УДК. 517.984

ОЦЕНКИ ГЕЛЬФАНДА-ШИЛОВА ДЛЯ ЭКСПОНЕНТЫ ОПЕРАТОРА КОНЕЧНОГО РАНГА

GELFAND-SHILOV EVALUATIONS FOR EXPONENT OF FINITE RANK OPERATORS

А.В. Авилов
A.V. Avilov

Воронежский государственный университет, Россия, 394000, г. Воронеж, ул. Университетская площадь, д.1

Voronezh State University, 1, Universitetskaya Square St, Voronezh, 394000, Russia

E-mail:wiplash96@gmail.com

Аннотация
Рассматриваются линейные непрерывные операторы конечного ранга, действующие в комплексном банаховом пространстве. Доказана теорема о том, что такой оператор аннулирует многочлен. Она позволяет использовать алгебраические методы для исследования свойств оператора. Получены оценки Гельфанда-Шилова для нормы экспоненты оператора конечного ранга. Доказательство основных утверждений не использует теорию компактных (вполне непрерывных) операторов.

Abstract
Linear continuous finite rank operators, which are defined in the complex banach space, are considered. Theorem, that such operators are annihilated by polynomial, is proved. It allows to use algebraical methods to study the properties of the operator. We get Gelfand-Shilov evaluations for exponent of finite rank operator norm. Proof of main statements do not use theory of compact (completely-continuous) operators.

Ключевые слова: Банахово пространство, банахова алгбера, оператор конечного ранга, спектр оператора, нильпотентный оператор.
Keywords: Banach space, banach algebra, finite rank operator, spectrum of operator, nilpotent operator.

Пусть X – комплексное бесконечномерное банахово пространство и End X – банахова алгебра линейных ограниченных операторов. Рассмотрим оператор конечного ранга $A \in \text{End } X$, т.е. $\dim \text{Im } A = N$, где Im A – образ оператора A.

Отметим следующие простые утверждения.

Лемма 1. Оператор A представим в виде

$$Ax = \xi_1(x)a_1 + \xi_2(x)a_2 + \dots + \xi_N(x)a_N, \quad (1)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_N$ – линейно независимые векторы из X, а $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N: X \to \mathbb{C}$ – линейно независимые непрерывные линейные функционалы из сопряжённого к X банахова пространства X^*.

Лемма 2. Ядро оператора Ker A – замкнутое подпространство из X, допускающее представление вида

$$KerA = \bigcap_{i=1}^{N} Ker\xi_i, \quad (2)$$

Далее, исходя из того, что Im A – инвариантное подпространство оператора A размерности $\dim \text{Im } A = N$, рассмотрим сужение $B = A \mid \text{Im } A$ оператора A на Im A. Из определения оператора конечного ранга следует

Лемма 3. Все ненулевые собственные значения оператора A лежат в спектре $\sigma(B)$ оператора $B = A \mid \operatorname{Im} A \in \operatorname{End}(\operatorname{Im} A)$. При этом, их число не превосходит $\dim \operatorname{Im} A = N$.

Для доказательства достаточно заметить, что если x_0 – собственный вектор оператора A, отвечающий ненулевому собственному значению λ_0, то из равенства $x_0 = \frac{1}{\lambda_0} A x_0$ следует, что $x_0 \in \operatorname{Im} A$.

Следовательно, множество $\sigma(A)$ представимо в виде:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \cup \{0\}, \tag{3}$$

где $\lambda_k \neq 0, k = 1, \dots, m, m \leq N$.

Такое представление спектра $\sigma(A)$ оператора A позволяет воспользоваться **общей теоремой** (см. [1, гл.VII]). Из представления (3) спектра оператора A следует существование разложения единицы:

$$I = P_0 + P_1 + \dots + P_m, \tag{4}$$

где I – тождественный оператор в X, а проекторы $P_k, 0 \leq k \leq m$, допускают представление вида

$$P_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda, 0 \leq k \leq m, \tag{5}$$

где γ_k – контур, окружающий одноточечное множество $\{\lambda_k\}$ (см. [2]).

Из сформулированных лемм следует

Теорема 1. Банахово пространство X есть прямая сумма $X = X_0 \oplus X_1 \oplus \dots \oplus X_m$ инвариантных подпространств $X_k = \operatorname{Im} P_k, 0 \leq k \leq m$. В свою очередь, $X_k \subset \operatorname{Im} A$, $k \neq 0$, $\dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} A_0 + \dim \operatorname{Im} A_1 + \dots + \dim \operatorname{Im} A_m$ и $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, где $A_k = A \mid X_k, 0 \leq k \leq m$. Кроме того, $\sigma(A_0) = \{0\}$, а $\sigma(A_k) = \{\lambda_k\}, 1 \leq k \leq m$.

Теперь отдельно рассмотрим оператор $A_0: X \to X$ со спектром $\sigma(A_0) = \{0\}$. Также рассмотрим две последовательные цепочки включений

$$\{0\} \subset \operatorname{Ker} A_0 \subset \operatorname{Ker} A_0^2 \subset \dots \subset \operatorname{Ker} A_0^d \subset \operatorname{Ker} A_0^{d+1} \subset \dots \tag{6}$$

$$\operatorname{Im} A \supset \operatorname{Im} A_0^2 \supset \dots \supset \operatorname{Im} A_0^k \supset \operatorname{Im} A_0^{k+1} \supset \dots \tag{7}$$

Лемма 4. В цепочке включений (7), при некотором $s \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} A_0^s = \{0\}$, причём, $\operatorname{Im} A_0^{s-1} \neq \{0\}$.

