УДК 621.391.15

О ФОРМИРОВАНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ КАНАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ ЗАДАННЫХ ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРАХ

ON THE FORMATION OF OPTIMAL CHANNEL SIGNALS WITH SPECIFIED FREQUENCY-TIME PARAMETERS

С.П. Белов
S.P. Belov

Белгородский университет кооперации, экономики и права,
Россия, 308023, г. Белгород, ул. Садовая, д. 116а

Belgorod University of Cooperation, Economics and Law, 116a Sadovaya St., Belgorod, 308023, Russia

E-mail: belov@bsu.edu.ru

Аннотация
Рассматривается проблема управления процессом передачи и приема информации в условиях наличия большого количества источников электромагнитных излучений, создающих помехи в непредсказуемое заранее время и в непредсказуемых частотных интервалах. Одним из наиболее естественных и эффективных приемов преодоления трудностей в обеспечении электромагнитной совместимости представляется применение процедур адаптивного определения частотных интервалов, которые доступны для передачи информации. При этом важно создавать такие сигнально-кодовые конструкции, которые обеспечивают минимальное просачивание энергии канального сигнала за пределы этого интервала, что равносильно минимизации этой меры межканальной интерференции.
В данной работе на основе формулирования и решения соответствующей вариационной задачи показано, что наилучшим базисом для формирования сигнально-кодовых конструкций с минимальным уровнем просачивания энергии за пределы заданного частотного интервала являются собственные функции ядра интегрального соотношения, которое (ядро) названо субполосным. Установлены условия, выполнение которых позволяет достичь нулевого просачивания энергии, построены процедуры синтеза сигнально-кодовых конструкций и их декодирования при наличии помех.

Abstract
The problem considers of controlling the process of transmitting and receiving information in the presence of a large number of sources of electromagnetic radiation, creating interference in an unpredictable time and in unpredictable frequency intervals. One of the most natural and effective methods of overcoming difficulties in ensuring electromagnetic compatibility is to apply the procedures of adaptive determination of frequency intervals available for the transmission of information. It is important to create such of signal-code constructions that provide the lowest leakage level energy of the signal for outside this interval, which is equivalent the minimization, this measure interchannel interference.
In this paper, on the basis of the formulation and solution of appropriate variational problem it is shown that the best basis for the formation of signal-code constructions with minimum leakage of energy outside the specified frequency range are eigenfunctions function of core of the integral relation, this core is named subband. The conditions installed, the implementation of which allows to achieve the zero leakage of energy, developed procedure of synthesis of signal-code constructions and decoding in the presence of interference.

Ключевые слова: когнитивное радио, собственные функции субполосных ядер, частотно-временные ресурсы систем радиосвязи, вариационные задачи, заданная частотная субполоса.
Keywords: cognitive radio, eigenfunctions of subband nuclei, time and frequency resources of radio communication systems, variational problems, given frequency subband.

Введение

Современная электромагнитная обстановка, в которой осуществляется радиосвязь, характеризуется поиском частотных субполос, пригодных для передачи информации в течение заранее непредсказуемых временных интервалов [Сопронюк и др., 2011; Бузов и др., 2006; Бутенко и др., 2009; Котов, 2009; Arslan and Yarkan, 2007; Haykin et al.,2009]. Поэтому в настоящее время одним из основных трендов развития систем радиосвязи является применение принципов гибкой перестройки процедур передачи и приема радиосигналов, в параметрах которых закодирована передаваемая информация [Kwang-Cheng et al., 2009; Doyle, 2009; Akildiz, 2006; Yucek, and Arslan, 2009; Жиляков, и др., 2012; Шахнович, 2006; Jeffrey, 2005.]. Необходимость в такой перестройке определяется стремлением повысить эффективность передачи и приема информации в условиях наличия большого количества источников электромагнитного излучения, которые действуют в непредсказуемые интервалы времени и широкой полосе частот [Громаков и др.,2012; Fette, 2009; Pursley and Royster, 2008; Wyglinski et al.,2010]. Для повышения эффективности использования частотно - временных ресурсов систем радиосвязи целесообразно использовать сигнально - кодовые конструкции, позволяющие формировать канальные сигналы, которые при заданной длительности имеют максимальную концентрацию энергии в заданной частотной субполосе.

