset G_1$ $z^* \in l_2 \subset G_1$ $l_1 \in \Phi_1$ $l_2 \in \Phi_2$). Следовательно, $w_1(z^*) = 0$ и для функции $w_1(z)$: $w_1(z) = u_1(x, y) + i v_1(x, y)$ можно предполагать существование разложения относительно $\left|z^* - z\right|$:

$$w_1(z) = \left(z^* - z\right)\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(z^* - z\right)^n.$$

Тогда, с учетом замены

$$w_1(z) = \frac{1}{y^2(z)},$$

получим

$$y(z) = \left(z^* - z\right)^{-1/2} \Big/ \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(z^* - z\right)^n\right)^{1/2}.$$

z^* – подвижная особая точка функции $y(z)$.

Заключение

В статье представлены формулировки и доказательства теорем, представляющие необходимые и достаточные условия существования подвижных особых точек в комплексной области, которые являются ключевым моментом в алгоритме программы нахождения подвижных особых точек. Следует отметить, что теорема 2 предпочтительнее для алгоритма, так как минимизирует объем вычислений.

Список литературы
References

1. Голубев В.В. 1950. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 2 изд. М.-Л.,: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 436.

Golubev V.V. 1950. Lekcii po analiticheskoj teorii differencial'nyh uravnenij [Lectures on the analytic theory of differential equations]. 2 izd. M.-L: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tehniko-teoreticheskoj literatury, 436. (in Russian)

2. Леонтьева Т.Ю. 2015. Влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в комплексной области. Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2 (24): 109–118.

Leont'eva T.Ju. 2015. The effect of perturbation movable singular point on the approximate solution of a nonlinear differential equation of second order in a complex region. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija [Bulletin of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state], 2 (24): 109–118.

3. Орлов В.Н. 2006. Критерии существования подвижных особых точек решений дифференциальных уравнений Риккати. Вестник Самарского государственного университета. Естественная научная серия, 6/1 (46): 64–69.

Orlov V.N. 2006. Criteria for the existence of mobile singular points of solutions of differential equations of Riccati. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennaja nauchnaja serija [Bulletin of the Samara State University. Natural science series], 6/1 (46): 64–69.

4. Орлов В.Н. 2006. Критерии существования подвижных особых точек решений второго уравнения Пенлеве. Известия Тульского государственного университета. Серия Дифференциальные уравнения и прикладные задачи, 1: 26–29.

Orlov V.N. 2006. Criteria for the existence of mobile singular points of solutions of the second Painlevé equation. Izvestija Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Serija Differencial'nye uravnenija i prikladnye zadachi [News of the Tula State University. A series of differential equations and applied problems], 1: 26–29.

5. Орлов В.Н. 2008. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве. Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева, 2: 42–46.

Orlov V.N. 2008. The approximate solution of the first Painlevé equation. Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta im. A.N. Tupoleva [Bulletin of the A. Tupolev Kazan State Technical University], 2: 42–46.

6. Орлов В.Н. 2008. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати. Вестник Московского авиационного института, 15 (5): 128–135.

Orlov V.N. 2008. A method for the approximate solution of matrix differential Riccati equations. Vestnik Moskovskogo aviacionnogo instituta [Bulletin of the Moscow Aviation Institute], V. 15, 5: 128–135.

7.Орлов В.Н. 2009. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки. Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки, 4 (35): 102–108.

Orlov V.N. 2009. A study of the approximate solution of Abel differential equation in the neighborhood of a singular point of a mobile. Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta im. N.Je. Baumana. Serija: Estestvennye nauki [Bulletin of N. Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences], 4 (35): 102–108.

8. Орлов В.Н. 2010. Точные границы для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области. Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2 (8): 399–405.

Orlov V.N. 2010. The precise boundaries for the approximate solution of Abel differential equation in the neighborhood of the approximate value of the movable singular point in the complex domain. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija [Bulletin of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state], 2 (8): 399–405.

9. Орлов В.Н. 2011. Об одном точном критерии существования подвижной особой точки решений скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, 1: 209–213.

Orlov V.N. 2011. On the exact criteria for the existence of mobile singular points of solutions of scalar and matrix Riccati differential equations. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Fizika. Matematika [Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 1: 209-213.

10. Орлов В.Н., Гузь М.П. 2013. Точные критерии существования подвижных особых точек решения одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева, ч.2 4 (80): 156–161.

Orlov V.N., Guz' M.P. 2013. The exact criteria for the existence of mobile singular points of solutions of nonlinear ordinary differential equation. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ja. Jakovleva [Bulletin of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University], p. 2, 4 (80): 156–161.

11. Орлов В.Н., Леонтьева Т.Ю. 2013. Исследование влияния возмущения начальных данных на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в области голоморфности. Вестник Филиала Российского государственного социального университета в г. Чебоксары, 2 (29): 147-150.

Orlov V.N., Leont'eva T.Ju. 2013. Investigation of the effect of the perturbation of the initial data on the approximate solution of a nonlinear differential equation in a domain of holomorphy. Vestnik Filiala Rossijskogo gosudarstvennogo social'nogo universiteta v g. Cheboksary [Bulletin of the branch of the Russian State Social University in Cheboksary], 2 (29): 147-150.

12. Орлов В.Н., Леонтьева Т.Ю. 2013. Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в области голоморфности. Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 4 (80), Ч. 2: 162–167.

Orlov V.N., Leont'eva T.Ju. 2013. Construction of the approximate solution of a nonlinear second-order differential equation in a domain of holomorphy. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija [Bulletin of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state], 4 (80), p. 2: 162–167.

13. Орлов В.Н., Леонтьева Т.Ю. 2014. Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности подвижной особой точки в комплексной области. Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 4 (22): 157–166.

Orlov V.N., Leont'eva T.Ju. 2014. Construction of the approximate solution of a nonlinear second-order differential equations in the neighborhood of a singular point of a mobile in a complex region. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija [Bulletin of I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics limit state], 4 (22): 157–166.

14. Орлов В.Н., Леонтьева Т.Ю. 2016. О точных границах области применения приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений 2 порядка в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, 4: 142–151.

Orlov V.N., Leont'eva T.Ju. 2016. On the exact boundaries of the application of the approximate solution of a class of nonlinear differential equations of order 2 in the vicinity of the approximate value of the movable singular point in a complex region. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Fizika. Matematika [Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 4: 142–151.

15. Орлов В.Н., Хмара П.В., Сейтвелиева Т.Б. 2016. Необходимые и достаточные условия существования подвижных особых точек одного класса нелинейных дифференциальных уравнений. Нелинейный мир. Издательство Радиотехника, Т. 14, 7: 31–35.

Orlov V.N., Hmara P.V., Sejtvelieva T.B. 2016. Necessary and sufficient conditions for the existence of mobile singular points of a class of nonlinear differential equations. Nelinejnyj mir. Izdatel'stvo Radiotehnika [The nonlinear world. Publisher Radio engineering], V. 14, 7: 31-35.

16. Редкозубов С.А., Орлов В.Н. 2009. Точные критерии существования подвижной особой точки дифференциального уравнения Абеля. Известия института инженерной физики, 4 (14): 12–14.

Redkozubov S.A., Orlov V.N. 2009. The exact criteria for the existence of mobile singularity Abel differential equation. Izvestija instituta inzhenernoj fiziki [Proceedings of the Institute of Engineering Physics], 4 (14): 12–14.