АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВОДНЫЕ РЕСУРСЫ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

4

МОСКВА · 1986

УДК 551.83/84

К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ БЕРЕГОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ

МОСКОВКИН В. М., ЕСИН Н. В.

В настоящее время актуальной становится проблема рационального укрепления абразионных берегов, что связано с интенсивным вовлечением береговой зоны морей и других водных объектов в хозяйственную деятельность человека и с необходимостью восстановления и поддержания динамически равновесных состояний береговых систем. В ряде работ [4—6] были высказаны соображения о целесообразности перехода от укрепления берегов (различного рода гидротехническими сооружениями) к управлению их развитием путем регулирующих воздействий. Одним из таких воздействий может быть подсыпка (или изъятие) из береговой зоны обломочного материала. Таким способом можно управлять скоростью абразии в широком диапазоне — от нуля до ее максимального значения [7]. Задача состоит в выборе оптимального (наиболее экономичного, наиболее быстрого при заданных технических возможностях, требующего наименьших производственных мощностей и т. д.) режима подсыпки (или изъятия) обломочного материала. Для ее решения использована теория оптимальных процессов [1].

При неизменном волновом режиме моря динамика отступания берега достаточно хорошо описывается уравнением баланса пляжеобразующего материала [2], которое с учетом управляющего фактора $\xi(t)$, м³/м·год (подсыпка при $\xi > 0$ и изъятие при $\xi < 0$) можно записать в виде

$$\frac{dW}{dt} = aNH - kW + \xi(t), \tag{1}$$

где W — объем обломочного материала на пляже на единицу длины береговой линии, м³/м; N — скорость отступания клифа, м/год; $H = \text{const}$ — высота клифа, м; $a = \text{const}$ — доля пляжеобразующего материала в породах, слагающих берег $(0 \leqslant a \leqslant 1)$; k — коэффициент истираемости материала, год⁻¹; t — время, год. Зависимость N от объема наносов на пляже в общем случае нелинейная [3, 7], но ее можно аппроксимировать прямой $N = \gamma(W_м - W)$, где γ и $W_м$ — const ($N = 0$ при $W = W_м$).

Дифференцируя (1) по времени, получим динамическую систему второго порядка

$$\frac{dV}{dt} = -AV + u(t), \qquad \frac{dW}{dt} = V, \tag{2}$$

где $A = aH\gamma + k$, $u(t) = \dfrac{d\xi}{dt}$, $|u| \leqslant \beta$ — ограничение на интенсивность наращивания подсыпки (изъятия), следующее из технических условий, м²/год².

Задача состоит в том, чтобы систему (2) перевести из некоторого произвольного начального состояния, характеризующегося параметрами (W_0, V_0), в динамически равновесное состояние с некоторой скоростью изменения объема $(W_{ст}, V_к)$ за минимальное время при заданных возможностях подсыпки (изъятия) пляжевого материала. $W_{ст}$ означает стационарное решение уравнения (1) при $\xi(t) = 0$, описывающего установившийся естественный ход абразии. При достижении системой ситуации $(W_{ст}, V_к)$ и прекращении управления $V_к$ обращается в нуль.

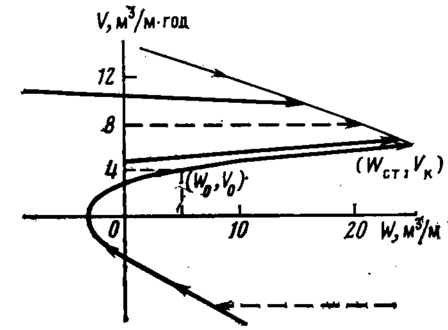

Рис. 1. Частичный синтез оптимальных управлений для системы уравнений (2)

Синтез оптимальных управлений для системы (2) строится на основе ее решения при $u(t) = +\beta$ и $u(t) = -\beta$ [1]. На рис. 1 приведен частичный расчетный синтез при следующих значениях параметров: $A = 0{,}2$ год⁻¹ ($a = 0{,}3$; $k = 0{,}1$ год⁻¹, $H = 100$ м, $\gamma = 1/300$ (м·год)⁻¹), $W_м = 50$ м², $W_{ст} = \left(\dfrac{A-k}{A}\right) W_м = 25$ м², $V_к = 6$ м²/год, $\beta = 1{,}539$ м²/год². Асимптоты $V = \pm\dfrac{\beta}{A}$ также являются фазовыми траекториями этого синтеза. Физический смысл имеют траектории в правой полуплоскости $W > 0$. Уравнение верхней линии переключения $(V > V_к)$ имеет вид

$$W = W_{ст} + \frac{1}{A}(V_к - V) + \frac{\beta}{A^2} \ln\left(\frac{AV + \beta}{AV_к + \beta}\right). \tag{3}$$

Для получения нижней линии переключения необходимо поменять знак на обратный в произведениях AV и $AV_к$ под логарифмом.

