

УДК 517.958 [550.3 + 551.5]

DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-1-97-104

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА КОАЛЕСЦЕНЦИИ  
ОБЛАЧНЫХ ЧАСТИЦ ВО ФРАКТАЛЬНОЙ СРЕДЕ****MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS OF COALESCENCE OF CLOUD  
PARTICLES IN A FRACTAL ENVIRONMENT****Т.С. Кумыков****T.S. Kumukov**

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»

(ИПМА КБНЦ РАН)

360004, Россия, КБР, г. Нальчик, ул. Шортанова 89 А

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS

89 A Shortanova St., Nalchik, 360004, Russia

E-mail: macist20@mail.ru

**Аннотация**

В работе предложена упрощенная модель образования аэрозольных частиц в грозовых облаках. Модель учитывает фрактальные свойства грозовых облаков, а ее решение было получено с помощью численных методов дробного исчисления. Построены новые профили расчетных кривых, которые согласуются с классической теорией коалесценции (теории Лифшица-Слезова-Вагнера).

**Abstract**

The paper proposes a new educational model of aerosol particles in thunderclouds. The model takes into account the fractal properties of the storm clouds, and its solution was obtained by numerical methods of fractional calculus. Built new profiles calculated curves that are consistent with the classical Lifshitz - Slezov-Wagner theory.

**Ключевые слова:** коалесценция, теория Лифшица-Слезова-Вагнера, фрактальная размерность, математическая модель..

**Keywords:** fractal structure, cloud drop, the heating effect, Lifshitz-Slezov-Wagner theory, fractal dimension, the mathematical model.

---

**1. Введение**

Вопросам образования и разделения электрических зарядов в облаке посвящены многочисленные исследования [1-10]. Хотя предложено большое количество объяснений, изучение закономерностей разделения электрических зарядов в облаках не закончено, и требуются дополнительные экспериментальные, теоретические исследования и разработка новых математических моделей физических процессов, приводящих к возникновению электрических полей, достаточных для развития молниевых разрядов.

Известно, что максимальный заряд, возникающий в грозовом облаке, обусловлен действием различных механизмов электризации, эффективность действия которых проявляется по-разному, в зависимости от стадии развития облака [9]. На начальной стадии развития грозового облака имеет место интенсивный фазовый переход воды, сопровождающийся нарушением контакта на гидрометеорах между водой, льдом и воздухом, что приводит к



электризации облачных частиц. Одним из таких переходов является процесс коалесценции в конвективных облаках.

В настоящее время эффективных математических моделей для описания кинетики фазового перехода первого рода в геофизических процессах учитывающие фрактальность облачной среды практически не существует, это объясняется сложной нелинейной связью между основными характеристиками системы. Известно, что конвективные облака обладают фрактальной структурой в результате слияния движущихся по определенному закону частиц, которые образуют кластеры. Эти кластеры можно назвать фрактальными [11] и они хорошо описываются с помощью аппарата дробного исчисления [12].

В настоящей работе предложена нелокальная модель процесса коалесценции в конвективных облаках в рамках теории Лифшица-Слезова-Вагнера. Согласно этой теории главную роль в процессе коалесценции играет механизм роста и растворения аэрозоля (частицы), который определяет вид конечного распределения аэрозолей по размерам.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую схему коалесценции, когда выпадающие частицы неподвижны и растут за счет диффузии из окружающего раствора и за счет реакции на поверхности аэрозоля. При определении концентрации по объемному количеству вещества, растворенному в единице объема раствора, диффузионный поток определяется по формуле

$$q(r, t) = \lambda \frac{\partial u(r, t)}{\partial r}, \quad (1)$$

где  $\lambda > 0$  – коэффициент диффузии растворенного вещества,  $u$  – концентрация насыщенного раствора,  $r$  – радиус частицы,  $t > 0$  – координата времени.

Диффузионный поток у поверхности частицы ( $r = R$ ) совпадает со скоростью изменения его радиуса  $\lambda > 0$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \lambda \left. \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (2)$$

В работе [13] с учетом значения критического радиуса  $R_0^3$ , отвечающее началу стадии коалесценции получено уравнение

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{R_0^3}{R(t)} \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R(t)} \right), \quad (3)$$

где  $R_0$  – критический радиус: при  $R > R_0$  зерно растет, а при  $R < R_0$  – растворяется.

