УДК 512.54

ШИРИНА ВЕРБАЛЬНЫХ ПОДГРУПП ДЛЯ АНОМАЛЬНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

THE WIDTH OF VERBAL SUBGROUPS IN ANOMALOUS PRODUCTS

Д.З. Каган
D.Z. Kagan

Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II (МИИТ), Россия, 127994, г. Москва, ул Образцова, д 9, стр. 9

Moscow State University of Railway Engineering, 9 Obraztsov St, Moscow, 127994, Russia

E-mail: dmikagan@gmail.com

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы о ширине собственных вербальных подгрупп для аномальных произведений с бесконечной циклической группой. Получены результаты, продолжающие теоремы В.Г. Бардакова и И.В. Добрыниной о ширине вербальных подгрупп для свободных произведений с объединением и HNN-расширений. Ширина вербальной подгруппы V(G) равна наименьшему $m \in \mathrm{N} \bigcup \{+\infty\}$ такому, что всякий элемент подгруппы V(G) записывается в виде произведения не более чем m значений слов из V. Доказана бесконечность ширины всякой собственной вербальной подгруппы в аномальных произведениях бесконечной циклической группы и группы, для которой выполнена теорема о свободе при некоторых дополнительных условиях. Аналогичное утверждение доказано для аномальных произведений бесконечной циклической группы с группой, которая не является конечно порожденной.

Resume. In this paper questions of the width for proper verbal subgroups in anomalous products with the infinite cyclic group. The results continue to theorems of V.G. Bardakova and I.V. Dobrynin about the width of verbal subgroups in free products with amalgamation and HNN-extensions are obtained. The width of the verbal subgroups V(G) is equal to a least value of $m \in \mathrm{N} \bigcup \{+\infty\}$ such that every element of the subgroup V(G) is represented as the product of at most m values of words V. It is prove that width of any proper verbal subgroup in anomalous products of the infinite cyclic group and a group for which the theorem of freedom holds is infinite under certain additional conditions. A similar statement is proved for anomalous products of the infinite cyclic group and a group that is not finitely generated.

Ключевые слова: ширина вербальных подгрупп, аномальные произведения, HNN-расширения
Key words: width of verbal subgroup, anomalous products, HNN-extensions

Введение

Шириной [1] вербальной подгруппы V(G) относительно множества слов V называется наименьшее число $m \in \mathrm{N} \bigcup \{+\infty\}$такое, что любой элемент подгруппы V(G) записывается в виде произведения не более чем m значений слов из V.

Ширина вербальной подгруппы, в общем случае, зависит от множества слов V. Как правило, рассматривается конечное множество слов, так как для любой вербальной подгруппы V(G) можно подобрать такое бесконечное множество слов W, что V(G) = W(G), а ширина W(G) равна единице. Будем называть V собственным множеством слов, а V(G) — собственной вербальной подгруппой, если $V(F_2) \neq E$ и $V(F_2) \neq F_2$. Ширина несобственной вербальной подгруппы всегда будет конечна.

Исследованиями ширины вербальных подгрупп для различных типов групп занимались многие алгебраисты. Понятие "ширина" было введено Ю. И. Мерзляковым [2] в 1967 году. А. Х. Ремтулла [3] доказал, что ширина всякой собственной вербальной подгруппы v(G) будет бесконечна в свободном произведении неединичных групп G = A * B, за исключением $Z_2 * Z_2$

Результаты о ширине вербальных подгрупп для свободных произведений с объединенной подгруппой и HNN-расширений были получены в работах В.Г. Бардакова [4], И. В. Добрыниной [5, 6], В. А. Файзиева [7], В.Н. Безверхнего [6].

Заметим, что в некоторых работах изучалась ширина коммутантных вербальных подгрупп – подгрупп, порожденных словами из коммутанта.

Р. И. Григорчуком [8] установлены условия бесконечности собственной коммутантной вербальной подгруппы для свободных произведений с объединением и HNN–расширений. При этом используется техника построения на группах нетривиальных псевдохарактеров.

В работах автора решен вопрос об условиях бесконечности ширины собственных коммутантных вербальных подгрупп для групп с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром. Также найдены различные условия бесконечности ширины коммутантных вербальных подгрупп для некоторых аномальных произведений [9-10].

