УДК 519.21 + 537.86

ОБЩЕЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

GENERAL PHENOMENOLOGICAL EQUATION OF HEAT TRANSFER IN SOLIID MEDIUM

Лам Тан Фат, Ю.П. Вирченко
Lam Tan Phat, Yu.P. Virchenko

[2] Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85PobedySt, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: lam_tan_phat1802@yahoo.com; virch@bsu.edu.ru;

Аннотация. На основе термодинамических рассуждений получено уравнение переноса тепла в твердотельной абсолютно упругой среде с учетом взаимного влияния деформаций среды и распределений температуры в ней.

Resume. On basis of thermodynamic construction, the heat transfer equation is obtained in the case of solid medium being absolutely elastic subject with the account of mutual influence of its deformations and the temperature distribution in it.

Ключевые слова: тензор деформаций, распределение температуры, модули упругости, тензор теплопроводности, тензор коэффициентов линейного расширения.

Key words: strain tensor, temperature distribution, elasticity modules, thermal conductivity tensor, tensor of linear expansion coefficients.

В литературе по физике твердого тела, не уделено должного внимания изучению эволюции распределения температуры в твердотельной среде, когда учитывается влияние деформаций, порождаемых его изменением. В настоящем сообщении мы даем вывод общего уравнения теплопереноса в твердотельной, абсолютно упругой, гомогенной среде, которое устраняет этот недостаток. При этом мы не учитываем действия на твердотельную среду каких либо внешних воздействий (механических, электрических и магнитных). Кроме того, мы исключаем из рассмотрения наличие у среды собственной магнитной или электрической упорядоченности. Наш вывод уравнения теплопереноса основан на тех же рассуждениях, которые использованы в известном курсе [3] по теории упругости для получения уравнения переноса тепла в более частном случае. В отличие от рассмотренной физической ситуации, мы получаем эволюционное уравнение в случае, в котором не предполагается малость градиентов температуры в среде.

Запишем первое начало термодинамики для каждой малой пространственной области $\Lambda(\mathbf{x})$ с объемом V в момент времени t, занимаемой средой, которая сосредоточена около точки $\mathbf{x}$,

$$d\mathrm{E}(\mathbf{x},t) = \delta\mathrm{Q}(\mathbf{x},t) + \delta\mathrm{A}(\mathbf{x},t), \tag{1}$$

где $d\mathrm{E}(\mathbf{x},t)$ - малое изменение внутренней энергии среды в области $\Lambda(\mathbf{x})$ и, соответственно, $\delta\mathrm{Q}(\mathbf{x},t)$ и $\delta\mathrm{A}(\mathbf{x},t)$ - малое изменение тепла внутри этой области и малая величина работы, проделанная веществом среды, сосредоточенным в ней. Эти малые изменения представляют собой линейные дифференциальные формы относительно изменений значений интенсивных термодинамических параметров, полностью , характеризующих состояние среды в $\Lambda(\mathbf{x})$ при сделанных нами предположений о ее гомогенности и отсутствии в ней какого-либо электромагнитного упорядочения.

Применим второе начало термодинамики к дифференциальному изменению теплоты $\delta\mathrm{Q}(\mathbf{x},t)$ к части среды, содержащейся в области $\Lambda(\mathbf{x})$ (см., например, [3]). Естественно, что это возможно только при реализации таких физических условий, при которых процессы теплопереноса в среде являются достаточно медленными. Тогда $\delta\mathrm{Q}(\mathbf{x},t) = \mathrm{V}T(\mathbf{x},t)d\mathrm{S}(\mathbf{x},t)$, где $d\mathrm{S}(\mathbf{x},t)$ - дифференциал плотности энтропии вещества, сосредоточенного в $\Lambda(\mathbf{x})$.