В случае фрактальной структуры конвективного облака диффузионный поток определяется согласно [12], формулой

$$q(r, t) = \lambda \partial_{0r}^\alpha u(r, \tau), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4)$$

[14]:

$$D_{0r}^\alpha u(r, \tau) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(t-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t \frac{u(r, \tau) d\tau}{|t-\tau|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ u(r, \tau), & \alpha = 0, \\ \text{sign}(t-a) \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial t^{[\alpha]+1}} D_{0r}^{\alpha-[\alpha]-1} u(r, \tau), & \alpha > 0, \end{cases}$$

где  $[\alpha]$  – целая часть  $\alpha$ .

С учетом (2) и (4), в работе [15] было предложено обобщение уравнения (3) в виде

$$\partial_{0r}^\alpha R(t) = \frac{R_c^3(0)}{R(t)} \left( \frac{1}{R_c(t)} - \frac{1}{R(t)} \right). \quad (5)$$



Введем следующую безразмерную функцию  $u(t) = \frac{R(t)}{R_c(t)}$ , тогда уравнение (5) примет вид

$$\lambda \partial_{0t}^\alpha u(\tau) = \frac{1}{u(\tau)} \left( 1 - \frac{1}{u(\tau)} \right). \tag{6}$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде

$$u(t) = at^b, \tag{7}$$

где  $a > 0$ ,  $b \geq \alpha - 1$  – параметры, которые можно определить экспериментально.

Тогда

$$\lambda \partial_{0t}^\alpha \tau^b = \frac{1}{a^2 t^b} - \frac{1}{a^3 t^{2b}}. \tag{8}$$

Произведем в уравнении (6) замену производной по Капуто через производную Римана-Лиувилля с учетом соотношения (7), получим

$$\lambda D_{0+}^{\alpha-1} \frac{du(\tau)}{d\tau} = \frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\tau \frac{b\tau^{b-1}}{|t-\tau|^\alpha} d\tau. \tag{9}$$

В формуле (9) произведем следующие замены:  $y = \frac{\tau}{t}$ ,  $\tau = ty$ ,  $d\tau = tdy$ .

$$\begin{aligned} \frac{\lambda b}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 t^b y^{b-1} t^{-\alpha} (1-y)^{-\alpha} dy &= \frac{\lambda b t^{b-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} B(b, 1-\alpha) = \\ &= \frac{\lambda b t^{b-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(b)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(b+1-\alpha)} = \frac{\lambda b \Gamma(b) t^{b-\alpha}}{\Gamma(b+1-\alpha)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя (10) в (8) получаем

$$\frac{\lambda b \Gamma(b) t^{b-\alpha}}{\Gamma(b+1-\alpha)} = \frac{1}{a^2 t^b} - \frac{1}{a^3 t^{2b}}. \tag{11}$$

Положим для простоты:

$$A(t) = \frac{\lambda b \Gamma(b) t^{b-\alpha}}{\Gamma(b+1-\alpha)}. \tag{12}$$

Приходим с учетом соотношения (11) к квадратному уравнению относительно функции  $u(t)$

$$A(t)u^2(t) - u(t) + 1 = 0. \tag{13}$$

Решение уравнения (13) имеет вид

$$u_{1,2}(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4A(t)}}{2A(t)}. \tag{14}$$

Необходимо отметить, что в решении (14) функция  $A(t) \neq 0$ , так как  $t \neq 0$ .

С учетом соотношения (12) окончательное решение (14) примет вид

$$u_{1,2}(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \left( \frac{\lambda b \Gamma(b) t^{b-\alpha}}{\Gamma(b+1-\alpha)} \right)}}{2 \left( \frac{\lambda b \Gamma(b) t^{b-\alpha}}{\Gamma(b+1-\alpha)} \right)}. \tag{15}$$

Отметим, что решение (15) имеет ограничение по времени  $t$  вида:

$$t \leq \left( \frac{\Gamma(b+1-\alpha)}{a \lambda b \Gamma(b)} \right)^{\frac{1}{b-\alpha}}.$$

Формула (15) представляет собой частное решение уравнения модели в теории коалесценции Лифшица-Слезова-Вагнера в режиме роста и растворения с применением дробного исчисления.