Таким образом, проблема заключается в формировании канальных сигналов заданной длительности, энергия которых сосредоточена в выбранной субполосе.

Именно эта проблема рассматривается в рамках данной работе и для её решения предложен новый базис ортонормальных функций.

Теоретические основы субполосного анализа и синтеза сигналов

Пусть $x(t), t \in [0,T]$ - некоторый непрерывный сигнал (функция времени) конечной длительности и энергии, трансформанта Фурье которого (спектр) имеет вид

$$X(\omega) = \int_0^T x(t)\exp(-j\omega t)dt, \tag{1}$$

где $\omega = 2\pi v$, v - частота; $j = (-1)^{1/2}$.

В соответствии с [Жиляков и др., 2009], используя (1), положим

$$P_r(x) = \int_{\omega\in\Omega_r} |X(\omega)|^2 \, d\omega / 2\pi, \tag{2}$$

где имеется в виду субполоса следующего вида

$$\Omega_r = [-\Omega_{2r}, -\Omega_{1r}) \cup [\Omega_{1r}, \Omega_{2r}), \Omega_{1r} \geq 0. \tag{3}$$

Представляется естественным характеристику (2) именовать частью энергии, попадающей в симметрично расположенную относительно начала координат частотную субполосу вида (3). Подставив в правую часть (2) представление (1), после несложных преобразований получаем важное для дальнейших исследований представление

$$P_r(x) = \int_0^T\int_0^T A_r(t-\tau)x(t)x(\tau)dtd\tau, \tag{4}$$

определяющее часть энергии непосредственно в области оригиналов (времени).

Здесь $A_r(t-\tau)$ - субполосное ядро

$$A_r(t-\tau) = \int_{\omega\in\Omega_K} \exp(-j\omega(t-\tau))d\omega/2\pi, \tag{5}$$

которому, в соответствии с определением (3), нетрудно придать более удобный для вычислений в области оригиналов вид

$$A(t) = 2\sin(\Delta_r t/2)\cos(\omega_r t)/\pi t, \tag{6}$$

где

$$\Delta_r = \Omega_{2r} - \Omega_{1r}; \omega_r = (\Omega_{2r} + \Omega_{1r})/2. \tag{7}$$

Ясно, что субполосное ядро (5) является симметричным, а непосредственно из определения (2) и представления (4) следует, что оно является положительно определенным. Поэтому оно представимо в виде [Смирнов, 1974]

$$A(t\text{-}\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k g_k(t) g_k(\tau), \tag{8}$$

где слагаемые в сумме определяются собственными числами и функциями субполосного ядра, которые удовлетворяют уравнениям вида

$$\lambda_k g_k(t) = \int_0^T A_r(t-\tau) g_k(\tau) d\tau, \tag{9}$$

и являются ортонормальными, то есть выполняются следующие равенства

$$(g_k, g_i) = \int_0^T g_k(t) g_i(t) dt = 0, i \neq k, \ (10) \ \| g_k \|^2 = (g_k, g_k) = 1. \tag{11}$$

Поэтому представлению (4) после подстановки (8) можно придать следующий вид

$$P_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \alpha_k^2, \tag{12}$$

где

$$\alpha_k = (x, g_k). \tag{13}$$

Собственные функции и числа субполосного ядра обладают рядом полезных для анализа и синтеза сигналов свойств. В частности, в виду неотрицательной определенности ядра его собственные числа также неотрицательны, причем в дальнейшем без потери общности считаем, что они упорядочены по убыванию

$$\lambda_k \geq \lambda_{k+1}, \forall k \geq 1. \tag{14}$$

Используя представление (8) и свойство (11), имеем

$$A_r(0) \int_0^T dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k,$$

что вместе с определением (5) дает следующее равенство для суммы собственных чисел

