УДК 517.955

РАЗРЕШИМОСТЬ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

THE SOLVABILITY OF PARABOLIC FUNCTIONAL DIFFIRENTIAL EQUATION IN BANACH SPACES

А.М. Селицкий
A.M. Selitskii

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН ФИЦ «Информатика и управление» РАН, 119333, г. Москва, ул. Вавилова д. 40

Dorodnicyn Computing Center of RAS of Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS, 40 Vavilova St, 119333, Moscow, Russia

E-mail: selitsky@mail.ru

Аннотация
Рассматривается разрешимость параболического функционально-дифференциального уравнения в пространстве $C\big(0,T;H_p^s(Q)\big)$ с s и p близкими к 1 и 2 соответственно.

Abstract
In this paper, a parabolic functional differential equation is considered in the spaces $C\big(0,T;H_p^s(Q)\big)$ with s and p close to 1 and 2 respectively.

Ключевые слова: функционально-дифференциально уравнения, банаховы пространства.
Keywords: functional-differential equations, Banach spaces.

1. Введение

Параболические функционально-дифференциальные уравнения возникают при описании нелинейных оптических систем с преобразованиями поля в двумерной обратной связи (см., например, [1]). Возникающие в таких системах устойчивые световые явления могут быть использованы в оптических методах обработки и хранения информации. С точки зрения приложений в нелинейной оптике представляет интерес изучение бифуркации периодических решений указанного уравнения. Результаты такого рода были получены в работах [2]–[4].

Разрешимость сильно эллиптических систем в банаховых пространствах рассматривалась в работе [5], в статье [6] была исследована разрешимость параболических функционально-дифференциальных уравнений в пространствах $C\big(0,T;H_p^s(Q)\big)$ при $s=1$ и p близких к 2. В настоящей работе получено обобщение на случай s близких к 1.

2. Основные определения и постановка задачи

Пусть Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей ∂Q. Пусть A_{ij}, B_i, C – ограниченные операторы в $L_2(Q)$, $i,j=1,2,\dots,n$.

Рассмотрим параболическое функционально-дифференциальное уравнение

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij} u_{x_j}\right)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Cu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = Q \times (0,T), \tag{1}$$

с краевым условием

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_{x_j} \cos(\nu, x_i) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_T = \partial Q \times (0,T), \tag{2}$$

и начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in Q, \tag{3}$$

где $0 < T < \infty$, ν – единичный вектор внешней нормали к Γ_T, $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$.

Рассмотрим полуторалинейную форму в $L_2(Q)$ с областью определения $H^1(Q)$:

$$\Phi(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij} v_{x_j}, w_{x_i}\right)_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n} \left(B_i v_{x_i}, w\right)_{L_2(Q)} + (Cv, w)_{L_2(Q)}. \tag{4}$$

Существует $c_0 > 0$, такое что

$$\Re e\ \Phi(v,w) \le c_0 \|v\|_{H^1(Q)} \|w\|_{H^1(Q)}, \ v, w \in H^1(Q). \tag{5}$$

Так как форма $\Phi(v,w)$ непрерывна по w, то она определяет ограниченный оператор $A: H^1(Q) \to \widetilde{H}^{-1}(Q) = (H^1(Q))'$, действующий по формуле

$$\langle Av, \overline{w} \rangle = \Phi(v,w), \qquad v, w \in H^1(Q). \tag{6}$$

Здесь скобки двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ понимаются в смысле продолжения скалярного произведения в $L_2(Q)$, поэтому в дальнейшем мы будем использовать соглашение $(Av, w) = (Av, w)_{L_2(Q)} = \langle Av, \overline{w} \rangle$.

Определение 1. *Оператор A называется сильно эллиптическим, а форма $\Phi(v,w)$ коэрцитивной, если существуют числа $c_1 > 0$ и $c_2 \ge 0$ такие, что*

$$\Re e(Av, v) = \Re e\ \Phi(v,v) \ge c_1 \|v\|^2_{H^1(Q)} - c_2 \|v\|^2_{L_2(Q)}, \qquad v \in H^1(Q). \tag{7}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что оператор A сильно эллиптический. Также мы будем предполагать, что форма сильно коэрцитивна, то есть в неравенстве (7) c_2=0. В противном случае положим $u = ze^{c_2 t}$, что приведет к рассмотрению оператора A+$c_2 I$ вместо A.

Введем гильбертово пространство

$$W(A) = \left\{ w \in L_p([0,T]; H^1(Q)) : \ w_t \in L_p\left([0,T]; \ \widetilde{H}^{-1}(Q)\right) \right\}, \qquad 1 < p < \infty. \tag{8}$$

Определение 2. *Функция $u \in W(A)$ называется обобщенным решением задачи (1)–(3), если при почти всех t она удовлетворяет уравнению*

$$\frac{du}{dt} + Au = f \tag{9}$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi. \tag{10}$$

Для формулировки основных результатов нам понадобятся определение пространств Бесова и обобщенных пространств Соболева, так называемых пространств бесселевых потенциалов.