С другой стороны в работе [16] предложена приближенная формула для дробной производной в виде

$$\frac{d^\alpha u(\tau_n)}{dt^\alpha} = \sigma_{\alpha, k} \sum_{j=0}^n \omega_j^{(\alpha)} [u_{n-j+1} - u_{n-j}] + o(k). \quad (16)$$

В нашем случае считается возможным следующая формула

$$\partial_{0,t}^\alpha R(t) \approx B \sum_{k=0}^{j-1} b_k [R_{j-k+1} - R_{j-k}], \quad (17)$$

которая является аналогом (16), где  $B = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$ , а  $b_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$ .

Подставив в формулу (17) уравнение (5) и после некоторых преобразований получим явную численную схему

$$R_{j+1} = R_j - \sum_{k=1}^{j-1} b_k [R_{j-k+1} - R_{j-k}] + \frac{K}{BR_j} \left( \frac{1}{R_{spj}} - \frac{1}{R_j} \right). \quad (18)$$

Формула (18) представляет собой численное решение уравнения модели в обобщенной теории коалесценции Лифшица-Слезова-Вагнера в режиме роста и растворения с применением дробного исчисления.

В работе [15] было предложено обобщение уравнения безразмерной функции (3), которое можно записать в виде

$$\partial_{0,t}^\alpha v(t) = \frac{K}{R_c(t)v(t)} \left( 1 - \frac{R_c(t)}{v(t)} \right), \quad (19)$$

где  $v(t) = u(t)R_c(t)$ .

Уравнение (19) решим с помощью конечно-разностной схемы. Для этого введем равномерную сетку с постоянным шагом  $\tau$  на временном отрезке от 0 до  $T$ ,  $T$  - произвольное целое положительное число. Тогда справедлива следующая аппроксимация  $v(t) \approx v(t_j)$ , где  $t_j = j\tau$ ,  $j = 0, 1, \dots, T-1$ . Следуя работе [16], приближенная формула для дробной производной записывается в виде

$$\partial_{0,t}^\alpha v(\tau) \approx B \sum_{k=0}^{j-1} b_k [v_{j-k+1} - v_{j-k}], \quad (20)$$

где  $B = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$ ,  $\Gamma(z)$  - гамма-функция Эйлера, а  $b_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$ .

Учитывая (20) из формулы (19), получим алгоритм численного решения в виде

$$v_{j+1} = v_j - \sum_{k=1}^{j-1} b_k [v_{j-k+1} - v_{j-k}] + \frac{K}{Bv_j R_{cj}} \left( 1 - \frac{R_{cj}}{v_j} \right). \quad (21)$$

Формула (21) представляет собой алгоритм численного решения уравнения диффузионного потока в обобщенной теории коалесценции ЛСВ в режиме роста и растворения аэрозоля в облачной среде.

### 3. Результаты моделирования

Численное моделирование проводилось с помощью программы Maple 18.

На рис.1. показаны расчетные кривые и поверхность, определяющая изменения относительного радиуса аэрозоля  $u(t)$  в зависимости от различных значений параметров  $t$  и  $\alpha$  согласно формуле (15) с учетом того, что  $a = 0,08; b = 0,04; \lambda = 1, t \in [0,1]$ .

Отсюда видно, что в режиме растворения и роста, образующиеся частицы, т.е. при достаточно малых и больших значениях  $u(t)$  ( $R \ll R_0, R \gg R_0$ ) с уменьшением показателя  $\alpha$  происходит замедление процесса в обоих режимах. Это означает, что показатель  $\alpha$  отвечает за интенсивность процесса.

Так же на рисунке видно особую точку, которую можно рассматривать как аналог точки бифуркации. Эта точка зависит от параметров модели  $\alpha$ ,  $a$  и  $b$ , а так же является решением следующего уравнения

$$\sqrt{\frac{-4a\lambda b\Gamma(b)t^{b-\alpha} - \Gamma(b+1-\alpha)}{\Gamma(b+1-\alpha)} \frac{t^{\alpha-b}\Gamma(b+1-\alpha)}{a\lambda b\Gamma(b)}} = 0.$$