Так как дифференциальная форма $\delta Q = VTdS$ не является точной, то дифференциальная форма $\delta A \neq 0$, если $T \neq const$. Выражение для дифференциального изменения работы $\delta A(\mathbf{x},t)$ запишем в виде

$$\delta A(\mathbf{x},t) = V\Sigma_{ij}(\mathbf{x},t)du_{ij}(\mathbf{x},t), \tag{2}$$

где учитывается изменение формы и объема области $\Lambda(\mathbf{x})$ при изменении ее температуры. При этом мы выбираем знак «плюс», в отличие выражения, использованного в [3], в силу принятого нами знака перед δA в формуле (1). Здесь $\Sigma_{ij}(\mathbf{x},t)$ -- тензор механических напряжений в среде и $u_{ij}(\mathbf{x},t)$ - тензор деформаций среды в пространственно-временной точке $\langle \mathbf{x},t\rangle$.

Ввиду предположения об абсолютной упругости, отсутствуют необратимые деформации области $\Lambda(\mathbf{x})$ при малом изменении dt времени. Полагая что эти деформации очень малы, можно ограничиться только лишь линейной связью между деформациями и механическими напряжениями. Запишем эту связь в виде

$$\Sigma_{ij} = \beta_{ij}(T) + C_{ijkl}(T)u_{kl}. \tag{3}$$

Первое слагаемое, независящее от деформаций, описывает напряжения, которые возникают вследствие теплового расширения. Второе слагаемое представляет собой запись закона Гука в наиболее общей форме. При этом тензор четвертого ранга $C_{ijkl}(T)$ модулей упругости, обладающий специальными свойствами симметрии по совокупности своих индексов (см. [3]), зависит от температуры $T = T(\mathbf{x},t)$ в области $\Lambda(\mathbf{x})$. В частном случае, в предположении об изотропии среды и напряжений в ней $\Sigma_{ij}(\mathbf{x},t) = -P(\mathbf{x},t)\delta_{ij}$, $\delta A(\mathbf{x},t) = VP(\mathbf{x},t)du_{ii}(\mathbf{x},t)$. Здесь $P(\mathbf{x},t)$ - давление внутри области $\Lambda(\mathbf{x})$ в момент времени t, причем знак в этой формуле выбран таким образом, что $P > 0$, если давление направлено внутрь области.

Покажем, что коэффициент $\beta_{ij}(T)$ определяется формулой

$$\beta_{ij}(T) = -\int_{T_0}^{T} \alpha_{ij}(T')dT', \tag{4}$$

где симметричный тензор второго ранга $\alpha_{ij}(T)$, с точностью до постоянного множителя, представляет собой тензор коэффициентов теплового расширения. Здесь температура T_0 представляет собой среднюю температуру среды, которая реализуется при наличии в ней полного теплового равновесия.

Воспользуемся стандартными термодинамическими соотношениями,

$$E = F + TSV, \qquad S = -V^{-1}\frac{\partial F}{\partial T}, \tag{5}$$

где F -- свободная энергия области $\Lambda(\mathbf{x})$ среды и S -- плотность энтропии. Тогда, на основании (1), имеем

$$\delta A = dF + VSdT = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{u_{ij}} dT + \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right)_T du_{ij} + VSdT,$$

$$\delta A = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right)_T du_{ij}. \tag{6}$$

Запишем теперь выражение для свободной энергии с точностью до квадратичных членов разложения по компонентам тензора деформаций

$$F(T,u_{kl}) = F_0(T) - Vu_{ij}\int_{T_0}^{T}\alpha_{ij}(T')dT' + \frac{V}{2}C_{ijkl}(T)u_{ij}u_{kl} \tag{7}$$

и, следовательно, имеем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right)_T = -V\int_{T_0}^{T}\alpha_{ij}(T')dT' + VC_{ijkl}(T)u_{kl}. \tag{8}$$

Кроме того, на основании второго соотношения в (5), из (7) следует

$$S(T,u_{kl}) = S_0(T) + \alpha_{ij}(T)u_{ij} - \frac{1}{2}u_{ij}u_{kl}\frac{\partial}{\partial T}C_{ijkl}(T), \tag{9}$$

где $\mathrm{S}_0 = -\mathrm{V}^{-1}\partial \mathrm{F}_0 / \partial T$, и поэтому коэффициент $\alpha_{ij}(T)$ представляет собой тензор коэффициентов линейного расширения. Отсюда видно, что, в рамках линейной теории упругости, он не зависит от компонент тензора деформаций.

