УДК 517.958

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ПОЧВЕННОЙ ВЛАГИ

ON THE MATHEMATICAL MODEL OF MOISTURE MOTION

М.М. Бухурова
M.M. Bukhurova

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А

Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 A, Shortanov St, Nalchik, 360000, Russia

E-mail:mareta.bukhurova@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается нелокальная задача для обобщенного уравнения Аллера, возникающая при математическом моделировании движения почвенной влаги. Зависимость фрактальной структуры почвы от влажности может существенно повлиять на процесс движения влаги в капилярно-пористой среде.
Resume. In this paper we study a nonlocal boundary value problem for generalized Aller's equation occurring at mathematical modeling of moisture motion. The dependence of the fractal dimension on the soil humidity can significantly affect the process of unsteady moisture motion in the Capillary-porous medium.

Ключевые слова: движение почвенной влаги, фрактальная структура, уравнение Аллера, нелокальная задача, регуляризованный дробный оператор.
Key words: moisture motion, fractal structure, Aller's equation, nonlocal problem, regularized fractional operator.

Введение

Процессы перемещения влаги оказывают существенное влияние на весь ход развития сельскохозяйственных культур. Одним из основных факторов, определяющих урожай является структура почвы, которая оказывает влияние на растения функционально через формирование водного, воздушного, питательного и теплового режимов. Система растение-почва-воздух относится к фрактальным диффузионным системам. На процесс нестационарного движения влаги в почве существенно может повлиять зависимость фрактальной размерности почвы [1].

Пусть: $u=u(x,t)$ - влажность в точке x слоя $0\le x\le r$ пористой почвы толщиной $r>0$ в момент времени $t\in[0,T]$; $\psi_e=\psi_e(x,t)$ - эффективный, по терминологии Аллера [2], потенциал, связанный с капиллярным потенциалом $\psi=\psi(x,t)$ и влажностью $u(x,t)$ формулой

$$\psi_e=\psi+a_\alpha\partial_{0t}^\alpha u(x,\eta), \tag{1}$$

где $a_\alpha=const>0$,

$$\partial_{0t}^\alpha q(\eta)=D_{0t}^{\alpha-1}q'(\eta)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{q'(\eta)d\eta}{(t-\eta)^\alpha}$$

- регуляризованный оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля порядка $\alpha\in]0,1[$ с началом в точке $t=0$ и предполагается, что структура почвы имеет фрактальную организацию с потенциалами влаги ψ и ψ_e в тонких и магистральных капиллярах соответственно.

В качестве уравнения движения однокомпонентной жидкости в почве с фрактальной геометрией рассматривается нагруженное уравнение

$$\partial_{0t}^\alpha u(x,\eta)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{K}\frac{\partial\psi_e}{\partial x}\right),\quad 0<x<r,\ 0<t<T, \tag{2}$$

где $\mathrm{K}=const>0$ - коэффициент влагопроводности.

Подставляя в уравнение (2) ψ_e из формулы (1) и принимая во внимание формулу

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{D(u)}{\mathrm{K}}\frac{\partial u}{\partial x},$$

получим нагруженное дифференциальное уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(x,\eta)=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(u)\frac{\partial u}{\partial x}+A_{\alpha}\partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial x}\right], \qquad (3)$$

где $A_{\alpha}=a_{\alpha}K$, $D(u)=K\dfrac{\partial\psi}{\partial u}$ - коэффициент диффузитивности.

Уравнение (3) при $\alpha=1$ переходит в уравнение Аллера и в работе [3] для него методом разделения переменных решена смешанная задача.

Задача расчета нестационарного движения влаги в слое почвы толщины r сводится к проблеме отыскания решения уравнения (3), удовлетворяющее следующим условиям

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^r u(x,t)dx=f(t), \qquad 0\le t\le T, \qquad (4)$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=r}=0, \qquad 0\le t\le T, \qquad (5)$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad 0\le x\le r, \qquad (6)$$

где $f(t)$ и $\varphi(x)$ - заданные функции.

Условие (5) характеризует отсутствие перетока влаги из нижнего слоя в глубину, а внутреннекраевое условие (4), по терминологии А.М. Нахушева [4], задает скорость изменения влагосодержания (скорость иссушения) $B(t)=\int_0^r u(x,t)dx$ в почвенном слое $0\le x\le r$.

Интегрируя уравнение (3) по x в пределах от 0 до r и меняя слева порядок интегрирования и дробного дифференцирования, получим

$$\partial_{0t}^{\alpha}B(\eta)=\left.\left[D(x)\frac{\partial u}{\partial x}+A_{\alpha}\partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial x}\right]\right|_{x=0}^{x=r}$$

Отсюда, учитывая (5) можно записать внутреннекраевое условие (4) в виде

$$D(u(0,t))u_x(0,t)+A_{\alpha}\partial_{0t}^{\alpha}u_x(0,\eta)=-D_{0t}^{\alpha-1}f(\eta).$$

Далее будем предполагать, что $D(u)=const\ge 0$. Это часто имеет место, если влажность u меняется в небольшом диапазоне. В этом случае уравнение (3) можно записать в виде

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(x,\eta)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[Du+A_{\alpha}\partial_{0t}^{\alpha}u(x,\eta)\right], \qquad 0<x<r,\ 0<t<T. \qquad (7)$$

Уравнение (7) относится к классу нагруженных уравнений в частных производных дробного порядка, исследованному А.М. Нахушевым в работе [5].