Подробный обзор результатов о ширине вербальных подгрупп приведен в [11].

В данной статье доказываются утверждения о ширине произвольных собственных вербальных подгрупп (не только коммутантных) для аномальных произведений определенных типов групп. Отметим следующее важное обстоятельство. Для доказательства бесконечности ширины коммутантных вербальных подгрупп часто используется метод построения на рассматриваемых группах специальных функций - нетривиальных псевдохарактеров. В общем случае для произвольных вербальных подгрупп этот метод неприменим. Из существования на группе G нетривиальных псевдохарактеров не следует бесконечность ширины вербальных подгрупп, порожденных не только коммутаторными словами. Например, с помощью псевдохарактеров невозможно доказать бесконечность ширины для вербальных подгрупп, порожденных степенями $V(X^S)$.

При доказательстве утверждений мы будем использовать условия бесконечности ширины вербальных подгрупп для свободных произведений с объединенной подгруппой и HNN-расширений. Поэтому приведем формулировки соответствующих теорем.

Теорема. (И.В. Добрынина, [5]) В свободных произведениях с объединением $A*_U B$, где $|A : U| \geq 2$, $|B : U| \geq 3$, ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна.

Теорема. (В.Г. Бардаков, [4]) Пусть в HNN-расширении $G =< G_0, t \mid tAt^{-1} = B >$ связанные подгруппы A и B отличны от базовой группы G_0. Тогда ширина всякой собственной вербальной подгруппы бесконечна.

Аномальные произведения

В данной статье доказываются утверждения о ширине произвольных собственных вербальных подгрупп (не только коммутантных) для аномальных произведений определенных типов групп. Отметим следующее важное обстоятельство. Для доказательства бесконечности ширины коммутантных вербальных подгрупп часто используется метод построения на рассматриваемых группах специальных функций - нетривиальных псевдохарактеров. В общем случае для произвольных вербальных подгрупп этот метод неприменим. Из существования на группе G нетривиальных псевдохарактеров не следует бесконечность ширины вербальных подгрупп, порожденных не только коммутаторными словами.

Понятие аномального произведения было введено С.Д. Бродским [12] в 1984 году. Пусть F = A * B — свободное произведение некоторых групп A и B. Пусть также $w = a_1b_1...a_lb_l$ — циклически несократимый элемент в группе F, при этом, элементы длины один не считаются циклически несократимыми по определению. Тогда, фактор-группа $G = F/ < w^F >$ группы F по нормальному замыканию элемента w называется аномальным произведением групп A и B с аномалией w и обозначается A_WB. Число l называется длиной аномалии.

Отметим, что в определении аномального произведения элемент w предполагается циклически несократимым, не лежащим в группах-множителях A или B. Поэтому мы всегда можем рассматривать циклически несократимую запись элемент w в произведении F = A * B: $w = a_1b_1...a_lb_l$, где первый слог и последний слоги принадлежат разным группам A и B и не равны 1.

Сформулируем также еще одно определение, которое будем использовать в дальнейшем.

Теорема о свободе выполнена для группы G, если выполняется следующее условие. Пусть $C = G*G*...*G/ << w >>$ — свободное произведение нескольких изоморфных копий группы G, на которое наложено одно дополнительное соотношение w, которое считается циклически несократимым. Тогда подгруппа группы C, порожденная всеми изоморфными копиями группы G, кроме одной, элементы которой входят в циклически несократимую запись w, является свободным произведением этих копий. В частности, любая из изоморфных копий естественным образом вложима в группу C, т.е. $w^C \bigcap G_i = 1$.

Согласно результатам Магнуса теорема о свободе выполнена для свободных групп. С.Д. Бродский в той же статье [12] доказал, что теорема о свободе выполнена для локально индикабельных групп.

При доказательстве теоремы, мы будем использовать некоторые обозначения, применявшиеся С.Д. Бродским в [12], а также в работе автора [9].

