УДК 517.5
DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-1-35-39

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА АЗАРИНА НЕКОТОРЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

AZARIN LIMIT SETS OF SOME IRREGULARLY GROWING FUNCTIONS

К.Г. Малютин, Л.И. Студеникина, Д.Н. Тютюнов, Т.В. Шевцова
K.G. Malyutin, L.I. Studenikina, D.N. Tutunov, T.V. Shevtsova

Юго-Западный государственный университет,
Россия, 305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Southwest State University, 94, 50 years of October street, Kursk, 305040, Russia

E-mail: malyutinkg@gmail.com, sli-kursk@yandex.ru, tjutjunov@mail.ru, dec-ivt-zao@mail.ru

Аннотация
Рассматривается метод построения асимптотических формул для интегралов с абсолютно непрерывной функцией. Рассматриваются случаи, когда в качестве абсолютно непрерывной функции берется произведение степенной функции на сопряженное ядро Пуассона для полуплоскости, а в качестве промежутка интегрирования берется мнимая полуось. Вещественные и мнимые части этих интегралов представляют собой гармонические функции в комплексной плоскости разрезанной по положительному лучу. Вычисляется предельное множество Азарина для таких функций.

Abstract
A method of constructing asymptotic formulas for integrals with an absolutely continuous function is considered. It are considered cases when as an absolutely continuous function is taken the product of a power function on the conjugate Poisson kernel for a half-plane, and as a gap, the imaginary half-axis is taken. The real and imaginary parts of these integrals are harmonic functions in the complex plane cut along a positive ray. For such functions the Azarin limit set is calculated.

Ключевые слова: асимптотическая формула, сопряженное ядро Пуассона, гармоническая функция, предельное множество Азарина.
Keywords: asymptotic formula, conjugate Poisson kernel, harmonic function, Azarin limit set.

Введение

В этой статье мы рассматриваем интегралы вида

$$\int_b^a f(t) = \exp[i\lambda(\ln(rt))^\sigma]dt, \qquad 0 \le a \le b \le \infty, \quad \sigma \in (0,1)$$

где $f(t) \in L_1(a,b)$ и получаем точные сведения об их асимптотическом поведении. Ядро $\exp[i\lambda(\ln(rt))^\sigma]$ достаточно своеобразное. Например, в трехтомной монографии Э. Риекстыньша [1, 2, 3], где, в частности, рассматриваются интегралы вида $\int_b^a f(t)K(rt)dt$, асимптотические разложения интегралов с такими ядрами не исследуются. Наши рассуждения можно применять и к ядрам более широкого класса. Указанными ядрами мы ограничиваемся, чтобы добиться большей цельности изложения. Тем не менее, наше ядро содержит произвольные параметры λ и $0 < \sigma < 1$. Заметим, что предлагаемый метод получения асимптотических формул отличается от классических методов (метод Лапласа, применение теории вычетов, метод перевала и др.), описанных в монографии М. А. Евграфова [4].

Затем мы изучаем уже совсем конкретные функции, когда в качестве функции $f(t)$ берется произведение t^{ρ} на сопряженное ядро Пуассона для полуплоскости, а в качестве промежутка интегрирования берется луч $[0,\infty)$. Вещественные и мнимые части этих интегралов, которые мы обозначаем $u_k(z)$, $k = 1, 2$, представляют собой гармонические функции в комплексной плоскости разрезанной по положительному лучу.

Важной характеристикой роста субгармонической и, в частности, гармонической функции $u(z)$, является ее предельное множество Азарина [5] Fr u. Это предельное множество семейства функций $u_t(z) = u(tz)/t^{\rho}$ ($\rho > 0$ – порядок функции $u(z)$) при $t \to +\infty$ в топологии пространства обобщенных функций Шварца. Мы находим предельное множество Азарина для введенных нами функций $u_k(z)$. Предельное множество Азарина несет в себе больше информации о поведении субгармонических функций в окрестности бесконечности чем ее индикатор

$$h_u(\theta) = \limsup_{t\to\infty} \frac{u(te^{i\theta})}{t^{\rho}}, \quad \theta \in [0,2\pi].$$