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = T\Delta_r / \pi. \tag{15}$$

Положим

$$Q_k(\omega) = \int_0^T q_k(t) \exp(-j\omega t) dt. \tag{16}$$

Тогда после подстановки в уравнение (9) представления субполосного ядра (5) нетрудно получить следующее соотношение

$$\lambda_k g_k(t) = \int_{\omega \in \Omega_r} Q_k(\omega) \exp(j\omega t) d\omega / 2\pi, \tag{17}$$

которое показывает, что соответствующая отличному от нуля собственному числу собственная функция полностью определяется отрезком трансформанты Фурье из заданной субполосы.

На основании соотношения (17) имеем уравнение

$$\lambda_k \int_0^T g_k(t) \exp(-jzt) dt = \int_{\omega \in \Omega_r} Q_k(\omega) \int_0^T \exp(jt(\omega - z)) dt d\omega / 2\pi,$$

которое преобразуется к следующему виду

$$\lambda_k Q_k(z) = \int_{\omega \in \Omega_r} D(z-\omega) Q_k(\omega) d\omega, \qquad (18)$$

где

$$D(z-\omega) = \int_0^T \exp(-jt(z-\omega)dt / 2\pi = \exp(-jT(z-\omega)/2)\sin(T(z-\omega)/2)/\pi(z-\omega). \qquad (19)$$

Таким образом, трансформанты Фурье собственных функций также являются собственными функциями ядра вида (19) при тех же собственных числах. Отметим также, что при ненулевых собственных числах соотношение (18) определяет продолжение трансформант Фурье собственных функций на всю частотную ось.

С другой стороны, соотношение (17) позволяет получить равенство

$$\lambda_k \int_0^T g_k(t) g_m(t) dt = \int_{\omega \in \Omega_r} Q_k(\omega) Q_m(-\omega) d\omega / 2\pi,$$

откуда в соответствии с (10) и (11) имеем

$$\int_{\omega \in \Omega_r} Q_k(\omega) Q_m(-\omega) d\omega / 2\pi = 0, k \neq m, \qquad (20)$$

$$\lambda_k = \int_{\omega \in \Omega_r} |Q_k(\omega)|^2 d\omega / 2\pi \leq 1. \qquad (21)$$

Таким образом, трансформанты Фурье собственных функций ортогональны не только на всей оси частот (как трансформанты Фурье ортонормальных функций), но и в выбранной субполосе (свойство двойной ортогональности). Неравенство в правой части соотношения (21) получается из тех соображений, что в соответствии с равенством Парсеваля [Хургин, Яковлев, 1971] для всех собственных функций в виду (11) единичное значение интеграла достигается при интегрировании по всей частотной оси, тогда как при интегрировании по субполосе такой эффект может наблюдаться только для некоторых из них.

Из конечности правой части соотношения (15) следует, что с ростом значения индекса соответствующие собственные числа должны убывать так, чтобы этот ряд из положительных чисел сходился. Проведенные нами обширные вычислительные эксперименты показали, что, начиная с индекса

$$J = 2[T\Delta_r] + 4, \qquad (22)$$

достаточно точно выполняются равенства

$$\lambda_{J+k} = 0, \ \forall k \geq 1. \qquad (23)$$

Квадратная скобка в (22) означает взятие целой части содержимого.