Рассмотрим оператор, действующий в пространстве S' Шварца обобщенных функций

$$\Lambda^s = F^{-1}(1 + |\xi|^2)^{s/2} F, \qquad s \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

где F – преобразование Фурье в смысле обобщенных функций.

Пространство $H_p^s(\mathbb{R}^n)$, называемое пространством Лиувилля или обобщенным пространством Соболева, определяется при всех вещественных s и $1 < p < \infty$ как пространство обобщенных функций из S' с конечной нормой

$$\|u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} = \|\Lambda^s u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{12}$$

Модулем гладкости второго порядка функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ называется функция $\omega_p^2(f,t) = \sup_{|h|<t} \|f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$. Пусть $1 \le p, \theta < \infty$, $s > 0$ и $s = r + \alpha$, где $0 < \alpha \le 1$. Функция $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству Бесова $B_{p,\theta}^s(\mathbb{R}^n)$, если она имеет обобщенные производные вплоть до порядка r и

$$\|f\|_{B^s_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{H^r_p(\mathbb{R}^n)} + \left(\int_0^\infty \left|\frac{\omega_p^2(f^{(r)},t)}{t^\alpha}\right|^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} < \infty. \qquad (13)$$

Пространства $H^s_p(Q)$ и $B^s_{p,\theta}(Q)$ определяются как сужения пространств $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ и $B^s_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ на Q с -нормой (см. п. 14.5 в [7] и п. 4.2.1 в [8] соответственно). Положим $B^0_{p,p}(Q) = L_p(Q)$. Обозначим через $\widetilde{H}^{-s}_q(Q)$ и $\widetilde{B}^{-s}_{q,\eta}(Q)$ пространства сопряженные пространствам $H^s_p(Q)$ и $B^s_{p,\theta}(Q)$ соответственно, здесь $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и $\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\eta}=1$.

В [6] была доказана следующая теорема о разрешимости.

Теорема 1. *Задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение $u \in W(A)$ для любых $f \in L_p\left([0,T];\ \widetilde{H}^{-1}(Q)\right)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in B^{1-\frac{2}{p}}_{2,p}(Q)$ при $2 \le p < \infty$ и $\varphi \in \widetilde{B}^{1-\frac{2}{p}}_{2,p}(Q)$ при $1 < p < 2$, которое определяется по формуле*

$$u(x,t) = T_t\varphi(x) + \int_0^t T_{t-s} f(x,s)ds,$$

где T_t $(t \ge 0)$ — аналитическая полугруппа с генератором (-A).

Замечание 1. *При $p = 2$ определение 1 обобщенного решения эквивалентно определению в смысле интегрального тождества.*

Замечание 2. *Граничное условие (2) не определено, вообще говоря, для функций из $W(A)$. Если его записать в виде $T^+u = 0$, то значение оператора T^+ на функции $u \in W(A)$ может быть определено из формулы Грина:*

$$\langle f(\cdot,t),\overline{w}\rangle = \langle u_t,\overline{w}\rangle - \langle T^+u,\overline{w}|_{\partial Q}\rangle_\Gamma + \langle Au(\cdot,t),\overline{w}\rangle, \qquad w \in H^1(Q), \qquad (12)$$

Которое при $p = 2$ и кусочно гладкой границе совпадает с (2).

3. Обобщение на случай банаховых пространств

Предположим теперь, что $u \in H^{s-1/2+1/p}_p(Q)$ и $v \in H^{-s-1/2+1/q}_q(Q)$, $\left|s+\frac{1}{p}-\frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$, а операторы A_{ij}, B_i, C являются ограниченными в $L_p(Q)$. Тогда существует $c_3 > 0$, такое что

$$\Phi(u,v) \le c_3\|u\|_{H^{s-1/2+1/p}_p(Q)}\|v\|_{H^{-s-1/2+1/q}_q(Q)}. \qquad (13)$$

Таким образом, для каждого u форма $\Phi(u,v)$ определяет ограниченный линейный функционал f_u, который мы обозначим через $A_{p,s}u$. Оператор $A_{p,s} : H^{s-1/2+1/p}_p(Q) \to \widetilde{H}^{s+1/2-1/q}_p(Q)$ является ограниченным:

$$\left\|A_{p,s}u\right\|_{\widetilde{H}^{s+1/2-1/q}_p(Q)} \le \sup_{v\neq 0}\frac{|\Phi(u,v)|}{\|v\|_{H^{-s-1/2+1/q}_q(Q)}} \le c_3\|u\|_{H^{s-1/2+1/p}_p(Q)}. \qquad (14)$$