Основная теорема

Теорема 1. Пусть группа G является аномальным произведением групп A и B, G = AwB. Группа A — бесконечная циклическая, $A=<x>_\infty$, группа B – не равна нормальному замыканию никакого своего элемента, и для группы B выполнена теорема о свободе. Пусть сумма всех степеней элемента x, с которыми он входит в запись слова $w = x^{r1}b_1 \dots x^{rl}b_l$, равна нулю: $\sum_{k=1}^{l} k_i = 0$. Тогда ширина всякой собственной вербальной подгруппы V(G) группы G, определенной конечным множеством слов V, бесконечна относительно V.

Доказательство. Заметим, что при выполнении условий теоремы длина аномалии должна быть больше 1, l>1. Тогда аномалия w имеет вид $w = a_1 b_1$, при этом оба элемента a_1, b_1 не равны единице. В противном случае элемент w не является циклически несократимым и это противоречит определению аномального произведения. Если l=1, $w = a_1 b_1$, то группа G является свободным произведением с объединенной циклической подгруппой.

Обозначим нормальное замыкание подгруппы B в свободном произведении F=A*B через H. Поскольку произведение всех элементов группы A, входящих в запись w равна 1, элемент w принадлежит H.

Будем обозначать через B_i группу B, сопряженную порождающим бесконечной циклической группы x в i-ой степени, $B_i = x^i B x^{-i}$. Группа H является свободным произведением групп B_i, $H = \prod_{i \in \mathbf{Z}} {}^* B_i$.

Для произвольных целых чисел $p_1 \le p_2$ обозначим $H_{p_1, p_2} = \prod_{i=p_1}^{p_2} {}^* B_i$. Выберем теперь числа k и n, как минимальный и максимальный индексы, с которыми элементы из B_i, входят в циклически несократимую запись w.

Группа F = A*B является HNN-расширением базы $H_{k,n}$ с изоморфными подгруппами $H_{k,n-1}$ и $H_{k+1,n}$ и проходной буквой x.

$$F = HNN(x, H_{k,n} \mid xH_{k,n-1}x^{-1} = H_{k+1,n})$$

Группа $H_{k,n-1} = \prod_{i=k}^{n-1} {}^* B_i$ является свободным произведением групп B_i, *i=k,…,n-1*. Действительно, для группы B выполнена теорема о свободе, и элементы из группы B_n с максимальным индексом входят в несократимую запись аномалии w. Следовательно, $H_{k,n-1} \cap \langle w \rangle^{H_{k,n}} = 1$. Аналогично, вторая изоморфная подгруппа $H_{k+1,n}$ также является свободным произведением соответствующих групп B_i, *i=k+1,…,n* и $H_{k+1,n} \cap \langle w \rangle^{H_{k,n}} = 1$.

В той же статье С.Д. Бродского [12] приводится утверждение об HNN-расширениях. Если $R = HNN(t, S \mid tAt^{-1} = B)$, N – нормальный делитель группы S и N тривиально пересекается с подгруппами A и B, $N \cap A = 1, N \cap B = 1$, то $R / N^R = HNN(t, S/N \mid t(AN/N)t^{-1} = BN/N)$.

Отсюда применительно к рассматриваемой группе G = AwB следует

$$G = F / <w>^F = HNN(x, H_{k,n} / N \mid xH_{k,n-1}t^{-1} = H_{k+1,n}),$$

где N – нормальное замыкание w в группе $H_{k,n}$.

Согласно вышеприведенной теореме Бардакова о HNN-расширениях, ширина всякой собственной вербальной подгруппы относительно конечного множества слов будет бесконечной, если изоморфные подгруппы будут собственными в базе HNN-расширения. Таким образом, для того, чтобы в группе G ширина всякой собственной вербальной подгруппы была бесконечной, достаточно выполнение следующего условия: группы $H_{k,n-1}$ и $H_{k+1,n}$ должны быть собственными подгруппами в фактор-группе $H_{k,n}/N$. Докажем, что при выполнении условий теоремы обе изоморфные подгруппы $H_{k,n-1}$ и $H_{k+1,n}$ будут собственными в $H_{k,n}/N$.

Если группа $H_{k,n-1}$ не является собственной в $H_{k,n}/N$, любой элемент $h \in H_{k,n}$ представляется в виде $h = h_1 \cdot n$, где $h_1 \in H_{k,n-1}, n \in N$. Тогда произведение $hh_1 \in N$ для любых $h \in H_{k,n}$, $h_1 \in H_{k,n-1}$.

