УДК 539.3:534.1

ФЛАТТЕР ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ЧАСТЬ ПОВЕРХНОСТИ ТОНКОГО КЛИНА

FLUTTER OF RECTANGULAR PLATE WITH VARIABLE THINCNESS, AS A PART OF THIN WEDGE SURFACE

Б.Ю. Кудрявцев
B.U. Kudryavtsev

Московский политехнический университет, Россия, Москва, 107023, ул. Б. Семеновская, 38

Moscow Polytechnic University, 38 B.Semenovskaya st., Moscow, 107023, Russia

E-mail: abit7@yandex.ru

Аннотация
В линейной постановке исследована задача об устойчивости в сверхзвуковом потоке газа пластины переменной толщины, составляющей часть поверхности тонкого клина. Пластина имеет шарнирное опирание по краям, вектор скорости потока направлен по оси клина. С применением метода Бубнова-Галеркина найдена критическая скорость при различных значениях параметров (соотношениях длин сторон пластины, способах распределения толщины и т.д.). Проведено сравнение результатов, полученных с использованием основного и некоторых упрощенных уравнений колебаний пластины.

Abstract
The article reveals stability of a plate with variable thickness, placed in the supersonic gas flow, and analyzed with application of linear case definition. The plate is a part of the thin wedge surface with hinged edges. Gas flow velocity vector directs along the wedge. Critical velocity of the flow at different parameters of the plate (different aspect ratio of the plate, different methods of plate thickness distributions etc.) was obtained with application of Bubnov-Galerkin method. There was undertaken a comparison of the results, obtained by the use of the main and some simplified equations of plate oscillations.

Ключевые слова*:* флаттер, сверхзвуковой поток газа, пластина переменной толщины, устойчивость.
Keywords*:* flutter, supersonic gas flow, plate of variable thickness, stability.

Введение

Достаточно большое число статей по панельному флаттеру объясняется разнообразием краевых условий и механических свойств пластин, вариантами постановки задачи и т. д. [1-4]. Однако работ, где исследовалась бы пластина переменной толщины относительно немного, и применяется там, в основном, линейная поршневая теория [5-7]. В данной статье содержится решение задачи линейного флаттера пластины, составляющей часть поверхности клина. При этом она имеет конечные размеры и переменную толщину.

Основные результаты

Пусть имеется пластина, которая находится на поверхности тонкого клина и в плоскости OXY занимает область $G=\{(x,y), x_0 \le x \le x_0+s, 0 \le y \le 1\}$. Кромки пластины шарнирно оперты. Вектор скорости потока направлен по оси клина. Следуя [1,6], запишем линейное уравнение колебаний в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(h_1^3(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}))+2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(h_1^3\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(h_1^3(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}))+A_2x(M^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+$$
$$2\frac{M}{c_0}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+\frac{1}{c_0}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2})+A_1M^2\frac{\partial w}{\partial x}+A_0M\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\cdot h_1=0$$

с соответствующими граничными условиями

$$w\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=x_0} = w\,\Big|_{x=x_0+s} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=x_0+s} = 0\,,$$

$$w\,\Big|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = w\,\Big|_{y=1} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=1} = 0\,.$$

Здесь

$$A_0 = \frac{8k\sqrt{3(1-\nu^2)}\,pl^2}{(k+1)c_0 h_0^{\,2}\sqrt{E\rho}}\,tg\beta(1+2\eta-\eta a^*(tg\beta)),$$

$$A_1 = \frac{48k(1-\nu^2)\,pl^3}{Eh_0^{\,3}(k+1)}\,tg\beta(1+2\eta-\eta a^*(tg\beta)),$$

$$A_2 = \frac{12k(1-\nu^2)\,pl^3}{Eh_0^{\,3}}\,tg(\beta)(1-\eta\,\frac{12a^*(tg\beta)}{k(1+k)}),$$

$$a^* = 1+2/((k-1)M^2tg^2\beta),\ \ \eta = \frac{k-1}{k+1},$$

w – прогибы пластины, $h = h_0 \cdot h_1(x,y)$ и l – ее толщина и ширина, ρ – плотность материала, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, κ – показатель политропы, M – число Маха, p и c_0 – давление и скорость звука в невозмущенном потоке, α – угол полураствора клина, наклон ударной волны β определяется из уравнения

$$tg\beta = tg\alpha + \eta a(tg\beta)tg\beta\,.$$

Решения уравнения колебаний представим в виде

$$w = \exp(\omega t)\sin\pi y(c_1\sin\frac{\pi(x-x_0)}{s} + c_2\sin\frac{2\pi(x-x_0)}{s}), c_1, c_2 \in R, \omega \in C\,.$$

Используя метод Бубнова-Галеркина, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными. Приравняв ее определитель к нулю, найдем критическую скорость потока $M_{кр}$ как наименьшее значение *M*, при котором комплексная частота ω переходит в правую полуплоскость.