Таким образом, из (6) и (8) следует, что дифференциальное изменение работы $\delta \mathrm{A}(\mathbf{x},t)$, в общем случае записывается в виде

$$\delta \mathrm{A}(\mathbf{x},t) = \mathrm{V}\Big(-\int_{T_0}^{T} \alpha_{ij}(T')dT' + C_{ijkl}(T)u_{kl}(\mathbf{x},t)\Big)du_{ij}(\mathbf{x},t). \tag{10}$$

Сравнивая эту формулу с (2), получаем формулу (4).

Наконец, рассмотрим изменение внутренней энергии в области $\Lambda(\mathbf{x})$ при малом изменении времени dt . Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{\partial \mathrm{E}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \oint\!\!\oint_{\partial\Lambda(\mathbf{x})} (\mathbf{S}(\mathbf{y},t), d\mathbf{\Delta}(\mathbf{y},t)) = 0,$$

получаем

$$\frac{\partial \mathrm{E}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\int_{\Lambda(\mathbf{x})} (\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{y},t))d\mathbf{y} = -\mathrm{V}(\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{x},t)). \tag{11}$$

где интегрирование в первом интеграле производится по замкнутой поверхности -- границе области $\Lambda(\mathbf{x})$ с выбором ориентации элемента поверхности $d\mathbf{\Delta}(\mathbf{y},t)$ в направлении из $\Lambda(\mathbf{x})$, $\mathbf{S}(\mathbf{x},t)$ -- вектор плотности потока внутренней энергии в пространственно-временной точке $\langle \mathbf{x},t \rangle$.

Подставим в (1) выражения для теплоты $\delta \mathrm{Q}(\mathbf{x},t)$, выделяемой в области $\Lambda(\mathbf{x})$ и для малой работы $\delta \mathrm{A}(\mathbf{x},t)$, произведенной веществом, которое содержится в ней, при малых деформациях, которые вызваны изменением распределения температуры. Поделив на объем V области, запишем первое начало термодинамики в следующей форме:

$$T\frac{\partial \mathrm{S}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -(\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{x},t)) + \Big(\int_{T_0}^{T} \alpha_{ij}(T')dT' - C_{ijkl}(T)u_{kl}(\mathbf{x},t)\Big)\frac{\partial u_{ij}(\mathbf{x},t)}{\partial t}. \tag{12}$$

В предлагаемом подходе к описанию эволюции распределения температуры в среде мы столкнулись с необходимостью описания ее локального термодинамического состояния в окрестности точки $\mathbf{x}$ не только на основе значения температуры в этой точке, но и, дополнительно на основе значений тензора деформаций $u_{ij}(\mathbf{x},t)$ в этой точке. Тогда дифференциал плотности энтропии в каждой пространственно-временной точке дается следующей формулой

$$d\mathrm{S} = \Big(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial T}\Big)_{u_{ij}} dT + \Big(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial u_{ij}}\Big)_{T} du_{ij}. \tag{13}$$

Здесь частные производные, по определению (см. [3]), представляют собой

$$\Big(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial u_{ij}}\Big)_{T} = \alpha_{ij}(T), \qquad \Big(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial T}\Big)_{u_{ij}} = \frac{1}{T}\mathrm{c}_{\mathrm{v}}(T,u_{kl}), \tag{14}$$

где $\mathrm{c}_{\mathrm{v}}(T,u_{kl})$ -- теплоемкость среды при постоянном объеме, которая в общем случае является функцией температуры и деформаций среды. Зависимость теплоемкости от компонент тензора деформаций возникает вследствие зависимости тензора α_{ij} от температуры, в силу их определения (14), так как они определяют перекрестные вторые производные от энтропии по независимым интенсивным термодинамическим характеристикам среды

$$\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial T \partial u_{ij}} = \frac{\partial}{\partial T}\alpha_{ij}(T) = \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial u_{ij}}\mathrm{c}_{\mathrm{v}}(T,u_{kl}).$$

Наличие же зависимости тензора $\alpha_{ij}(T)$ от температуры T , при изменении ее в широком диапазоне, является экспериментальным фактом.