В уравнении (7) совершим переход к новой зависимой переменной $\upsilon=\upsilon(x,t)$ по формуле

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(x,\eta)-\lambda u(x,t)=\upsilon(x,t), \qquad \lambda=-D/A_{\alpha}. \qquad (8)$$

Предполагая $\upsilon(x,t)$ известной найдем функцию $u(x,t)$ из уравнения (8), удовлетворяющая начальному условию (6). Тогда решение запишется в виде [6]

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\left[\varphi(x)+D_{0\eta}^{-\alpha}\upsilon(x,\xi)\right]E_{1/\alpha}\left[\lambda(t-\eta)^{\alpha};1\right]d\eta, \qquad (9)$$

где $E_{\rho}[z;\mu]=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)}$ - функция типа Миттаг-Леффлера [7].

В силу формулы дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом и свойств функции типа Миттаг-Леффлера

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t E_{1/\alpha}\left[\lambda(t-\eta)^{\alpha};1\right]d\eta=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t E_{1/\alpha}\left[\lambda\xi^{\alpha};1\right]d\xi=E_{1/\alpha}\left[\lambda t^{\alpha};1\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t E_{1/\alpha}\left[\lambda(t-\eta)^{\alpha};1\right]D_{0\eta}^{-\alpha}\upsilon(x,\xi)d\eta=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{E_{1/\alpha}\left[\lambda(t-\eta)^{\alpha};1\right]}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\eta}\frac{\upsilon(x,\xi)d\xi}{(\eta-\xi)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{\upsilon(x,\xi)}{\Gamma(\alpha)}d\xi\int_{\xi}^t(\eta-\xi)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}\left[\lambda(t-\eta)^{\alpha};1\right]d\eta=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha k)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\upsilon(x,\xi)d\xi\int_{\xi}^t(\eta-\xi)^{\alpha-1}(t-\eta)^{\alpha k}d\eta=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha k)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \upsilon(x,\xi)(t-\xi)^{\alpha+\alpha k} d\xi \int_0^1 \eta_1^{\alpha-1}(1-\eta_1)^{\alpha k} d\eta_1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\alpha k)\lambda^k}{\Gamma(\alpha+1+\alpha k)} \int_0^t \upsilon(x,\xi)(t-\xi)^{\alpha-1+\alpha k} d\xi =$$

$$= \int_0^t \frac{\upsilon(x,\xi)}{(t-\xi)^{1-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\lambda(t-\xi)^{\alpha}\right]^k}{\Gamma(\alpha+\alpha k)} d\xi = \int_0^t \frac{\upsilon(x,\xi)}{(t-\xi)^{1-\alpha}} \mathrm{E}_{1/\alpha}\left[\lambda(t-\xi)^{\alpha};\alpha\right] d\xi$$

формулу (9) можно переписать в виде

$$u(x,t) = \varphi(x)\mathrm{E}_{1/\alpha}\left[\lambda t^{\alpha};1\right] + \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{1/\alpha}\left[\lambda(t-\eta)^{\alpha}:\alpha\right]\upsilon(x,\eta)d\eta. \qquad (10)$$

Как следует из (10), замена (8) отображает решение $u = u(x,t)$ уравнения (7) с начальным условием (6) в решении $\upsilon = \upsilon(x,t)$ уравнения

$$\mathrm{A}_{\alpha} \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} = \upsilon + \lambda\varphi(x)\mathrm{E}_{1/\alpha}\left[\lambda t^{\alpha};1\right] + \lambda\int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{1/\alpha}\left[\lambda(t-\eta)^{\alpha}:\alpha\right]\upsilon(x,\eta)d\eta. \qquad (11)$$

Перепишем условия (4) и (5) в терминах функции $\upsilon(x,t)$ с помощью замены (8). Тогда

$$\left.\frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial x}\right|_{x=r} = \partial_{0t}^{c} \left.\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial x}\right|_{x=r} - \lambda \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=r} = 0 \qquad (12)$$

в силу (5).