Общая теория дает теорему о характеризации предельных множеств Азарина и гарантирует существование субгармонических функций с заданным предельным множеством. Однако, наш метод позволяет строить примеры конкретных функций нерегулярного роста, для которых вычисляется предельное множество Азарина. До сих пор асимптотические оценки в основном, строились для функций вполне регулярного роста. Такие функции хорошо приближают некоторые субгармонические функции с корнями на одном луче. Мы указываем такие функции. Тем самым мы указываем широкий набор субгармонических функций нерегулярного роста с известным асимптотическим поведением. Заметим, что в книге Б.Я. Левина [6] приведены асимптотические формулы для класса целых функций вполне регулярного роста. Целые функции вполне регулярного роста изучены наиболее полно, встречаются в большом количестве работ и имеют разнообразные применения. Однако, современные исследования вопросов полноты и представления рядами в функциональных пространствах, проблем теории аналитического продолжения, задач теории дифференциальных операторов бесконечного порядка и операторов типа свертки требуют систематического изучения целых функций, не обладающих сколь-нибудь правильным поведением. Поэтому актуальной является разработка методов решения задач, связанных с нахождением экстремальных значений для основных асимптотических характеристик роста целых функций из весьма общих и естественных классов. В последнее время появились многочисленные работы, посвященные этой тематике. Отметим совместную работу Брайчева Г.Г. и Шерстюкова В.Б. [7], и работу Шерстюкова В.Б. [8].

Асимптотические формулы для интегралов

В случае, когда $\sigma \in (0,1)$ асимптотическое разложение интеграла получается разложением ядра.

Теорема 1. *Пусть* $f(t) \in L_1([a,b])$ $0 < a < b < \infty$ *и пусть* $\sigma \in (0,1)$. *Тогда справедливо разложение*

$$\int_b^a f(t)\exp(i\lambda\,|\ln rt\,|^{\sigma})dt = \exp(i\lambda \ln^{\sigma} r)\left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n,k}}{(\ln r)^{k(1-\sigma)+n}}\right), \tag{1}$$

где

$$\alpha_0 = \int_b^a f(t)dt, \quad \alpha_{n,k} = \frac{i^k\lambda^k}{k!} c_{n,k} \int_b^a f(t)(\ln t)^{n+k} dt,$$

а величина $c_{n,k}$ определяется из разложения

$$\left(\frac{1}{x}((1+x)^{\sigma}-1)\right)^{k}=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n,k}x^{n}.$$

Двойной ряд в формуле (1) *является абсолютно сходящимся при достаточно больших r. Разложение* (1) *справедливо как асимптотическое разложение в случае если* $a=0$, $\int\limits_{0} t^{-\in}|f(t)|\,dt<\infty$ *при некотором* $\in>0$. *Это разложение справедливо как асимптотическое разложение и в случае* $b=\infty$, $\int^{\infty} t^{\in}|f(t)|\,dt<\infty$.

Доказательство. Воспользовавшись разложением функции e^{x} в ряд Тейлора и равенством

$$\exp(i\lambda|\ln rt|^{\sigma})=\exp(i\lambda\ln^{\sigma}r)\exp\left(i\lambda\ln^{\sigma-1}r\ln t\left(\frac{\ln r}{\ln t}\left(\left(1+\frac{\ln t}{\ln r}\right)^{\sigma}-1\right)\right)\right),$$

получим

$$\int_{b}^{a}f(t)\exp(i\lambda|\ln rt|^{\sigma})dt=\exp(i\lambda\ln^{\sigma}r)(\alpha_0+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^{k}l^{k}}{\ln^{k(1-\sigma)}r}\int_{b}^{a}f(t)\ln^{k}t\left(\frac{\ln r}{\ln t}\left(1+\frac{\ln t}{\ln r}\right)^{\sigma}-1)\right)^{k}dt.$$

Обозначив через $x=\ln t/\ln r$, мы получим разложение (1). Абсолютная сходимость ряда следует из того, что при больших r выполняется неравенство $\ln t<\ln r$. Заключительная часть теоремы следует из того, что сходимость интеграла

$$\int_{0}t^{\in}|f(t)|\,dt<\infty\quad\left(\int^{\infty}t^{\in}|f(t)dt<\infty\right)$$

влечет за собой сходимость интеграла

$$\int_{0}f(t)(\ln t)^{k}dt<\infty\quad\left(\int^{\infty}f(t)(\ln t)^{k}dt<\infty\right)\quad\text{при любом } k>0.$$

Замечание. Величину $c_{n,k}$ можно записать в конечном виде если вначале воспользоваться формулой Ньютона для бинома $((1+x)^{\sigma}-1)^{k}$, а затем использовать разложение в ряд Тейлора функции $(1+x)^{m\sigma}$.