Другим очень важным свойством собственных чисел является то, что часть из них, а именно

$$J_1 = J - 8 \qquad (24)$$

могут быть практически равны единице, так что можно положить

$$\lambda_k = 1, \ k = 1,..,J_1. \qquad (25)$$

Отметим, что для выполнения этих равенств необходимо за счет выбора произведения в квадратных скобках соотношения (22) добиться положительности правой части в (24). В противном случае не будет ни одного близкого к единице собственного числа. Имея в виду равенство (21), легко понять, что выполнение равенств вида (25) означает практически полную сосредоточенность энергии соответствующих собственных функций субполосного ядра в заданной субполосе. Ясно также, что полной сосредоточенностью энергии в субполосе будет также обладать и любая линейная комбинация этих собственных функций

$$f(t)=\sum_{k=1}^{J_1} c_k g_k(t), \tag{26}$$

где c_k, $k=1,..,J_1$, - вещественные числа.

Легко понять, что именно это свойство собственных функций субполосного ядра позволяет синтезировать сигналы с минимальным просачиванием энергии за пределы выделенной субполосы.

Еще один широко используемый прием субполосного анализа заключается в выделении из некоторого сигнала $x(t)$, $0\le t\le T$, компоненты $y(t)$ такой же длительности, трансформанта Фурье которой в идеальном случае должна удовлетворять следующим требованиям

$$Y(\omega)=X(\omega),\ \forall\omega\in\Omega_r, \tag{27}$$

$$Y(\omega)=0,\ \omega\notin\Omega_r. \tag{28}$$

В частности, свойство (27)-(28) целесообразно обеспечить при выделении канального сигнала, чтобы он определялся только энергией смеси всех сигналов, одновременно используемых при передаче информации.

Вместе с тем известно [Хургин, Яковлев, 1971], что в силу соотношения неопределенности выполнить одновременно оба требования (27) и (28) в точности невозможно. Но можно использовать некоторую меру отклонений от идеала, минимизация которой позволит получить оптимальную в смысле этого критерия компоненту. В качестве такой меры (критерия) предлагается использовать функционал

$$F(y,\beta)=\beta\int_{\omega\in\Omega_r}|X(\omega)-Y(\omega)|^2 d\omega/2\pi+(1-\beta)\int_{\omega\notin\Omega}|Y(\omega)|^2\,d\omega/2\pi, \tag{29}$$

где параметр β определяет весомость компонент погрешностей выполнения требований (27) (первый интеграл) или (28) (второй интеграл) и выбирается из условия

$$0\le\beta\le 1. \tag{30}$$

Имея в виду определение (1), представление (4) и равенство Парсеваля [10], функционалу (29) можно придать следующий вид

$$F(y,\beta)=\beta P_r(x)-2\beta\int_0^T\int_0^T x(t)y(\tau)A_r(t-\tau)dtd\tau+(1-\beta)\,||\,y\,||^2+(2\beta-1)P_r(y), \tag{31}$$

который позволяет в аналитическом виде решить вариационную задачу поиска его минимума при фиксированном значении параметра весомостей непосредственно во временной области

$$F(y,\beta)=\min, \tag{32}$$

где поиск минимума осуществляется в пространстве непрерывных функций с ограниченной евклидовой нормой (энергией) и областью определения $t\in[0,T]$.

Минимизация функционала (31) дает следующее интегральное уравнение для искомой функции (сигнала)

$$(1-\beta)y(t)+(2\beta-1)\int_0^T A_r(t-\tau)y(\tau)d\tau=\beta\int_0^T A_r(t-\tau)x(\tau)d\tau. \tag{33}$$

Воспользовавшись полнотой ортонормированного базиса собственных функций субполосного ядра [Смирнов, 1974], искомую функцию целесообразно представить в виде их линейной комбинации

$$y(t)=\sum_{k=1}^{\infty} d_k g_k(t), \tag{34}$$

подстановка которой в уравнение (33) с учетом представлений (8) и (13) дает

$$\sum_{k=1}^{\infty}((1-\beta+(2\beta-1)\lambda_k)d_k-\beta\lambda_k\alpha_k)g_k(t)\equiv 0,\ t\in[0,T] . \tag{35}$$