В качестве примера рассмотрим металлическую пластину, находящуюся в потоке воздуха, при следующих значениях параметров:

$$h_0 = 0{,}001\,м, p = 10^5\,Па, \kappa = 1{,}4, c_0 = 330\,м/с, \alpha = 10^\circ.$$

Возьмем $h_1(x,y) = 1+\varepsilon f(y)$, а функцию *f* зададим в виде: $f(y) = \cos(2\pi y)$. При таком выборе площадь сечения пластины плоскостью $x = const$ останется постоянной при любом ε.

В таблице 1 представлены значения критической скорости для алюминиевой пластины ($E = 6{,}7\cdot 10^{10}\,Па, \rho = 2{,}7\cdot 10^3\,кг/м^3, \nu = 0{,}36, x_0 = 1$) при различных соотношениях длин сторон и вариантах распределения толщины. В таблицах 2 и 3 содержатся аналогичные результаты для стальной пластины ($E = 2\cdot 10^{11}\,Па, \rho = 8\cdot 10^3\,кг/м^3, \nu = 0{,}3$) для $x_0 = 1$ и $x_0 = 0$ соответственно.

Таблица 1
Table 1

Значения критической скорости для алюминиевой пластины
The values of the critical velocity for aluminum plate

	l=0,375,s=2/3	*l=0,25,s=1*	*l=0,25,s=1,5*
ε =0,4	8,47	8,53	7,85
ε =0	8,43	8,46	7,74
ε =-0,4	8,48	8,50	7,70

Таблица 2
Table 2

Значения критической скорости для стальной пластины
The critical speed for the steel plate

	l=0,375,s=2/3	*l=0,25,s=1*	*l=0,25,s=1,5*	*l=0,25,s=2*
ε =0,4	8,44	8,62	7,61	7,02
ε =0	8,50	8,69	7,54	6,90
ε =-0,4	8,78	8,83	7,65	6,93

Таблица 3
Table 3

Значения критической скорости для стальной пластины
The critical speed for the steel plate

	l=0,375,s=2/3	*l=0,25,s=1*	*l=0,25,s=1,5*
ε =0,4	3,95	4,37	3,64
ε =0	4,14	4,33	3,58
ε =-0,4	4,75	4,85	3,84

Из таблиц видно, что поведение критической скорости для пластины конечных размеров оказалось неоднозначным и существенно зависящим от многих параметров задачи. Для стальной удлиненной поперек потока пластины утолщение к середине повышает значения критической скорости, а концентрация материала ближе к кромкам наоборот способствует снижению динамической устойчивости. В случае квадратной или вытянутой вдоль направления потока пластины минимальная стабилизация достигается при постоянной толщине. Для алюминиевой пластины характер зависимости критической скорости от удлинения меняется на противоположный. Этот эффект, вероятно, связан со значением коэффициента Пуассона ν , и принципиальным образом зависит от того, $\nu < 1/3$ или нет. Подобное влияние этого параметра уже было отмечено в [6].

Представляет интерес оценка влияния двух последних слагаемых в скобке при коэффициенте A_2 в уравнении колебаний. Отбросив их, найдем значения $M_{кр}$ в условиях таблицы 2 и составим таблицу 4.

Таблица 4
Table 4

Значения критической скорости для стальной пластины
The critical speed for the steel plate

	l=0,375,s=2/3	*l=0,25,s=1*	*l=0,25,s=1,5*	*l=0,25,s=2*
ε =0.4	9.98	10.01	9.56	9.21
ε =0	10.00	10.01	9.56	9.19
ε =-0.4	10.04	10.05	9.57	9.20

Основные зависимости остались теми же, хотя и менее выраженными. Но величина критической скорости оказалась заметно завышенной, разница достигала порядка 20 процентов ([8]).