Вычисление предельного множества Азарина некоторых функций

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned}u(z,\sigma)&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\tau^{\rho-1}r(r-\cos\theta)}{\tau^{2}-2\tau r\cos\theta+r^{2}}\exp(i\lambda|\ln\tau|^{\sigma})d\tau=\\&=\frac{r^{\rho}}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{(1-t\cos\theta)t^{\rho-1}}{t^{2}-2t\cos\theta+1}\exp(i\lambda|\ln tr|^{\sigma})dt,\end{aligned}\tag{2}$$

$$u_1(z,\sigma)=\Re u(z,\sigma),\quad u_2(z,\sigma)=\Im u(z,\sigma),$$

где $z=re^{i\theta}$, $\rho\in(0,1)$, $\sigma\in(0,1)$, $\lambda\geq 0$.

Методом комплексного интегрирования легко вычисляется следующий интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(1-t\cos\theta)t^{\rho-1}dt}{t^2-2t\cos\theta+1}=\frac{\cos\rho(\pi-\theta)}{\sin\rho\pi}. \tag{3}$$

Теорему 1 можно применять для случаев $a=0$, $b=\infty$,

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\frac{(1-t\cos\theta)t^{\rho-1}}{t^2-2t\cos\theta+1}.$$

$\theta\in(0,2\pi)$, $\rho\in(0,1)$. Согласно этой теореме, получаем при $\sigma\in(0,1)$

$$u_1(z,\sigma)=\frac{\cos\rho(\pi-\theta)}{\sin\rho\pi}r^{\rho}\cos(\lambda\ln^{\sigma}r)+\frac{O(1)r^{\rho}}{\ln^{1-\sigma}r},\ \ r\to\infty\ , \tag{4}$$

$$u_2(z,\sigma)=\frac{\cos\rho(\pi-\theta)}{\sin\rho\pi}r^{\rho}\sin(\lambda\ln^{\sigma}r)+\frac{O(1)r^{\rho}}{\ln^{1-\sigma}r},\ \ r\to\infty\ . \tag{5}$$

Для предельных множеств Азарина, введенных нами функций, справедливы соотношения:

$$\operatorname{Fr}u_1=\operatorname{Fr}u_2=\left\{\alpha\frac{\cos\rho(\pi-\theta)}{\sin\rho\pi}r^{\rho}:\alpha\in[-1,1]\right\} \tag{6}$$

при значениях параметров $\rho\in(0,1)$, $\sigma\in(0,1)$, $\lambda>0$.

Докажем, соотношение (6). Пусть $\alpha\in[-1,1]$, α – фиксированное число. Обозначим через

$$u_t(z)=\frac{u_1(tz,\sigma)}{t^{\rho}},\quad t_n\exp\left(\left(\frac{1}{\lambda}(\arccos\alpha+2\pi n)\right)^{1/\sigma}\right).$$

Из (4) следует, что при любом фиксированном r > 0 справедливо асимптотическое равенство

$$\left|u_{t_n}(re^{i\theta})-\alpha\frac{\cos\rho(\pi-\theta)}{\sin\rho\pi}r^{\rho}\right|=\frac{\cos\rho(\pi-\theta)}{\sin\rho\pi}r^{\rho}\left|\cos(\lambda\ln^{\sigma}t_nr)-\alpha+\frac{O(1)r^{\rho}}{\ln^{1-\sigma}t_nr}\right|,\ n\to\infty. \tag{7}$$

Из определения последовательности t_n и асимптотического равенства

$$(a+x_n)^{\sigma}=x_n^{\sigma}+\frac{\sigma a}{x_n^{1-\sigma}}+O\left(\frac{1}{x_n^{2-\sigma}}\right),\quad x_n\to\infty,$$