В виду ортонормальности собственных функций субполосных ядер ряд Фурье в левой части (35) будет сходиться к нулевой функции тогда и только тогда, когда равны нулю все коэффициенты ряда, так что должны выполняться равенства

$$d_k=\beta\lambda_k\alpha_k)/(1-\beta+(2\beta-1)\lambda_k),\ \forall \mathrm{k}\geq 1 . \tag{36}$$

Таким образом, представлению (34) для искомой оптимальной компоненты можно придать следующий вид

$$y(t)=\beta\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\alpha_k g_k(t)/(1-\beta+(2\beta-1)\lambda_k) . \tag{37}$$

Если в последнем соотношении положить

$$\beta=0,5 , \tag{38}$$

то оно дает

$$y(t)=\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\alpha_k g_k(t), \tag{39}$$

так что с учетом определения (13) и представления (8) получаем

$$y(t)=\int_0^T A_r(t-\tau)x(\tau)d\tau . \tag{40}$$

Если теперь подставить сюда представление для субполосного ядра вида (5), то получим

$$y(t)=\int_{\omega\in\Omega_r} X(\omega)d\omega/2\pi . \tag{41}$$

Таким образом, использование представления (39) позволяет получить компоненту сигнала, зависящую только от отрезка трансформанты Фурье из заданной субполосы. Отметим, что в виду свойства (23) ряды (37) и (39) будут иметь конечное число слагаемых.

Синтез канальных сигналов для субполосной передачи информации

Пусть необходимо передать информационный вектор

$$\vec{e}=(e_1,..,e_M)', \tag{42}$$

где штрих означает транспонирование, а компоненты являются вещественными числами. Для этого синтезируется канальный сигнал в виде функции времени, с конечной областью определения, параметры которой зависят от передаваемого информационного вектора

$$x(t)=f(t,\vec{e}),\ t\in[0,T]. \tag{43}$$

Основным требованием к канальному сигналу является однозначное дешифрирование передаваемых чисел на основе некоторого оператора

$$e_m=H_k(f) . \tag{44}$$

Не нарушая общности выводов, предполагаем, что затрачиваемая на передачу энергия определяется соотношением

$$\| f \|^2 = \| \vec{e} \|^2 = \sum_{m=1}^{M} e_m^2, \qquad (45)$$

а для передачи выделена частотная подполоса вида (3).

С точки зрения минимизации межканальной интерференции естественным требованием к синтезируемому канальному сигналу является следующее вариационное условие

$$\| f \|^2 - P_r(f) = \min, \qquad (46)$$

где минимум находится при фиксированном информационном векторе с учетом дополнительного условия (45).

Справедливо следующее утверждение.

Решение вариационной задачи (46), (45) имеет вид

$$f(t, \vec{e}) = \sum_{m=1}^{M} e_m g_m(t). \qquad (47)$$

При этом оператор дешифрирования (44) определяется скалярными произведениями следующего вида

$$e_m = (f, g_m). \qquad (48)$$

Для доказательства этого утверждения воспользуемся тем, что в виду полноты базиса собственных функций субполосного ядра канальный сигнал может быть представлен в виде следующего ряда Фурье

$$f(t, \vec{e}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\vec{e}) g_k(t), \qquad (49)$$

Поэтому вариационную задачу (46), (45) можно переформулировать относительно коэффициентов этого ряда. Подстановка представления (49) в (45) и (46) дает новое представление вариационных условий

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_k) c_k^2(\vec{e}) = \min, \qquad (50)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(\vec{e}) = \| \vec{e} \|^2. \qquad (51)$$