Проинтегрируем обе части равенства (7) по x в пределах от 0 до r. В результате с учетом замены (8) и условия (4) будем иметь

$$D_{0t}^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^r u(x,t)dx = D_{0t}^{\alpha-1} f(\eta) = \mathrm{A}_{\alpha} \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right|_{x=0}^{x=r}$$

или же

$$\left.\frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial x}\right|_{x=r} - \left.\frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = D_{0t}^{\alpha-1} f(\eta)/\mathrm{A}_{\alpha}.$$

Отсюда в силу (12) получаем условие

$$\left.\frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = f_1(t), \qquad f_1(t) = D_{0t}^{\alpha-1} f(\eta)/\mathrm{A}_{\alpha} \qquad (13)$$

Перепишем уравнение (11) в виде

$$\upsilon_{xx} - \mu^2\upsilon = \lambda\mu^2\varphi(x)\mathrm{E}_{1/\alpha}\left[\lambda t^{\alpha};1\right] + \lambda\mu^2 \mathrm{F}[\upsilon;x,t], \qquad (14)$$

где $\mu^2 \mathrm{A}_{\alpha} = 1$,

$$F[\upsilon;x,t] = \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{1/\alpha}\left[\lambda(t-\eta)^{\alpha};\alpha\right]\upsilon[x,\eta]d\eta.$$

Уравнение (14) с краевыми условиями (12), (13) эквивалентно интегральному уравнению

$$\upsilon(x,t) - \lambda\mu^2 \int_0^r d\xi \int_0^t (t-\eta)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{1/\alpha}\left[\lambda(t-\eta)^{\alpha};\alpha\right]G(x,\xi)\upsilon(\xi,\eta)d\eta = q(x,t) \qquad (15)$$

с правой частью

$$q(x,t) = f_1(t)G(x,0) + \lambda\mu^2\mathrm{E}_{1/\alpha}\left[\lambda t^{\alpha};1\right]\int_0^r \varphi(\xi)G(x,\xi)d\xi,$$

где

$$G(x,\xi) = \frac{1}{\mu(\exp(2\mu r)-1)} \begin{cases} ch\mu\xi[\exp(\mu x) + \exp(2\mu r - \mu x)], x\xi < \xi, \\ ch\mu x[\exp(\mu\xi) + \exp(2\mu r - \mu\xi)], x > \xi, \end{cases}$$

Пусть $R(x,t;\xi,\eta;\lambda\mu^2)$ - резольвента ядра

$$\mathrm{K}(x,t;\xi,\eta) = (t-\eta)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{1/\alpha}\left[\lambda(t-\eta)^{\alpha};\alpha\right]G(x,\xi)$$

интегрального уравнения (15). Тогда единственное его решение $\upsilon(x,t)$ задается формулой

$$\upsilon(x,t) = q(x,t) + \lambda\mu^2 \int_0^r d\xi \int_0^t R(x,t;\xi,\eta;\lambda\mu^2) q(\xi,\eta) d\eta . \qquad (16)$$

Следовательно, с помощью обратимой замены (8) нелокальная задача (4) - (7) эквивалентно сводится к задаче (12) - (14), решение которой определяется формулой (16).

Список литературы
References

1. Федотов Г.Н., Третьяков Ю.Д., Иванов В.К., Куклин А.И., Пахомов Е.И., Исламов А.Х., Початкова Т.Н. 2006. Влияние влажности на фрактальные свойства почвенных коллоидов. М., Доклады РАН, 409 (2): 199-201.

Fedotov G.N., Tretyakov Yu.D., Ivanov V.K., Kuklin A.I., Pakhomov E.I., Islamov A.Kh., Pochatkova T.N. 2006. Vliyanie vlazhnosti na fraktalnie svoistva pochvennih kolloidov [Influence of humidity on the fractal properties of soil colloids]. Moscow, Doklady RAN.

2. Hallaire M. 1964. Leau et la production vegetal. Ins. Nat. rech. agronom.

3. Янгарбер В.А. 1967. О смешанной задаче для модифицированного уравнения влагопереноса. Новосибирск, Журнал прикладной математики и технической физики, (1): 91-96.

Yangarber V.A. 1967. O smeshannoi zadache dlya modifitsirovannogo uravneniya vlagoperenosa [On a mixed problem for the modified equation of moisture transfer]. Novosibirsk, Zhurnal prikladnoi matematiki I tekhnicheskoi fiziki.

4. Нахушев А.М. 2006. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М., Наука.

Nakhushev A.M. 2006. Zadacgi so smesheniem dlya uravneniy v chastnyh proizvodnyh [Problems with shift for partial differential equations]. Moscow, Nauka.

5. Нахушев А.М. 2012. Об одном классе нагруженных уравнений в частных производных дробного порядка. Нальчик, Доклады АМАН. 14 (1): 51-57.

Nakhushev A.M. 2012. Ob odnom klasse nagruzhennyh uravneniy v chastnyh proizvodnyh drobnogo poryadka [A certain class of loaded equations of fractional order]. Nalchik, Doklady AMAN.

6. Нахушев А.М. 2003. Дробное исчисление и его применение. М., Физматлит.

Nakhushev A.M. 2003. Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit.

7. Джрбашян М.М. 1966. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., Наука.

Dzhrbashyan M.M. 1966. Integralnye preobrazovaniya i predctavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti [Integral transforms and representations of functions in the complex domain]. Moscow, Nauka.