Формулы (13), (14) позволяют написать выражение для временной производной от энтропии,

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} = \frac{1}{T}\mathrm{c}_{\mathrm{v}}(T,u_{kl})\frac{\partial T}{\partial t} + \alpha_{ij}(T)\frac{\partial u_{ij}}{\partial t}. \tag{15}$$

Из (12) и (15), производя очевидное преобразование

$$\int_{T_0}^{T} \alpha_{ij}(T')dT' - T\alpha_{ij}(T) = -T_0\alpha_{ij}(T_0) - \int_{T_0}^{T} T'\Big(\frac{d}{dT'}\alpha_{ij}(T')\Big)dT',$$

получаем искомое уравнение теплопереноса с учетом деформаций среды,

$$c_V(T,u_{kl})\frac{\partial T}{\partial t} = -(\nabla,\mathbf{S}(\mathbf{x},t)) - \left(T_0\alpha_{ij}(T_0) + \int_{T_0}^{T} T'\left(\frac{d}{dT'}\alpha_{ij}(T')\right)dT' + C_{ijkl}(T)u_{kl}(\mathbf{x},t)\right)\frac{\partial u_{ij}(\mathbf{x},t)}{\partial t}. \quad (16)$$

Заметим, что это эволюционное уравнение относительно распределения температуры $T(\mathbf{x},t)$ не является уравнением дивергентного типа, так как тепловая энергия в среде не сохраняется.

Для описания временной эволюции среды уравнение теплопереноса в форме (12) должно быть дополнено уравнением, описывающим изменение поля смещений среды в окрестности каждой из пространственных точек.

Рассмотрим плотность потока $\mathbf{S}(\mathbf{x},t)$ энергии в правой части уравнения. Стандартный подход в теории теплопереноса, основан на предположении о малости градиентов распределения температуры $T(\mathbf{x},t)$. Это позволяет разложить плотность потока $\mathbf{S}(\mathbf{x},t)$, зависящую локальным образом от $T(\mathbf{x},t)$, по степеням этих градиентов и ограничиться только градиентами первого порядка

$$(\nabla,\mathbf{S}(\mathbf{x},t)) = -\left(щ_{ij}(T)\nabla_j T\right)(\mathbf{x},t). \quad (19)$$

При этом если не производить учета радиационного теплообмена, то $щ_{ij}(T)$ представляет собой тензор коэффициентов теплопроводности, а уравнение (18) является *уравнением теплопроводности*. Знак минус указывает на то, что при выборе направления векторного поля $\mathbf{S}(\mathbf{x},t)$ в сторону спадания градиента, симметричный тензор $щ_{ij}(T)$ теплопроводности положительно определен.

Список литературы
References

1. Зигель Р., Хауэлл Дж. 1975. Теплообмен излучением. М.: Мир: 934.

Siegel R., Howell J. 1975. Heat transfer by radiation. Moscow: Mir: 934.

2. Рубцов Н.А., 1984. Теплообмен излучением в сплошных средах. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 278.

Rubtsov N.A., 1984. Heat conduction by irradiation in complex media. Novosibirsk: Nauka, Sibirian department, 278.

3. Landau L.D., Lifshitz E.M. 1981. Theory of elasticity. V.7 of Course of Theoretical Physics. Institute of physical problems, USSR Academy of Sciences: 172.

4. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. 1987. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука: 352.

Maslov V. P., Danilov V. G., Volosov K. A.. 1987. Mathematical modeling of processes of heat and mass transfer. Moscow: Nauka: 352.