Отметим, что и в данном случае информационный вектор является фиксированным, а условный минимум определяется на множестве всех вещественных коэффициентов разложения искомой функции по собственным функциям субполосного ядра. Далее воспользуемся приемом индукции. Пусть известно, что при количестве компонент информационного вектора равном $M = K - 1$ решение вариационной задачи имеет вид (47). Покажем, что такой вид оно должно сохранять и при $M = K$. В самом деле, при указанных выше условиях требования (50) и равенство (49) преобразуются к следующему виду

$$\sum_{k=K}^{\infty} (1 - \lambda_k) c_k^2(\vec{e}) = \min, \qquad (52)$$

$$\sum_{k=K}^{\infty} c_k^2(\vec{e}) = e_K^2.$$

Имея в виду упорядоченность собственных чисел по убыванию (14) и неравенство (21), для левой части (52) получим следующее неравенство

$$\sum_{k=K}^{\infty} (1 - \lambda_k) c_k^2(\vec{e}) \geq (1 - \lambda_K) \sum_{k=K}^{\infty} c_k^2(\vec{e}) = (1 - \lambda_K) e_K^2.$$

Очевидно, что равенство здесь соответствует минимуму левой части, и оно достигается при выполнении следующих условий: $c_K(\vec{e}) = e_K$; $c_{K+i}(\vec{e}) = 0, \ \forall i \geq 1$.

Пусть теперь $M = 1$. Тогда с учетом условия (14) получаем следующее решение задачи (50), (51)

$$f(t, \vec{e}) = e_1 g_1(t)$$

Для остальных значений размерности информационного вектора по индукции получаем представление (47), что и доказывает сформулированное утверждение. Таким образом, представление (47) определяет оптимальный в смысле критерия (45), (46) канальный сигнал для передачи информационного вектора (42). При этом декодирование осуществляется на основе скалярных произведений вида (48).

Заключение

Показано, что естественной основой управления процессами адаптивного формирования и обработки канальных сигналов в системах когнитивного радио является понятие доли энергии сигнала в заданной частотной субполосе. Разработаны теоретические основы субполосного анализа и синтеза сигналов конечной длительности, что позволило сформулировать и решить вариационную задачу синтеза оптимальных сигнально - кодовых конструкций с минимальным просачиванием энергий за пределы заданного частотного интервала (минимальный уровень межканальной интерференции). Разработаны процедуры декодирования сигнально-кодовых конструкций на основе собственных функций субполосных ядер.

Выводы

Наилучшим базисом для формирования сигналов когнитивного радио, применение которого позволяет минимизировать долю просачивания энергии за пределы заданного частотного интервала, является набор собственных функции субполосных ядер, которые определяют интегральные представления для долей энергий сигналов.

Исследования выполнены при поддержке гранта РФФИ № 17-07-00268

Список литературы
References

1. Akildiz I.F., Lee W.Y., Vuran M.C. and Mohanty S. 2006. Next generation/dynamic spectrum access/cognitive radio wireless networks: a survey, Computer Networks. 13(50): 2127–2159.

2. Arslan H., Yarkan S. 2007. Enabling Cognitive Radio through sensing, awareness, and measurements. Springer. 2: 235-261.

3. Doyle, L. 2009. Essentials of Cognitive Radio. Cambridge University Press, 252.

4. Fette B. A. 2009. Cognitive Radio Technology: Second edition. Elsevier, 828.

5. Jeffrey G., Andrews Ph.D. 2005. Fundamentals of WiMAX. Understand Broadband Wireless Networking. Prentice Hall, 439.

6. Haykin S., Thomson D., Reed J. 2009. Spectrum sensing for cognitive radio. Proceedings of the IEEE. 5(97): 849-877.

7. Kwang-Cheng, Chen, Prasad, R. 2009. Cognitive radio networks. Wyley, 359.

8. Pursley M., Royster T. 2008. Low-complexity adaptive transmission for cognitive radios in dynamic spectrum access networks. Selected Areas in Communications. IEEE Journal. 1(26): 83–94.

9. Wyglinski A.M., Maziar N., Hou Y.T. 2010. Cognitive Radio Communications and Networks. Principles and Practice. Elsevier, 714.

10. Yucek T., Arslan H. 2009. A survey of spectrum sensing algorithms for cognitive radio applications. IEEE Communications Surveys & Tutorials, March. 1(11): 116–130.

