УДК 517.925.7

ОЦЕНКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦ

THE ESTIMATE OF MATRIX EIGENVALUES

А.С. Чурсанова
A.S. Chursanova

Воронежский государственный университет, Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл. 1
Voronezh State Universuty, 1 Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russia

E-mail: anastasyachursanova@gmail.com

Аннотация. С помощью теоремы о расщеплении получена оценка собственных значений матрицы при условии, что собственное значение невозмущенной матрицы сильно отделено от остальных. В основе исследований лежит метод подобных операторов. При исследовании спектральных свойств матрицы матрица представляется в виде суммы хорошо изученной матрицы и возмущения. Получены условия малости возмущения, при котором данная матрица является блочно-диагональной.

Resume. The estimates of matrix eigenvalues in case if eigenvalue of unperturbed matrix is strongly separated from others are obtained using a theorem on splitting. The investigation is based on the similar operator method. While investigation of matrix spectral properties matrix is represented as sum of a well-studied matrix and perturbation. Smallness conditions of perturbation for which this matrix is block-diagonal are obtained.

Ключевые слова: метод подобных операторов, спектр.
Key words: the similar operator method, spectrum.

Введение

Пусть имеется линейный оператор $\mathbb{A} \in L(\mathbb{C}^n)$, заданный матрицей $\mathfrak{A} = (a_{ij})$, внедиагональные элементы которой малы по сравнению с диагональными, и элемент $a_{11} \neq a_{ii}$, где $i = 2, \dots, n$. Представим оператор $\mathbb{A}$ в виде разности $A = A - B$ двух линейных операторов $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{L}(\mathbb{C}^n)$, заданных матрицами A и B соответственно:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор A будем называть *невозмущенным* оператором, оператор B – *возмущением* оператора A, а исходный оператор $\mathbb{A}$ – *возмущенным* линейным оператором.

Требуется получить оценку одного определенного собственного значения возмущенного оператора $\mathbb{A}$.

Разложим пространство $\mathbb{C}^n$ в прямую сумму $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, двух инвариантных относительно оператора A подпространств $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$, где $\mathcal{X}_1 = \mathbb{C}, \mathcal{X}_2 = \mathbb{C}^{n-1}$. Будем искать оценку одного собственного значения, поэтому пусть $\mathcal{X}_1 = \mathcal{L}(e_1)$, а $\mathcal{X}_2 = \mathcal{L}(e_2, \dots, e_n)$.

В соответствии с заданным разложением пространства $\mathbb{C}^n$ рассмотрим трансформаторы $\mathcal{J} : L(\mathbb{C}^n) \to L(\mathbb{C}^n)$ и $\Gamma : L(\mathbb{C}^n) \to L(\mathbb{C}^n)$ [1-2], такие что:

1. Для любого $X \in L(\mathbb{C}^n)$ матрица оператора $\mathcal{J}X$ имеет вид:

$$\mathcal{J}X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix};$$

2. Оператор ΓX определяется как решение уравнения

$$A\Gamma X - \Gamma X A = X - \mathcal{J}X, \forall X \in L(\mathbb{C}^n). \tag{1}$$

Можно показать, что матрица оператора ΓX имеет вид:

$$\Gamma X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x_{12}}{a_{11}-a_{22}} & \cdots & \frac{x_{1n}}{a_{11}-a_{nn}} \\ \frac{x_{21}}{a_{22}-a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_{n1}}{a_{22}-a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем искать такой оператор $X_0 \in L(\mathbb{C}^n)$, для которого выполнено равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X_0) = (I + \Gamma X_0)(A - \Gamma X_0). \quad (2)$$

Если $\| \Gamma X_0 \| \leq 1$, то оператор $I + \Gamma X_0$ обратим, и равенство (2) означает подобие операторов $A - B$ и $A - \mathcal{J}X_0$. Таким образом, задача оценки первого собственного значения возмущенного оператора $A - B$ сводится к задаче оценки первого собственного значения оператора $A - \mathcal{J}X_0$, которое равно $a_{11} - x_{11}^0$. Необходимо получить оценку элемента x_{11}^0 матрицы оператора X_0.

Основные результаты

Теорема 1. Пусть выполнено неравенство

$$\gamma \| B \| < \frac{1}{4},$$

где $\gamma = \frac{1}{\min_\Omega |a_{ii}-a_{jj}|}$, $\Omega = \{(i,j): i = 1 \text{ и } j = 2 \ldots n, \text{или } j = 1 \text{ и } i = 2 \ldots n\}$. Тогда нелинейное уравнение

$$X = B\Gamma X - \Gamma X \mathcal{J}(B\Gamma X) - \Gamma X \mathcal{J} B + B = \Phi(X), \quad (3)$$

рассматриваемое в алгебре $L(\mathbb{C}^n)$, имеет единственное решение X_0 в шаре с центром в нуле и радиусом $4 \| B \|$, на котором достигается равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X_0) = (I + \Gamma X_0)(A - \Gamma X_0).$$

Оператор X_0 можно найти методом простых итераций, если в качестве первого приближения взять $X = 0$.

Пусть P_1 и P_2 – проекторы [3], ассоциированные с указанным разложением пространства $\mathbb{C}^n$. Заметим, что для любого $X \in L(\mathbb{C}^n)$ выполнены следующие равенства:

1. $\mathcal{J}X = P_1XP_1 + P_2XP_2$;
2. $P_i(\Gamma X)P_j = \Gamma(P_iXP_j), i,j = 1,2$ и $P_i(\Gamma X)P_j = 0, i = 1,2$.