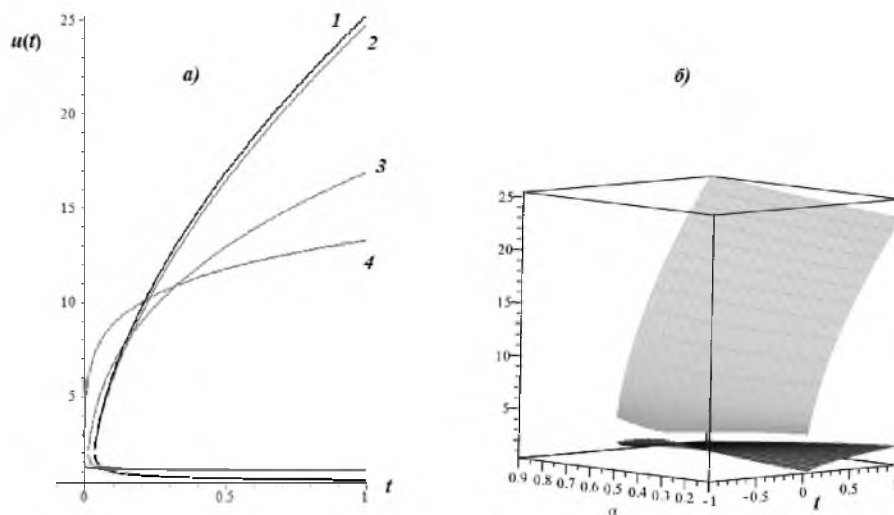


Рис.1. а) - расчетные кривые, полученные согласно формулам (15):  $\alpha=0,9$  (кривая 1);  $\alpha=0,7$  (кривая 2);  $\alpha=0,5$  (кривая 3);  $\alpha=0,3$  (кривая 4) б) – расчетная поверхность определяющая область изменения  $u(t)$  в зависимости от параметров  $t$  и  $\alpha$

Fig.1. a) - calculated curves obtained according to formulas (15):  $\alpha=0,9$  (curve 1);  $\alpha=0,7$  (curve 2);  $\alpha=0,5$  (curve 3);  $\alpha=0,3$  (curve 4), b) - the calculation surface determines the area of change  $u(t)$  depending on the parameters  $t$  and  $\alpha$

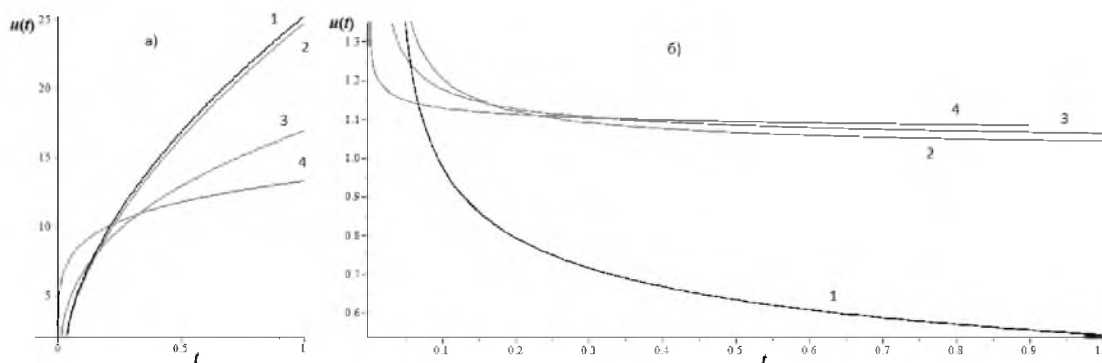


Рис.2. Расчетные кривые, полученные согласно формулам (15):  $\alpha=0,9$  (кривая 1);  $\alpha=0,7$  (кривая 2);  $\alpha=0,5$  (кривая 3);  $\alpha=0,3$  (кривая 4): а) - в режиме роста частицы; б) – в режиме растворения частицы

Fig.2. Calculated curves obtained according to formulas (15):  $\alpha=0,9$  (curve 1);  $\alpha=0,7$  (CRI-Vaya 2);  $\alpha=0,5$  (curve 3);  $\alpha=0,3$  (curve 4): a) - in the mode of particle growth; b) - in the mode of particle dissolution

На рис. 2 приведены расчетные кривые изменения относительного радиуса аэрозоля  $u(t)$  в режиме роста (рис. 2а) и растворения (рис. 2б) согласно различным значениям параметров  $t$  и  $\alpha$ .

Видно, что в режиме роста и растворения при достаточно малых значениях  $\alpha$  расчётные кривые перегруппировываются с бесконечно длинными «степенными хвостами» в результате чего происходит замедление процесса коалесценции в обоих режимах.

На рис.3. показаны расчетные кривые, определяющие изменения относительного радиуса аэрозоля  $R(t)$  в зависимости от различных значений параметров  $t$  и  $\alpha$  согласно формуле (18) с учетом того, что параметры были взяты из работы [17] и  $\alpha \in (0,1]$ .