11. Бузов А.Л., Быховский М.А., Васеко Н.В., Волкова Ю.В. 2006. Управление радиочастотным спектром и электромагнитная совместимость радиосистем. Москва, ЭКОТРЕНДЗ, 432.

Buzov A.L., Bykhovsky M.A., Vaseko H.B., Volkova Yu.V. 2006. Management of the radio-frequency spectrum and electromagnetic compatibility of radio systems. Moscow, EKOTRENDZ, 432.

12. Бутенко В.В., Веерпалу В.Э., Володина Е.Е., Девяткин Е.Е., Харитонов Н.И. 2009. Перспективные методы управления использованием радиочастотного спектра. Электросвязь. 5: 9–13.

Butenko V.V., Veerpalu V.E., Volodina E.E., Devyatkin E.E., Kharitonov N.I. 2009. Advanced methods for managing the use of the radio-frequency spectrum. Telecommunications. 5: 9–13.

13. Громаков Ю.А., Родионов В.В., Настасин К.С. 2012. Повышение скорости передачи данных в сетях GSM на основе когнитивного радио. Электросвязь. 1: 21–25.

Gromakov Yu.A., Rodionov V.V., Nastasin K.S. 2012. Increase in the speed of data transmission in GSM networks based on cognitive radio. Electrosvyaz. 1: 21–25.

Жиляков Е.Г., Белов С.П., Урсол Д.В. 2009. Оптимальные канальные сигналы при цифровой передаче с частотным уплотнением. Научные ведомости БелГУ. Сер. История Политология Экономика Информатика. 7(62): 166-172.

14. Zhilyakov E.G., Belov S.P., Ursol D.V. 2009. Optimum channel signals in digital transmission with frequency multiplexing. Scientific statements of BelSU. Ser. History Political science Economics Informatics. 7(62): 166-172.

15. Жиляков Е.Г., Урсол Д.В., Магергут В.З. 2012. Разработка нового способа формирования сигналов для систем доступа к широкополосным мультимедийным услугам. Научные ведомости БелГУ. Сер. История Политология Экономика Информатика. 19(138): 187–191.

Zhilyakov E.G., Ursol D.V., Magergut V.Z. 2012. Development of a new method of signal generation for access systems to broadband multimedia services. Scientific statements of BelSU. Ser. History Political science Economics Informatics. 19(138): 187–191.

16. Котов В.И. 2009. Эффективность использования радиочастотного ресурса и подходы к ее оценке . Электросвязь. 7: 16-19.

Kotov V.I. 2009. Efficiency of the use of the radio frequency resource and approaches to its assessment. Telecommunications. 7: 16-19.

17. Смирнов В.И. 1974. Курс высшей математики. Т. 4. М., ФИЗ.–МАТ. ЛИТ., 336.

Smirnov V.I. 1974. The course of higher mathematics T.4. M., FIZ.-MAT. LIT., 336.

18. Сопронюк И.И., Лысечко В.П., Ухова Е.А. 2011. Метод мониторинга спектра в когнитивых радиосетях на основе использования информационного критерия Акайке. Системы обработки информации.5: 108-112.

Soproniuk I.I., Lysechko V.P., Ukhova E.A. 2011. Method of spectrum monitoring in cognitive radio networks based on the use of the Akayke information criterion. Information processing systems. 5: 108-112.

19. Хургин Я.И., Яковлев В.П. 1971. Финитные функции в физике и технике. М., Наука, 408.

Khurgin Ya.I., Yakovlev V.P.1971. Finite functions in physics and engineering. Moscow, Nauka, 408.

20. Шахнович И.В. 2006. Современные технологии беспроводной связи. Издание второе, исправленное и дополненное. М., Техносфера, 288.

Shakhnovich I.V. 2006. Modern wireless technologies. Second edition, revised and supplemented. M., Technosphere, 288.