Доказательство.

Пусть $s \in \mathbb{N}$ такое, что $\operatorname{Im} A_0^{s-1} \supset \operatorname{Im} A_0^s = \operatorname{Im} A_0^{s+1}$. Поскольку оператор A_0 – оператор конечного ранга, сужение $A_0 | \operatorname{Im} A_0^s : \operatorname{Im} A_0^s : \to \operatorname{Im} A_0^s$ является сюръективным оператором и, следовательно, обратимым. Но так как $\sigma(A_0 | \operatorname{Im} A_0^s) = \{0\}$, то $\operatorname{Im} A_0^s = \{0\}$.

Лемма доказана.

Осталось показать, что равенство ядер степеней оператора A_0 также будет начинаться с числа s, т.е. $\operatorname{Ker} A_0^{s-1} \subset \operatorname{Ker} A_0^s = \operatorname{Ker} A_0^{s+1}$. Включение $\operatorname{Ker} A_0^s \subset \operatorname{Ker} A_0^{s+1}$ очевидно. Покажем теперь, что $\operatorname{Ker} A_0^s \supset \operatorname{Ker} A_0^{s+1}$. Для любого $x \in \operatorname{Ker} A_0^{s+1}$ получаем, что $A_0^{s+1} x = 0$. Но в силу того, что $\operatorname{Im} A_0^s = \{0\}$, уже для A_0^s имеем $A_0^s x = 0$, и, значит, $x \in \operatorname{Ker} A_0^s$. Равенство $\operatorname{Ker} A_0^s = \operatorname{Ker} A_0^{s+1}$ доказано. Аналогично можно показать, что $\operatorname{Ker} A_0^s = \operatorname{Ker} A_0^{s+l}$ для любого $l \in \mathbb{N}$.

Цепочка включений (6) теперь записывается в виде

$$\{0\} \subset \operatorname{Ker} A_0 \subset \operatorname{Ker} A_0^2 \subset \dots \subset \operatorname{Ker} A_0^s = \operatorname{Ker} A_0^{s+1} = \dots = X_0. \tag{8}$$

Полученные результаты приводят нас к следующим утверждениям

Лемма 5. Оператор A_0 является нильпотентным с индексом нильпотентности $s = s(A_0)$, а характеристический многочлен оператора A_0 совпадает с его минимальным аннулирующим многочленом и имеет вид $p_0(\lambda) = \lambda^{s(A_0)}$.

Теорема 2. Характеристический многочлен оператора A будет представлять собой произведение характеристических многочленов операторов, входящих в его спектральное разложение, т. е. $p(\lambda) = \lambda^{s(A_0)} \cdot p_1(\lambda) \cdot \ldots \cdot p_m(\lambda)$, где $p_k(\lambda)$ – характеристический многочлен оператора A_k.

Теорема 3. Минимальный аннулирующий многочлен оператора A будет представлять собой произведение минимальных аннулирующих многочленов операторов, входящих в его спектральное разложение, т. е. $p_{min}(\lambda) = \lambda^{s(A_0)} \cdot \widetilde{p_1}(\lambda) \cdot \ldots \cdot \widetilde{p_m}(\lambda)$, где $\widetilde{p_k}(\lambda)$ – минимальный аннулирующий многочлен оператора A_k.

Данные утверждения позволяют получить оценки Гельфанда-Шилова (см.[3]) для нормы операторной экспоненты оператора конечного ранга. Следуя методу доказательства оценки из монографии [4], получаем, что имеет место

Теорема 4. Для оператора конечного ранга имеет место следующая оценка нормы операторной экспоненты

$$||e^{At}|| = e^{\nu t} \sum_{k=0}^{m+s-1} \frac{1}{k!}\left(2t||A||\right)^k, \tag{9}$$

где $t \geq 0, \nu = \max\{\mathrm{Re}\lambda | \lambda \in \sigma(A)\}$.

Список литературы
References

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. 1962. Линейные операторы. Т. I. Общая теория, ИЛ, М., 896.

Danford N., Shwartz J. T. 1958. Linear operators Part I: General theory, Interscience Publishers. 896.

2. Баскаков А.Г. 1987. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж.: Издательство Воронежского университета. 164.

Baskakov A.G. 1987. Harmonicheskii analiz lineinih operatorov [Harmonic analysis of linear operators]. Voronezh: Voronezh State University Publishing House, 164. (in Russian)

3. Гельфанд И., Шилов Е. 1958. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений (Обобщенные функции, выпуск 3). М.: Физматлит, 274.

Gelfand I.M., Shilov G. E. 1958. Nekotorie voprosi teorii differencialnih uravnenii (Obobshennie funkcii, vipusk 3) [Generalized Functions, Volume 3: Theory of Differential Equations]. Moscow, Fizmailit. 274 pp.

4. Далецкий Ю., Крейн М. 1970. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Издательство Наука, М., 534.

Daletskii Y., Krein M. 1970. Ustoichivost reshenii differentsialnyh uravnenii v banahovom prostranstve [Stability of solutions of differential equations in a Banach space]. Moscow, Hauka, 534. (in Russian)