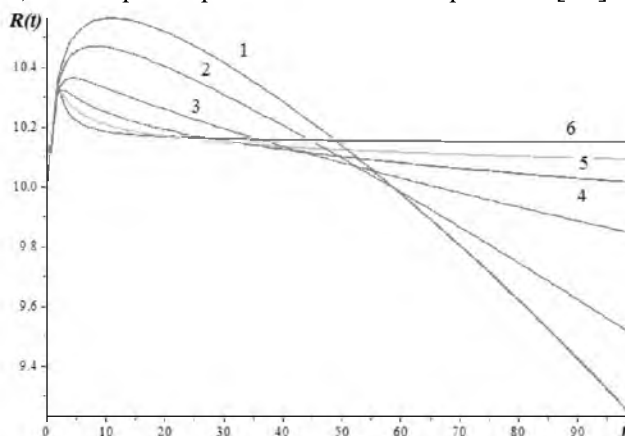


Рис.3. Расчетные кривые, полученные согласно формуле (9) в зависимости от параметров  $t$  и  $\alpha$

Fig.3. Calculated curves obtained according to the formula (9) depending on the parameters  $t$  and  $\alpha$

Отсюда видно, что в режиме растворения и роста, образующиеся частицы, т.е. при достаточно малых и больших значениях  $R(t)$  ( $R \ll R_0$ ,  $R \gg R_0$ ) с уменьшением показателя  $\alpha$  происходит замедление процесса в обоих режимах. Это означает, что показатель  $\alpha$  отвечает за интенсивность процесса.

Видно, что в режиме роста и растворения при достаточно малых значениях  $\alpha$  расчетные кривые перегруппировываются с бесконечно длинными «степенными хвостами» в результате чего происходит замедление процесса коалесценции в обоих режимах.

На рис.4. приведены расчетные кривые, определяющие изменения относительного радиуса аэрозоля в безразмерном виде  $u_i = v_i/R_{c_j}$  в зависимости от времени  $t$  при различных значениях параметра  $\alpha$  согласно формуле (21). Параметры задачи были взяты из работы [17] при  $\alpha \in (0,1]$ .

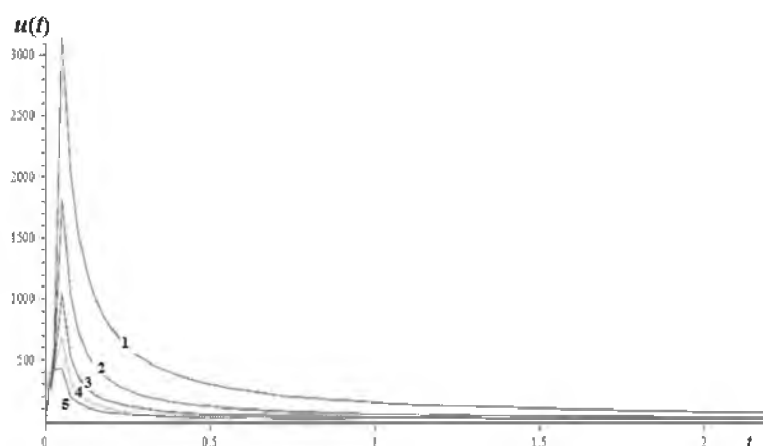


Рис. 4. Расчетные кривые относительного радиуса облачного аэрозоля в безразмерном виде в зависимости от времени  $t$  полученные согласно формуле (21) при различных значениях параметра  $\alpha$

Fig. 4. Calculated curves of the relative radius of the cloud aerosol in dimensionless form depending on the time obtained according to the formula (21) at different values of the parameter  $\alpha$

Из рисунка видно, что распределение облачных аэрозолей по размерам осуществляется в двух режимах: в режиме роста и в режиме растворения, что согласуется с классической теорией ЛСВ. Заметим, что в случае  $\alpha \rightarrow 0$  наблюдается уменьшение масштабов процессов коалесценции и растворения облачных аэрозолей, так как критический радиус  $R_c(t)$ , при котором существуют эти процессы, тоже уменьшается.

