УДК 512

О МАТРИЦАХ, ПОРОЖДАЮЩИХ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

ABOUT MATRICES CONNECTED WITH SYMPLECTIC STRUCTURES

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин
Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin

Белгородский государственный университет, ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия

Belgorod State University, Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia

E-mail:virch48@bsu.edu.ru

Аннотация
В статье рассматриваются рассматривается класс ϑ антисимметричных матриц $\mathcal{J}$ фиксированной размерности, которые допускают приведение к канонической матрице, определяющей симплектические матрицы той же размерности, посредством ортогонального преобразования подобия. Доказывается теорема о характеризации этого класса.

Resume
The class of antisymmetric matrices $\mathcal{J}$ with fixed dimension \$n\$ which to reducing to the canonical matrix that determines symplectic $n \times n$ -matrice by an orthogonal transformation is under consideration. It is proved the statement that characterizes this class.

Ключевые слова: симплектические матрицы, ортогональные матрицы, кососимметрические матрицы.
Keywords: symplectic matrices, orthogonal matrices, antisymmetric matrices.

Введение

Ранее в работе авторов было введено понятие о *симплектических динамических системах* [1] в вещественном евклидовом пространстве. Такими системами $\dot{X} = \mathrm{F}(X)$ были названы такие четномерные системы, у которых определяющий каждую из них диффеоморфизмом F: $\mathbf{R}^{2n} \mapsto \mathbf{R}^{2n}$ имеет вид

$$\mathrm{F}(X) = (\ \mathcal{J}(X), \nabla)\,)\,\mathrm{H}(X), \tag{1}$$

где функция H: $\mathbf{R}^{2n} \mapsto \mathbf{R}$ является дифференцируемой и матриц-функцией $\mathcal{J}$: $\mathbf{R}^{2n} \mapsto \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^{2n}$ принимает такие матричные значения, для которых в любой точке $X \in \mathbf{R}^{2n}$ справедливы тождества $\mathcal{J}^2(X) = -1$, $\mathcal{J}^T(X) = -\mathcal{J}(X)$. Важность класса таких динамических систем связана с тем, что они допускают преобразование в гамильтоновы системы посредством некоторой *неканонической* замены переменных (см.[2]).

При общем анализе таких систем, данном в упомянутой публикации, существенно использовалось следующее утверждение

Теорема. Для любой вещественной матрицы $\mathcal{J}$, удовлетворяющей тождествам

$$\mathcal{J}^2 = -1, \qquad \mathcal{J}^T = -\mathcal{J}. \tag{2}$$

существует такая ортогональная матрица Y, $\mathrm{YY}^T = \mathrm{Y}^T\mathrm{Y} = \mathbf{1}$, что матрица $\mathcal{J}$ представляется формулой $\mathcal{J} = \mathrm{Y}\,\partial\,\mathrm{Y}^T$

Здесь посредством ∂ обозначена каноническая $2n \times 2n$-матрица

$$\partial = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

(жирным шрифтом обозначены, соответственно, нулевая и единичная $n \times n$-матрицы) посредством которой определяются так называемые симплектические матрицы M, то есть невырожденные матрицы, удовлетворяющие тождеству $\partial = \mathrm{M}^T\,\partial\,\mathrm{M}$.

Введем класс ϑ всех вещественных антисимметричных матриц $\mathcal{J} = \mathrm{Y}\,\partial\,\mathrm{Y}^T$, каждая из которых определяет симплектическую структуру, которая обладает тем специальным свойством, что она приводится к каноническому виду посредством преобразования подобия, связанного с ортогональной матрицей Y. В силу сформулированной теоремы, класс всех таких матриц полностью характеризуется дополнительным тождеством $\mathcal{J}^2 = -1$.

Настоящее сообщение посвящено доказательству сформулированной теоремы.

2. Класс $\mathcal{J}$

Теорема 1. Порядок n всякой вещественной матрицы $\mathcal{J} \in \mathcal{J}$ является четным числом и ей соответствует пара взаимно ортогональных пространств $L_{\pm}$, $L_+ \oplus L_- = \mathbf{R}^n$ с размерностью $n/2$ таких, что всякий вектор $g \in L_{\pm}$ является собственным с собственным числом $\pm i$.

Из равенства $\mathcal{J}^2 = -1$ следует, что

$$\det \mathcal{J}^2 = (\det \mathcal{J})^2 = (-1)^n.$$

Так как $\mathcal{J}$ вещественная матрица, то n четно.

Так как $\mathcal{J}$ - антисимметричная матрица, то она имеет полный набор собственных взаимно ортогональных векторов g_j с соответствующими каждому из них чисто мнимыми собственными числами $i\lambda_j$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1 \div n$. Тогда для каждого собственного вектора g_j имеем

$$\mathcal{J}\, g_j = i\lambda_j g_j\,, \qquad -g_j = \mathcal{J}^2 g_j = i\lambda_j\, \mathcal{J}\, g_j = -\lambda_j^2 g_j\,,$$

то есть $\lambda_j^2 = 1$, $\lambda_j = \pm 1$.