Каждый элемент группы $H_{k,n}$ представляется в виде несократимой записи в разложении $H_{k,n}=\prod_{i=k}^{n} {}^{*}B_i$. Для произвольного элемента $g\in H_{k,n}$ обозначим через $B^n(g)$ произведение всех элементов из B^n, входящих в несократимую запись g, сопряженное элементом x^{-n}. Таким образом, $B^n(g)=x^{-n}\cdot\left(\text{произведение всех элементов из } B^n \text{ в } g\right)\cdot x^n$, $B^n(g)$ будет элементом группы И, равным произведению всех b_i из несократимой записи элемента $g\in H_{k,n}$ с максимальным индексом n.

В несократимой записи произведения элементов $hh_1\in N$, где $h\in H_{k,n}$, $h_1\in H_{k,n-1}$ слоги из группы B^n могут входить лишь в запись h. Поэтому, $B^n(h\cdot h_1)=B^n(h)$.

Элемент $B^n(w)$ в соответствии с введенным обозначением равен произведению всех элементов из B^n (всех элементов b_i с максимальным индексом n), входящих в запись элемента w в разложении $H_{k,n}=\prod_{i=k}^{n} {}^{*}B_i$. По условию теорема группа B не является нормальным замыканием одного своего элемента. В частности, $B\neq(B^n(w))^B$. Для любого элемента $n\in N$ выполняется $B^n(n)\in\left(B^n(w)\right)^B$.

Следовательно, существует элемент b группы B, не принадлежащий нормальному замыканию элемента $B^n(w)$ в группе B. Рассмотрим в группе B^n элемент x^nbx^{-n}, где b не принадлежит нормальному замыканию $B^n(w)$.

Для любого элемента h1, принадлежащего группе $H_{k,n-1}$ будет выполняться $B^n(h\cdot h_1)=B^n(h)$, следовательно

$$B^n(x^nbx^{-n}\cdot h_1)=B^n(x^nbx^{-n})=b\notin\left(B^n(w)\right)^B.$$

Это означает, что элемент $x^nbx^{-n}\cdot h_1$ не лежит в группе N ни для какого $h_1\in H_{k,n-1}$. Значит, рассматриваемый элемент x^nbx^{-n} не принадлежит группе $H_{k,n-1}$ в фактор-группе $H_{k,n}/N$.

Следовательно, группа $H_{k,n-1}$ является собственной подгруппой в $H_{k,n}/N$. Аналогично доказывается, что $H_{k+1,n}$ также является собственной подгруппой. Таким образом, в группе $G=F/<w>^F=HNN(x.H_{k,n}/N\mid xH_{k,n-1}t^{-1}=H_{k+1,n})$ обе изоморфные подгруппы являются собственными, выполнены условия теоремы Бардакова.

Поэтому любая вербальная подгруппа, определенная конечным собственным множеством слов, имеет бесконечную ширину относительно этого множества. Теорема доказана.

Теорема 2

Теорема 2. Пусть G = AwB — аномальное произведение бесконечной циклической группы $A=<x>_\infty$ и B – группы, которая не является конечно порожденной. Пусть также сумма всех степеней элемента x, с которыми он входит в запись аномалии $w=x^{r1}b_1...x^{rl}b_l$, равна нулю: $\sum_{k=1}^{l}k_t=0$. Тогда ширина всякой собственной вербальной подгруппы V(G) группы G, определенной конечным множеством слов V, бесконечна относительно V.

Доказательство. Представим группу AwB в виде свободного произведения с объединенной подгруппой $AwB=(AwB^0*B;B^0)$, где $B^0=gp(b_1,b_2,...,b_l)$ — подгруппа группы B, порожденная элементами, входящими в несократимую запись аномалии.

Согласно теореме Добрыниной, для бесконечности ширины собственных вербальных подгрупп достаточно, чтобы число смежных классов одного множителя по объединенной подгруппе было не меньше 3, а другого – не меньше 2 (т.е. чтобы объединенная подгруппа была собственной во втором множителе).

То, число смежных классов B по B^0 будет больше 2 следует из того, что группа B не является конечно порожденной. Докажем, что группа B^0 будет собственной в AwB^0.