Уравнение фазовой траектории, лежащей между асимптотой и нижней линией переключения, имеет вид

$$W = W_0 - \frac{1}{A}(V - V_0) - \frac{\beta}{A^2} \ln\left(\frac{AV - \beta}{AV_0 - \beta}\right). \tag{4}$$

Координата $V_в$ точки переключения определяется по формуле

$$V_в = \frac{1}{A}\sqrt{\beta^2 + (AV_0 - \beta)(\beta + AV_к)\exp\left[\frac{A^2}{\beta}\left(W_0 - W_{ст} + \frac{1}{A}(V_0 - V_к)\right)\right]}, \tag{5}$$

$W_в$ находится из уравнения (4) при подстановке в него значения $V_в$.

Время перехода системы из начальной точки (W_0, V_0) в точку переключения B равно

$$t_1 = \frac{1}{A} \ln\left(\frac{AV_0 - \beta}{AV_в - \beta}\right). \tag{6}$$

Время перехода из точки переключения в конечную точку $(W_{ст}, V_к)$ находится из выражения

$$t_2 = \frac{1}{A} \ln\left(\frac{AV_в + \beta}{AV_к + \beta}\right). \tag{7}$$

Общее оптимальное время $T = t_1 + t_2$.

Перейдем к выбору значений $V_к$ и β для ситуации дефицита обломочного материала в начальный момент времени ($W_0 < W_{ст}$). Значение $V_к$ зададим через максимальную интенсивность (δ) равномерной подсыпки: $V_к = \delta$. Решая уравнение (1) при $\xi(t) = \delta$, $W_0 < W_{ст}$, найдем время перевода системы в стационарное состояние при равномерной подсыпке:

$$T_\delta = \frac{1}{A} \ln \left[1 + \frac{A}{\delta} (W_{ст} - W_0) \right]. \tag{8}$$

Значение V_0 определим из уравнения (1) при $\xi(t) = 0$:

$$V_0 = A(W_{ст} - W_0). \tag{9}$$

В этом случае (при $V_0 < V_к$) начальная точка (W_0, V_0) лежит на нижней линии переключения и оптимальным управлением является равноускоренная подсыпка с интенсивностью $\xi(t) = \beta t$ ($0 < t < t_1$, $t_2 = 0$, $V_в = V_к$). Из практических соображений следует положить, чтобы максимальное значение равноускоренной подсыпки не превышало заданного максимального значения равномерной подсыпки. Таким образом, имеем следующее соотношение для оценки β: $\beta t_1 = \delta = V_к$, которое в силу выражений (6) и (9) сводится к трансцендентному уравнению относительно β:

$$\frac{\beta}{A} \ln \left[\frac{A^2 (W_{ст} - W_0) - \beta}{AV_к - \beta} \right] = V_к. \tag{10}$$

Можно показать, что уравнение (10) имеет единственное решение. При $V_к = 6$ м²/год, $W_0 = 5$ м² и указанных выше значениях остальных параметров $\beta = 1{,}539$ м²/год². Расчеты показывают, что $t_1 = T > T_\delta$, т. е. равномерная подсыпка материала быстрее приводит к цели, чем равноускоренная, конечная интенсивность которой равна интенсивности равномерной подсыпки. Такой результат есть следствие неполной эквивалентности задачи оптимального управления со случаем равномерной подсыпки. Действительно, в первом оптимальном варианте осуществляется перевод системы из точки (W_0, $A(W_{ст} - W_0)$) в точку ($W_{ст}$, $V_к = \delta$), во втором — из точки (W_0, $A(W_{ст} - W_0) + \delta$) в точку ($W_{ст}$, $V_к = \delta$). Для выбора наиболее рационального варианта необходима дальнейшая оценка общего объема подсыпаемого материала и отступания берега для двух видов подсыпки. Вначале приведем основные выражения для равноускоренной подсыпки (уравнение (1) при $\xi(t) = \beta t$).

Изменение объема материала на пляже во времени имеет вид

$$W(t) = \left(W_0 - W_{ст} + \frac{\beta}{A^2} \right) \exp(-At) + \frac{\beta}{A} \left(t - \frac{1}{A} \right) + W_{ст}, \tag{11}$$

где $W(t_1) = W_{ст}$; t_1 определяется из выражения (6) при $V_в = V_к$; $\beta t_1 = V_к$. Общий объем равноускоренной подсыпки равен

$$W_{отс} = \int_0^{t_1} \beta t \, dt = \frac{\beta}{2} t_1^2. \tag{12}$$

Расстояние, на которое отступает клиф, можно оценить по формуле

$$S(t) = \int_0^t \gamma (W_м - W) \, dt = \gamma t (W_м - W_{ст}) + \frac{\gamma \beta t}{A} \left(\frac{1}{A} - \frac{t}{2} \right) +$$

$$+ \frac{\gamma}{A} \left(W_0 - W_{ст} + \frac{\beta}{A^2} \right) [\exp(-At) - 1]. \tag{13}$$

Аналогичные выражения для равномерной подсыпки ($\xi(t) = \delta = V_к$) имеют вид

$$W(t) = \left(W_0 - W_{ст} - \frac{\delta}{A} \right) \exp(-At) + \left(\frac{\delta}{A} + W_{ст} \right), \tag{14}$$

$$W_{отс} = \int_0^{T_\delta} \delta \, dt = \delta T_\delta, \tag{15}$$

$$S(t) = \gamma t \left(W_м - W_{ст} - \frac{\delta}{A} \right) + \frac{\gamma}{A} \left(W_{ст} + \frac{\delta}{A} - W_0 \right) [1 - \exp(-At)], \tag{16}$$

где $W(T_\delta) = W_{ст}$, T_δ определяется из (8).