#### 4. Заключение

Результаты математического моделирования показали, что значения функции (15) имеют аналогичную динамику в сравнении со значениями специальной функции типа Миттаг-Леффлера. Поэтому в результате существования «степенных хвостов» в динамике относительного радиуса капли процесс роста замедляется. Также показано, что параметр  $\alpha$  в динамике относительного радиуса капли является параметром интенсивности, и что ее изменение отражается на кинетике роста капель. Получено решение этой модели в явном виде и построены его расчетные кривые. Предложенная упрощенная математическая модель процесса коалесценции облачных частиц во фрактальной облачной среде, обобщающая теорию Лифшица–Слезова–Вагнера, может быть использована для исследования различных процессов в облаках.

#### Список литературы References

1. Качурин Л.Г., Морачевский В.Г. 1965. Кинетика фазовых переходов воды в атмосфере. Л., Гидрометеиздат. 114.  
Kachurin L.G., Morachevskij V.G. 1965. Kinetika fazovyh perekhodov vody v atmosfere. L., Gidrometeoizdat. 114.
2. Мейсон Б.Дж. 1961. Физика облаков. Л., Гидрометеиздат, 542.  
Mason B.J. 1957. Physics of clouds. Clarendon, Oxford, 542.
3. Мучник В.М. 1974. Физика грозы. Л., Гидрометеиздат, 351.  
Muchnik V.M. 1974. Fizika grozy. L., Gidrometeoizdat, 351.
4. Чалмерс Дж.А. 1974. Атмосферное электричество. Л., Гидрометеиздат, 420.  
Chalmers J. A. 1949. Atmospheric Electricity. Oxford (The Clarendon Press), 175.
5. Юман М. 1972. Молния. М., Изд-тво «Мир», 328.  
YUman M. 1972. Molniya. M., Izd-tvo «Mir», 328.
6. Ribeira J.C. 1950. On the thermo-dielectric effect. Ann. Acad. Brasil. Sci. 22 (3): 547-556.
7. Workman E.J., Reynold S.E. 1956. Electrical phenomena occurring during the freezing of delute aqueous solution and their possible relationship to thunderstorm electricity. Phys.Rev. 94 (4) :1073-1075.
8. Аджиев А. Х., Куповых Г.В. 2004. Атмосферно-электрические явления на северном кавказе. Таганрог: 122.  
Adzhiev A. H., Kupovyh G.V. 2004. Atmosferno-ehlektricheskie yavleniya na severnom kavkaze. Taganrog: 122.
9. Куповых Г.В., Морозов В.Н., Шварц Я.М. 1998. Теория электродного эффекта в атмосфере. Таганрог. Изд-во ТРТУ, 123.  
Kupovyh G.V., Morozov V.N., SHvarc YA.M. 1998. Teoriya ehlektrodnogo ehffekta v at-mosfere. Taganrog. Izd-vo TRTU, 123.
10. Потапов А.А. 2005. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Издательство: Университетская книга, 848.  
Potapov A.A. 2005. Fraktaly v radiofizike i radiolokacii: Topologiya vyborki. Izdatel'stvo: Universitetskaya kniga, 848.
11. Нахушев А.М. 2003. Дробное исчисление и его применение. М., Физматлит, 272.  
Nahushev A.M. 2003. Drobnoe ischislenie i ego primenenie. M., Fizmatlit, 272.
12. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. 1979. Физическая кинетика: М., Наука, главная редакция физико-математической литературы, 527.  
Lifshic E.M., Pitaevskij L.P. 1979. Fizicheskaya kinetika: M., Nauka, glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 527.
13. Нахушев А.М. 1995. Уравнения математической биологии. М., Высшая школа, 301.



Nahushev A.M. 1995. Uravneniya matematicheskoy biologii. M., Vysshaya shkola, 301.

14. Кумыков Т. С. 2014. Применение дробного исчисления в теории Лифшица-Слезова. Материалы Всероссийской научной конференции молодых ученых «Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики» Нальчик: 72-75.

Kumukov T. S. 2014. Primenenie drobnogo ischisleniya v teorii Lifshica-Slezova. Materialy Vserossijskoj nauchnoj konferencii molodyh uchenyh «Sovremennye voprosy matematicheskoy fiziki, matematicheskoy biologii i informatiki» Nal'chik: 72-75.

15. Sweilam N.H., Khader M.M., Mahdy A.M.S. 2012. Numerical studies for solving fractional-order logistic equation. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 78 (8) : 1199-1210.

Michael D. H. 1998. Origin of Anorthosite by Textural Coarsening: Quantitative Measurements of a Natural Sequence of Textural Development journal of petrology, 39 (7): 1307–1323.