В противном случае в группе AwB^0 должно выполняться равенство $x=b$, где $b\in B^0$. Но тогда элемент xb^{-1} должен лежать в нормальном замыкании аномалии w в свободном произведении $F=A*B^0$. Поскольку суммарная степень, с которой порождающий x входит в запись w равна 0, то и для любого элемента из нормального замыкании $(w)^{A*B^0}$ суммарная степень также равна 0. Значит, ни для какого $b \in B^0$ элемент xb^{-1} не будет принадлежать $(w)^{A*B^0}$. Следовательно, порождающий бесконечной циклической группы x не принадлежит подгруппе B^0 в группе AwB^0 и, соответственно, подгруппа B^0 будет собственной в AwB^0.

Все условия для бесконечности ширины свободных произведений с объединением выполнены. Теорема доказана.

Список литературы
References

1. Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987.

Merzlyakov, Y. I. 1987. Rational groups, Moscow: Nauka.

2. Мерзляков Ю. И. Алгебраические линейные группы как полные группы автоморфизмов и замкнутость их вербальных подгрупп // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, №1. С. 83 — 94.

Merzlyakov, Y. I. 1967. Algebraic linear groups as full groups of automorphisms and closure of their verbal subgroups. Algebra and logic, Vol. 6, No.1, pp. 83-94.

3. Rhemtulla A. H. A problem of bounded expressibility in free products // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1968. V. 64, № 3. P. 573 — 584.

4. Бардаков В. Г. О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, №5. С. 494 — 517.

Bardakov V. G. 1997. On the width of verbal subgroups of some free constructions. Algebra and logic, Vol. 36, No. 5, pp. 494-517.

5. Добрынина И.В. Решение проблемы ширины в свободных произведениях с объединением // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15, №1. С. 23 — 30.

Dobrynina I. V. 2009. Solution of the width problem in amalgamated free products, Fundam. Prikl. Mat., Vol. 15, No. 1, pp. 23-30.

6. Добрынина И. В., Безверхний В. Н. О ширине в некотором классе групп с двумя образующими и одним определяющим соотношением // Труды института математики и механики УрО РАН, 2001. Т.7, №2. С. 95 — 102.

Dobrynina I. V. & Bezverkhnii V. N. 2001. On width in some class of groups with two generators and one defining relation, Proc. Steklov Inst. Math. Algebra. Topology, Vol. 7, suppl. 2, pp. 53-60.

7. Faiziev V. A. A problem of expressibility in some amalgamated products of groups // J. Austral. Math. Soc. 2001. V. 71. P. 105 — 115.

8. Григорчук Р. И. Ограниченные когомологии групповых конструкций // Математические заметки, 1996. Т. 59, №4. С. 546 — 550.

Grigorchuk R. I. 1996. Bounded cohomology of group constructions, Mat. Zametki, Vol. 59, No. 4, Pp. 546-550.

9. Каган Д. З. О существовании нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях групп // Вестник МГУ, 2004. №6. С. 24 — 28.

Kagan D. Z. 2004. On the existence of non-trivial Pseudocharacters on anomalous products of groups, Vestnik MGU, No. 6, Pp. 24-28.

10. Каган Д.З. Псевдохарактеры на аномальных произведениях локально индикабельных групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т.12, №3. С. 55 — 64.

Kagan D. Z. 2006. Pseudocharacters on anomalous products of locally indicable groups, Fundam. Prikl. Mat., Vol. 12, No. 3, Pp. 55-64.

11. Добрынина И.В., Каган Д.З. О ширине вербальных подгрупп в некоторых классах групп. Чебышевский сборник. 2015. Т.16, В. 4, С. 150-163.

Dobrynina I. V., Kagan D. Z. 2015. On the width of verbal subgroups in some classes of groups// Chebyshevskii Sb., Vol. 16, Iss. 4, Pp 150–163

12. Бродский С. Д. Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением // Сибирский математический журнал. 1984. Т. 25, №2. С. 84-103.

Brodskii S. D. 1980. Equations over groups and groups with a single defining relation. Siberian Math. J., Vol. 25, Iss. 2, Pp. 84-103.