При $W_0 = 5$ м² и указанных выше значениях остальных параметров при равноускоренной подсыпке имеем $\beta = 1{,}539$ м²/год², $t_1 = 3{,}9$ лет, $t_2 = 0$, общий объем подсыпки $W_{отс} = 11{,}7$ м². В случае равномерной подсыпки $T_\delta = 2{,}55$ лет $W_{отс} = 15{,}3$ м². Таким образом, при равноускоренной подсыпке на километровом отрезке берега получается экономия отсыпаемого материала (15,3 м² — 11,7 м²)·1000 м = 3600 м³, свидетельствующая о предпочтительности равноускоренной подсыпки, несмотря на то, что на нее требуется больше время. Отступание клифа к моменту окончания управления ($t = t_1$) при

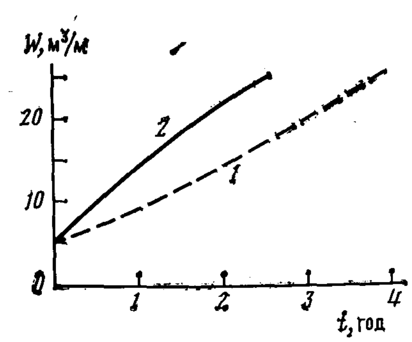

Рис. 2

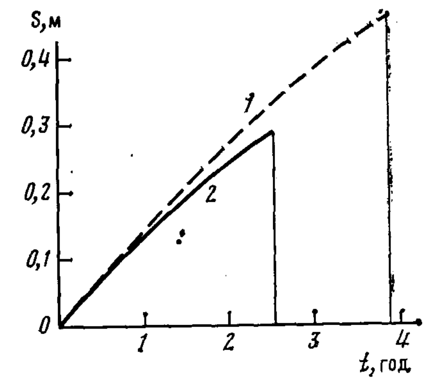

Рис. 3

Рис. 2. Изменение объема материала на пляже во времени для случаев равноускоренной (*1*) и равномерной (*2*) подсыпок

Рис. 3. Отступание клифа во времени для случаев равноускоренной (*1*) и равномерной (*2*) подсыпок

равноускоренной подсыпке составляет 0,46 м, а при равномерной ($t = t_1$), оно равно 0,4 м, т. е. приходим к близким величинам. На рис. 2 и 3 показаны соответственно функции $W(t)$ и $S(t)$ для случаев равноускоренной (кривая *1*) и равномерной (кривая *2*) подсыпок.

Аналогичные расчеты, выполненные при $V_к = 8$ м²/год (остальные все параметры прежние), дали следующие результаты: $\beta = 2{,}485$ м²/год², $t_1 = 3{,}22$ год, $t_2 = 0$, $T_\delta = 2{,}03$ год, объем равноускоренной подсыпки равен 12,9, равномерной — 16,22 м², отступание клифа для равноускоренной подсыпки $S(t)_1 = 0{,}39$, для равномерной $S(t_1) = 0{,}33$ м.

Подобные расчеты для равноускоренной и равномерной подсыпок могут быть проведены и при более сложных зависимостях интенсивностей абразии и истирания от объема пляжеобразующего материала W.

Литература

1. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
2. *Есин Н. В.* О роли обломочного материала в абразионном процессе.— Океанология, 1980, т. 20, вып. 1, с. 111—115.
3. *Есин Н. В., Дмитриев В. А., Московкин В. М.* Математическая модель эволюции береговой линии абразионного берега.— Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 1, с. 223—226.
4. *Мамыкина В. А., Артюхин Ю. В.* Природные аспекты охраны и защиты берегов Азовского моря.— В кн.: Литодинамические процессы береговой зоны южных морей и ее антропогенное преобразование. Л.: Гидрометеоиздат, 1982, с. 60—72.
5. *Пешков В. М.* Некоторые проблемы защиты и оптимизации береговой зоны восточной части Черного моря.— Изв. Всесоюз. геогр. о-ва, 1983, т. 115, вып. 4, с. 300—310.
6. *Сокольников Ю. Н., Горбатенко Е. Г., Калиновский А. В., Юрин О. С.* Некоторые отрицательные факторы применения традиционной бунно-волноломной стратегии в береговой гидротехнике.— В кн.: Литодинамические процессы береговой зоны южных морей и ее антропогенное преобразование. Л.: Гидрометеоиздат, 1982, с. 73—77.
7. *Шуйский Ю. Д., Шевченко В. Я.* Динамика берегов Черного моря в районе мыса Бурнас.— Геоморфология, 1975, № 4, с. 98—104.

ВНИИВО
Южное отделение Института океанологии
АН СССР

Поступила в редакцию
25.XII.1984