Рассмотрим случай, когда ε достаточно мало. Тогда с точностью до бесконечно малых высшего порядка уравнение колебаний можно представить в упрощенном виде (дополнительные слагаемые тоже отсутствуют):

$$(1+3\varepsilon\cdot f(y))(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4})+6\varepsilon\cdot f'(y)(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y})+3\varepsilon\cdot f''(y)(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})+$$

$$+A_2M^2x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+A_1M^2\frac{\partial w}{\partial x}+A_0M\frac{\partial w}{\partial t}+(1+\varepsilon\cdot f(y))\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0.$$

Будем находить критическую скорость, проводя вышеописанную процедуру. В таблице 5 приведены результаты вычислений при тех же параметрах, что и в таблице 2.

При сравнении полученных таблиц (а также [8]), можно заметить, что линеаризация уравнения колебаний по ε оказывает ощутимое разнонаправленное влияние на результаты.

Таблица 5
Table 5

Значения критической скорости для стальной пластины
The critical speed for the steel plate

	l=0,25,s=1	l=0,25,s=1,5
ε =0.4	8.30	7.66
ε =0	8.38	7.68
ε =-0.4	8.45	7.70

Список литературы
References

1. Алгазин С.Д., Кийко И.А. 2006. Флаттер пластин и оболочек.- М.: Наука, 2006. 248 с.
Algazin S.D., Kijko I.A. Flatter plastin i obolochek. Moscow: Nauka.
2. Лавит И.М. 2015. Краткий обзор работ И.А. Кийко по исследованию сверхзвукового панельного флаттера. Известия ТулГУ. Естественные науки. № 4: 153-157.
Lavit I.M. 2015. Kratkij obzor rabot I.A. Kijko po issledovaniju sverhzvukovogo panel'nogo flattera. Izvestija TulGU. Estestvennye nauki. № 4: 153-157.
3. Кийко И.А., Кудрявцев Б.Ю. 2011. Флаттер прямоугольной панели, составляющей часть поверхности тонкого клина. Вестн. МГУ. Сер. 1: Мат. Мех. 2011. № 2: 59-62.
Kijko I.A., Kudryavtsev B.U. 2011. Flatter prjamougol'noj paneli, sostavljajushhej chast' poverhnosti tonkogo klina. Vestnik MGU. Ser. 1: Mat. Mech. № 2, 59-62.
4. Кудрявцев Б.Ю. 2004. Нелинейные аэроупругие колебания пластины. Проблемы машиностроения и надежности машин. № 4: 16-19.
Kudryavtsev B.U. 2004. Nelinejnye ajerouprugie kolebanija plastiny. Problemy mashinostroenija i nadezhnosti mashin. № 4: 16-19.
5. Кадыров А.К., Кийко И.А. 2005. Флаттер упругой полосы переменной толщины. Изв. ТулГУ. Сер. Мат. Мех. Инф. Т.11. Вып.2.мех.,Тула: изд. ТулГУ: 46-52.
Kadyrov A.K., Kijko I.A. 2005. Flatter uprugoj polosy peremennoj tolshhiny. Izvestija TulGU. Ser. Mat. Mech. Inf. V.11. Iss.2. mech.: 46-52.
6.Кийко И.А., Кудрявцев Б.Ю. 1997. Флаттер упругой полосы переменной жесткости. Депонир. в ВИНИТИ: 1103-В97.
Kijko I.A., Kudryavtsev B.U. 1997. Flatter uprugoj polosy peremennoj zhestkosti. Deponir. v VINITI. 1997. № 1103, V97.
7. Кудрявцев Б.Ю. 2014. Задача оптимизации распределения толщины пластины в исследовании проблемы панельного флаттера. Известия МГТУ МАМИ. Т. 4. № 1(19): 77-82.
Kudryavtsev B.U. 2014. Zadacha optimizacii raspredelenija tolshhiny plastiny v issledovanii problemy panel'nogo flattera. Izvestija MGTU MAMI. V. 4. № 1(19): 77-82.
8. Кудрявцев Б.Ю. 2011. Задача о флаттере пластины переменной толщины в уточненной и дополненной постановке. Известия МГТУ МАМИ. № 1: 231-234.
Kudryavtsev B.U. 2011. Zadacha o flattere plastiny peremennoj tolshhiny v utochnennoj i dopolnennoj postanovke. Izvestija MGTU MAMI. № 1: 231-234.