Через X_{ij} будем обозначать оператор $P_iXP_j, i,j = 1,2$. Тогда

$$X = (P_1 + P_2)X(P_1 + P_2) = X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22}, X \in L(\mathbb{C}^n).$$

Применим операторы P_1 и P_2 к обеим частям уравнения (3).

1. Вначале осуществим умножение на проектор P_1 слева и справа:

$$P_1XP_1 = P_1 B\Gamma X P_1 - P_1 \Gamma X \mathcal{J}(B\Gamma X)P_1 - P_1 \Gamma X \mathcal{J} B P_1 + P_1 B P_1;$$

$$X_{11} = (B_{11} + B_{12})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21}) - (\Gamma X_{11} + \Gamma X_{12})\mathcal{J}\big((B_{11} + B_{12})(\Gamma X_{11} + \Gamma X_{21})\big) - (\Gamma X_{11} + \Gamma X_{12})(\mathcal{J}B_{11} + \mathcal{J}B_{21}) + B_{11}.$$

Учитывая, что $\mathcal{J}X_{12} = \mathcal{J}X_{21} = 0$ и $\Gamma X_{11} = \Gamma X_{22} = 0$, получим

$$X_{11} = (B_{11} + B_{12})\Gamma X_{21} - \Gamma X_{12}\mathcal{J}\big((B_{11} + B_{12})\Gamma X_{21}\big) - \Gamma X_{12}\mathcal{J}B_{11} + B_{11};$$

$$X_{11} = B_{12}\Gamma X_{21} + B_{11}. \quad (4)$$

2. Применим справа проектор P_1, а слева P_2:

$$P_2XP_1 = P_2B\Gamma XP_1 - P_2\Gamma X\mathcal{J}(B\Gamma X)P_1 - P_2\Gamma X\mathcal{J}BP_1 + P_2BP_1;$$

$$X_{21} = (B_{11} + B_{22})\Gamma X_{21} - \Gamma X_{21}\mathcal{J}(B_{12}\Gamma X_{21}) - \Gamma X_{21}B_{11} + B_{21};$$

$$X_{21} = B_{22}\Gamma X_{21} - (\Gamma X_{21})B_{12}\Gamma X_{21} - (\Gamma X_{21})B_{11} + B_{21}. \quad (5)$$

Из равенства (4) ясно, что искомую оценку элемента x_{11}^0 оператора X_0, являющегося решением нелинейного уравнения (3), найдем, получив оценку $\| X_{11}^0 \|$, а для оценки $\| X_{11}^0 \|$ в свою очередь требуется оценка $\| X_{21}^0 \|$ и разрешимость уравнения (5).

Теорема 2. Пусть выполнено условие теоремы 1. Тогда нелинейное уравнение (5) имеет единственное решение X_{21}^0. Это решение можно найти методом простых итераций, если в качестве первого приближения взять $X_{21} = 0$. Имеют место следующие оценки:

$$\| X_{11}^0 \| \leq \frac{1 - \gamma b_{22} - q}{2\gamma}, \| X_{21}^0 \| \leq \frac{1 - \gamma b_{22} - q}{2\gamma^2 b_{12}},$$

где $q = ((\gamma b_{22} - 1)^2 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{1/2}$ и $\| B_{ij} \| = b_{ij}, i,j = 1,2$, и X_{11}^0 определяется из равенства

$$X_{11}^0 = B_{12}\Gamma X_{21}^0.$$

Непосредственно из теоремы 2 следует

Теорема 3. Пусть выполнено условие теоремы 1. Тогда возмущенный оператор $\mathbb{A}$, заданный матрицей $\mathfrak{A} = (a_{ij})$, имеет собственное значение λ_1^0, представимое в виде

$$\lambda_1^0 = a_{11} - x_{11}^0,$$

где число x_{11}^0 удовлетворяет оценке

$$|x_{11}^0| \le \frac{1-\gamma b_{22}-q}{2\gamma},$$

где $\gamma = \frac{1}{\min_{\Omega}|a_{ii}-a_{jj}|}, \Omega = \{(i,j): i = 1 \text{ и } j = 2 \dots n, \text{или } j = 1 \text{ и } i = 2 \dots n\}$.

$q = ((\gamma b_{22}-1)^2 - 4\gamma^2 b_{21} b_{12})^{1/2}, b_{ij} = \| B_{ij} \|, i,j = 1,2$.

Список литературы
References

1. Баскаков А.Г. Расщепление возмущенного дифференциального оператора с неограниченными операторными коэффициентами. // Фундаментальная и прикладная математика, 2002. Т. 8, № 1. С. 1-16.

Baskakov A.G. Splitting of perturbed differential operator with unlimited operator coefficients. // Fundamental and Applied Mathematics, 2002. V. 8, №1. P. 1-16.

2. Баскаков А.Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений. // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1986. Т. 50, № 3. С. 435-357.

Baskakov A. G. A theorem on splitting an operator, and some related questions in the analytic theory of perturbations. // Mathematics of the USSR-Izvestiya, 1987. V. 28, № 3. P. 421-444. (in Russian)

3. Баскаков А.Г. Лекции по алгебре. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2013, 159 с.

Baskakov A.G. Lectcii po algebre. Voronezh: Izdatelsko-poligraphicheskii centre VSU, 2013. 159 p. (in Russian)