Рассмотрим обобщение задачи (1) – (3):

$$\frac{du}{dt} + A_{p,s}u = f \qquad (15)$$

$$u|_{t=0} = \varphi. \qquad (16)$$

Определение 3. *Функция $u \in C\left([0,T); H^{s-1/2+1/p}_p(Q)\right) \cap C^1\left((0,T); H^{s-1/2+1/p}_p(Q)\right)$ называется классическим решением (16)–(17), если $u(t,\cdot) \in H^{s-1/2+1/p}_p(Q)$ при $0 < t < T$ и удовлетворяет равенствам (16) и (17) на $[0,T)$.*

Теорема 2. *Пусть $f \in L_1\left(0,T; \widetilde{H}^{s+1/2-1/q}_p(Q)\right)$ удовлетворяет условию Липшица на $[0,T]$ и $\varphi \in \widetilde{H}^{s+1/2-1/q}_q(Q)$. Тогда найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что задача (15)-(16) имеет единственное классическое решение при $|s-1| < \varepsilon$ и $\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right| < \delta$, которое определяется по формуле*

$$u(x,t) = T_t\varphi(x) + \int_0^t T_{t-s} f(x,s)ds, \qquad (17)$$

где T_t $(t \ge 0)$ — аналитическая полугруппа с генератором $(-A_{p,s})$.

Доказательство. Заметим, что пространства $H_p^s(Q)$ образуют интерполяционную шкалу: $\left[H_p^{s_1}(Q), H_q^{s_2}(Q)\right]_\theta = H_r^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(Q)$, где $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$. Как было показано выше, оператор $A_{p,s}$ ограничен при $\left|s + \frac{1}{p} - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}$, а при $p = 2, s = 1$ $A_{2,1} = A$ – обратим. Применяя теорему Шнейберга об экстраполяции обратимости (см., например, теорему 13.7.2 в [7]), получаем существование $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$, таких что $A_{p,s}$ обратим при $|s-1| < \varepsilon$ и $\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| < \delta$.

Для завершения доказательства требуется получить оценку резольвенты

$$\|u\|_{H_p^{s-1/2+1/p}} + |\lambda|\|u\|_{\widetilde{H}_p^{s+1/2-1/q}(Q)} \leq c_4\|f\|_{\widetilde{H}_p^{s+1/2-1/q}(Q)}, \tag{18}$$

где $f = (A_{p,s} - \lambda I)u$, c_4 не зависит от f и $\lambda \in \left\{\mu \in \mathbb{C} : |\arg\mu| > \frac{\pi}{2} - \delta_1\right\} \cup B_{\varepsilon_1}(0)$ при некоторых $\delta_1 > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$. Ее достаточно объемное доказательство по сути аналогично доказательству оценки (1.20) в работе [5]. ■

Автор благодарен М.С. Аграновичу за обсуждение работы [5]. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 17-01-00401).

Список литературы
References

1. Воронцов М.А., Думаревский Ю.Д., Пруидзе Д.В., Шмальгаузен В.И. 1988. Автоволновые процессы в системах с оптической обратной связью. Изв. АН СССР. Физика, 52(2): 374-376.

Voroncov M.A., Dumarevskii Yu.D., Pruidze D.V. Shmalgauzen V.I. 1988. Avtovolnovie processi v sistemah s opticheskoi obratnoi svyazyu. Izv. AN SSSR. Fizika, 52(2): 374-376.

2. Разгулин А.В. 1993. Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом. Журнал вычислительной математики и математической физики, 33(1): 69-80.

Razgulin A.V. 1993. Ob avtokolebaniyah v nelineinoi parabolicheskoi zadache s preobrazovannim argumentom. Jurnal vichislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki, 33(1): 69-80.

3. Скубачевский А.Л. 1996. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений. Успехи мат. наук,.51, №1(307): 169-170.

Skubachevskii A.L. 1996. O nekotorih svoistvah ellipticheskih i parabolicheskih funkcionalno-differencialnih uravnenii. Uspehi mat. Nauk., 51, №1(307): 169-170.

4. Варфоломеев Е.М. 2008. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике. Современная математика. Фундаментальные направления, 21: 5-36.

Varfolomeev E.M. 2008. O nekotorih svoistvah ellipticheskih i parabolicheskih funkcionalno_differencialnih operatorov, voznikayuschih v nelineinoi optike. Sovremennaya matematika. Fundamentalnie napravleniya, 21: 5-36.

5. Agranovich M.S. 2016. Spectral problems in Sobolev-type spaces for strongly elliptic systems in Lipschitz domains. Math. Nachr., 289(16): 1968–1988.

6. Selitskii A.M. 2016. On the solvability of parabolic functional differential equations in Banach spaces. Eurasian Math. J., 7(4): 85–91.

7. Агранович М.С. 2013. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М.: МЦНМО.

Agranovich M.S. 2013. Sobolevskie prostranstva_ ih obobscheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyah s gladkoi i lipshicevoi granicei. M.: MCNMO.

8. Трибель Х. 1980. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: МИР.

Tribel H. 1980. Teoriya interpolyacii, funkcionalnie prostranstva, differencialnie operatori. M.: MIR