следует, что при любом фиксированном $r>0$

$$\lim_{n\to\infty}(\cos(\lambda\ln^{\sigma}t_nr)-\alpha)=0.$$

Отсюда и из (7) получаем, что внутри круга $\{z : |z|\le R\}$ последовательность $u_{t_n}(z)$ равномерно сходится к функции

$$w_{\alpha}(re^{i\theta})=\frac{\cos\rho(\pi-\theta)}{\sin\rho\pi}r^{\rho}.$$

Тем более сходимость имеет место в топологии пространства обобщенных функций Шварца в плоскости. Из определения предельного множества следует, что $\{w_{\alpha}(z):\alpha\in[-1,1]\}\subset\operatorname{Fr}u_3$. Так как из любой последовательности $t_n\to\infty$ можно выделить подпоследовательность вида

$$t_{n_k} = \exp\left(\left(\frac{\arccos \alpha_{n_k} + 2\pi n_k}{\lambda}\right)^{1/\sigma}\right),$$

где n_k – натуральное, $\alpha_{n_k} \to \alpha \in [-1,1]$, то других функций в предельном множестве не существует.

Если $h_k(\theta)$ – индикатор Фрагмена-Линделефа функции $u_k(z,\rho)$,

$$h_k(\theta) := \limsup_{r\to\infty} \frac{u_k(re^{i\theta},\rho)}{r^\rho}, \quad k = 1,2,$$

то справедливы равенства

$$h_1(\theta) = h_2(\theta) = \frac{|\cos\rho(\pi-\theta)|}{\sin\rho\pi}.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

Список литературы
References

1. Риекстыньш Э. Я. 1974. Асимптотические разложения интегралов.Т.1. Рига, Зинатне, 390.

Riyekstyn'sh E. Ya. 1974. Asimptoticheskiye razlozheniya integralov.T. 1 [Asymptotic expansions of integrals. T. 1]. Riga, Zinatne, 390. (in Russian)

2. Риекстыньш Э. Я. 1977. Асимптотические разложения интегралов. Т.2. Рига, Зинатне, 463.

Riyekstyn'sh E. Ya. 1974. Asimptoticheskiye razlozheniya integralov.T. 2 [Asymptotic expansions of integrals. T. 2]. Riga, Zinatne, 463. (in Russian)

3. Риекстыньш Э. Я. 1981. Асимптотические разложения интегралов.Т.3. Рига, Зинатне, 369.

Riyekstyn'sh E. Ya. 1974. Asimptoticheskiye razlozheniya integralov.T. 3 [Asymptotic expansions of integrals. T. 3]. Riga, Zinatne, 369. (in Russian)

4. Евграфов М. А. 1979. Асимптотические оценки и целые функции. М., Наука, 320.

Yevgrafov M. A. 1979. Asimptoticheskiye otsenki i tselyye funktsii [Asymptotic estimates and entire functions]. Moscow, Nauka, 320. (in Russian)

5. Азарин В. С. 1979. Об асимптотическом поведении субгармонических функций. Математический сборник, 108 (2): 147–167.

Azapin V. S. 1979. Ob asimptoticheskom povedenii subgapmonicheskikh funktsiy [On the asymptotic behavior of subharmonic functions]. Matematicheskij sbornik [Sbornik: Mathematics]. 108 (2): 147–167. (in Russian)

6. Левин Б. Я. 1956. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 632.

Levin B. Ya. 1956. Raspredeleniye korney tselykh funktsiy [Distribution of the zeros of entire functions]. Moscow, Gosudarstvennoye izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 632. (in Russian)

7. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. 2011. О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho\in(0,1)$ с положительными нулями. Известия Российской академии наук. Серия: математика, 75 (1): 3–28.

Braychev G. G., Sherstyukov V. B. 2011. O naimen'shem vozmozhnom tipe tselykh poryadkakh poryadka $\rho\in(0,1)$ s polozhitel'nymi nulyami [On the smallest possible type of entire functions of order $\rho\in(0,1)$ with positive zeros]. Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya: matematika [Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics]. 75 (1): 3–28.

8. Шерстюков В. Б. 2015. Распределение нулей канонических произведений и весо- вой индекс конденсации. Математический сборник, 206 (9): 139–180.

Sherstyukov V. B. 2015. Raspredeleniye nuley kanonicheskikh proizvedeniy i vesovoy indeks kondensatsii. [The distribution of the zeros of canonical products and the weighted index of condensation]. Matematicheskij sbornik [Sbornik: Mathematics]. 206 (9): 139–180. (in Russian).