Пусть кратности собственных чисел $\pm i$ равны, соответственно, $n_{\pm}$. Ввиду антисимметричности матрицы $\mathcal{J}$, ее диагональные элементы равны нулю. Следовательно,

$$0 = \mathrm{Sp}\mathcal{J} = n_+ - n_-\,, \qquad n_+ = n_- = n/2$$

Тогда эти кратности являются размерностями взаимно ортогональных пространств $L_{\pm}$ собственных векторов с собственными числами $\pm i$. +

Следствие. Для любого вектора $g \in \mathbb{R}^n$ один из векторов $g \pm i\mathcal{J}g$ является либо собственным вектором матрицы $\mathcal{J}$, удовлетворяющей тождествам (2), с собственным числом $\mp i$, а второй равен нулю.

$$\mathcal{J}(g + i\mathcal{J}g) = \mathcal{J}g + i\mathcal{J}^2 g = -i\,(g + i\mathcal{J}g).$$

Так как, в силу антисимметрии матрицы $\mathcal{J}$, выполняется $(\mathcal{J}g, g) = 0$, то норма собственного вектора $g + i\mathcal{J}g$ равна $\sqrt{2}\,||g||$, .так как

$$(\mathcal{J}g, \mathcal{J}g) = (\mathcal{J}^T\mathcal{J}g, g) = -(\mathcal{J}^2 g, g) = ||g||^2.$$

3. Доказательство основной теоремы

Из Теоремы 1 непосредственно следует, что для любой четномерной вещественной антисимметричной матрицы $\mathcal{J}$, удовлетворяющей тождеству $\mathcal{J}^2 = -1$, существует унитарная матрица Y, $YY^+ = -1$, которая преобразует эту матрицу в «стандартную» матрицу $\mathcal{J}$ (3), то есть $Y\mathcal{J}Y^+ = \mathcal{J}$. Существо сформулированной во вводной части основной теоремы состоит в том, что матрицу Y можно выбрать при этом вещественной, то есть ортогональной.

Доказательство основной теоремы вытекает из фундаментальной теоремы теории матриц о приведении комплексной антисимметричной матрицы к нормальной форме (см. [3], гл. XI, 4), которую мы сформулируем здесь следующим образом.

Теорема 2. Для любой антисимметричной матрицы $\mathcal{J}$ порядка n найдется ортогональная матрица ς, $\varsigma\varsigma^T = -1$ такая, что

$$\mathcal{J} = \varsigma\, \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & -\mu_j \\ \mu_j & 0 \end{pmatrix}; j = 1 \div p; 0, \ldots, 0\right\} \varsigma^T,$$

где $\pm i\mu_j$, $j = 1 \div p$ - полный набор ненулевых собственных чисел матрицы $\mathcal{J}$, $p \le n$ и число нулей на диагонали равно кратности нулевого собственного значения матрицы $\mathcal{J}$.

, Доказательство основной теоремы следует теперь из того, что в нашем случае $p = n$, так как $(\det \mathcal{J})^2 = 1$ и все $\mu_j = 1$. Применяя последовательно последовательность подходящих элементарных преобразований подобия матриц на основе ортогональных матриц $\varsigma_{l,j}$, действие которых

$\varsigma_{ij} \mathrm{A} \varsigma_{ij}^T$ для каждой матрицы ς_{ij} с парой $\{i, j\}$ на данную матрицу A сводится к одновременной перестановке местами i -й строки с j -й и i-го столбца с j -м, получим, что

$$[\varsigma_{i_1, j_1} \dots \varsigma_{i_{n/2}, j_{n/2}}] \varsigma^T \mathcal{J} \varsigma \, [\varsigma_{i_{n/2}, j_{n/2}}^T \dots \varsigma_{i_1, j_1}^T] = \partial .$$

Существование такой последовательности преобразований подобия следует из того, что каждой матрице ς_{ij} соответствует оператор в $\square^n$, который меняет местами номера векторов e_i и e_j стандартного ортобазиса e_k, $k = 1 \div n$. Для получения нужной последовательности матриц нужно перевести последовательность $\langle e_1, \dots, e_{n/2}, e_{n/2+1}, \dots, e_n \rangle$ в последовательность $\langle e_1, e_3, \dots, e_{n/2} e_2, e_4, \dots, e_n \rangle$

Таким образом, ортогональная матрица $\mathrm{Y} = \varsigma_{i_1, j_1} \dots \varsigma_{i_{n/2}, j_{n/2}} \varsigma^T$ удовлетворяет условиям теоремы.

Список литературы
References

1. Субботин А.В., Вирченко Ю.П., 2016 Симплектические динамические системы. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 17(214); 44: 181-188.

Subbotin A.V., Virchenko Yu.P., 2016 Simpectic dynamical systems. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 17(214); 44: 181-188.

2. Арнольд В.И., 1989. Математические методы классической механики. М.: Наука, 472.

Arnold V.I., 1989. Mathematical methods of classical mechanics. M.: Nauka, 472.

3. Гантмахер Ф.Р., 1966. Теория матриц. М.: Наука, 576.

Gantmakher F.R., 1966. Matrix Theory. M.: Nauka, 576.

4. Дарбу Ж.Г., 2012. Избранное по механике. Ижевск: Удмуртский государственный университет, 256.

Darboux J.G., 2012. Selected works of mechanics. Izhevsk: Udmurt State University, 256.