УДК 517. 923
DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-2-121-135

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛЬЕНАРА-ШИПАРА К РЕШЕНИЮ ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ

APPLICATION OF LIENAR−SHIPAR METHOD TO SOLVING OF HOMOGENEOUS FRACTIONAL DIFFERENTIAL EULER-TYPE EQUATIONS ON THE HALF-AXIS

Н.В. Жуковская
N.V. Zhukovskaya

Белорусский государственный университет,
Республика Беларусь,
220030, г. Минск, пр. Независимости, 4

Belarusian State University,
4 Independence Avenue, Minsk, 220030, Republic of Belarus

E-mail: nataliazhukouskaya@gmail.com

Аннотация
В статье получено решение однородного дифференциального уравнения дробного порядка типа Эйлера на полуоси в классе функций, представимых дробным интегралом порядка α с плотностью из $L_1(1;+\infty)$. С помощью метода эрмитовых форм (метода Льенара−Шипара) получены условия разрешимости для случаев двух, трех и любого конечного числа производных. Показано, что в случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, исходное уравнение допускает решение с логарифмическими особенностями.

Abstract
In the article the solution to the homogeneous fractional differential Euler-type equation on the half-axis is given in the class of functions representable by the fractional integral of order α with the density of $L_1(1;+\infty)$. Using method of Hermitian forms (Lienar−Shipar method) solvability conditions for the cases of two, three and a finite number of derivatives are obtained. It is shown that in the case when the characteristic equation has multiple roots, original equation admits solution with logarithmic singularities.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение типа Эйлера, дробный интеграл Римана−Лиувилля, дробная производная Римана−Лиувилля, метод эрмитовых форм, теорема Эрмита, метод Льенара−Шипара.

Keywords: fractional differential Euler-type equation, Riemann−Liouville fractional integral, Riemann−Liouville fractional derivative, method of Hermitian forms, Hermite's theorem, Lienar−Shipar method.

Введение

1. Дифференциальные уравнения дробного порядка находят обширные приложения в различных областях математики, механики и физики. Изложение теории и библиографию можно найти, например, в [8, 9, 10, 15, 17, 18]. Частным случаем таких уравнений являются дифференциальные уравнения Эйлерова типа. Метод их решения обычно основывается на преобразовании Меллина, что для однородных уравнений, имеющих в качестве решения степенные функции, не всегда является допустимым. В предлагаемой работе дается решение однородного дифференциального уравнения дробного порядка $\alpha+m$ Эйлерова типа с дробными производными Римана – Лиувилля на полуоси $(1;+\infty)$ сведением к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Дается общее решение уравнения в случае, когда все корни характеристического многочлена различны, а также в более общем случае, когда среди корней характеристического многочлена имеются кратные. Методом эрмитовых форм (методом Льенара – Шипара) исследована разрешимость рассматриваемого уравнения для случаев двух, трех или любого конечного числа дробных производных Римана – Лиувилля, сформулированы достаточные условия линейной независимости решений данного уравнения, получен признак разрешимости уравнения в классе $I^{\alpha}(L_1(1;+\infty))$ функций, представимых дробным интегралом порядка α с плотностью из $L_1(1;+\infty)$.

Теорема Эрмита

2. Эрмитом была рассмотрена следующая задача [11, 12]: *дано алгебраическое уравнение* $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0$ *с произвольными комплексными коэффициентами. Требуется узнать, сколько корней оно имеет в верхней полуплоскости.*

Эта задача была решена Эрмитом с помощью некоторой специальной формы. Льенаром и Шипаром была предложена модификация метода Эрмита, суть которого заключается в следующем.

Рассмотрим функцию:

$$-i\,\frac{f(x)\overline{f}(y)-f(y)\overline{f}(x)}{x-y}=\sum_{k,l=0}^{n-1}A_{kl}x^ky^l,$$

где

$$\overline{f}(x)=\overline{a_0}x^n+\overline{a_1}x^{n-1}+...+\overline{a_n}$$

– многочлен с комплексно сопряженными коэффициентами.

По этой функции строим эрмитову форму:

$$H(f;x_0,...,x_{n-1})=\sum_{k,l=0}^{n-1}A_{kl}x_k\overline{x_l},$$

коэффициенты которой действительны.

Теорема 1 (Эрмита). *Если* n^+ *– число положительных,* n^- *– число отрицательных квадратов формы* $H(f;x_0,...,x_{n-1})$, *то* $f(x)$ *имеет ровно* $\left(n-n^+-n^-\right)$ *корней общих с* $\overline{f}(x)$, *и, кроме того, еще* n^+ *корней в верхней полуплоскости и* n^- *корней в нижней.*

Доказательство теоремы 1 приведено в [11, 12].

Уравнение типа Эйлера с конечным числом дробных производных $(D_{1+}^{\alpha}y)$ на полуоси $(1;+\infty)$

2. На полуоси $(1;+\infty)$ рассмотрим однородное дифференциальное уравнение порядка $\alpha+m$:

$$A_m x^m (D_{1+}^{\alpha+m}y)(x)+A_{m-1}x^{m-1}(D_{1+}^{\alpha+m-1}y)(x)+...+A_0(D_{1+}^{\alpha}y)(x)=0, \qquad (1)$$

где $0<\alpha<1,\ m\in\mathbb{N},$ коэффициенты $A_0,A_1,...,A_m\in\mathbb{C},$ $(D_{1+}^{\alpha+m}y)(x)$ – дробная производная Римана−Лиувилля, определяемая формулой [17, 18]:

$$(D_{1+}^{\alpha+m}y)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_1^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \qquad 1<x<+\infty.$$

Решение $y(x)$ будем искать в классе $\mathrm{I}^{\alpha}(L_1(1;+\infty))$ функций, представимых дробным интегралом порядка α с плотностью из $L_1(1;+\infty)$. Обозначив $z=D_{1+}^{\alpha}y,$ получим уравнение Эйлера [13]:

$$A_m x^m z^{(m)}(x)+A_{m-1}x^{m-1}z^{(m-1)}(x)+...+A_0 z(x)=0. \qquad (2)$$

Сделав замену $x=e^t,\ 0<t<+\infty,$ приводим (2) к виду:

$$a_m\tilde{z}^{(m)}(t)+a_{m-1}\tilde{z}^{(m-1)}(t)+...+a_0\tilde{z}(t)=0, \qquad (3)$$

где $\tilde{z}(t)=z(e^t)$ и коэффициенты $a_0,\,a_1,...,\,a_m$ выражаются через $A_0,\,A_1,...,\,A_m$ [13]. Уравнению (3) ставим в соответствие характеристический многочлен:

$$P_m(\lambda)=a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+...+a_1\lambda+a_0.$$

Пусть λ – корень кратности k многочлена $P_m(\lambda)$. Тогда такому корню λ многочлена $P_m(\lambda)$ соответствуют k решений $z_1(x)=x^{\lambda},\quad z_2(x)=x^{\lambda}\ln x,\ ...,$ $z_k(x)=x^{\lambda}\ln^{k-1}x$ уравнения (2). Для решения уравнения (1) получим дробно-дифференциальные уравнения $D_{1+}^{\alpha}y_1=x^{\lambda},\ D_{1+}^{\alpha}y_2=x^{\lambda}\ln x,\ ...,\ D_{1+}^{\alpha}y_k=x^{\lambda}\ln^{k-1}x.$

Для $\left(D_{1+}^{\alpha}y_1\right)(x)=x^{\lambda}$, используя [1, 2, 6, 7, 10, 14, 17, 18], получим решение исходного уравнения (1) в виде:

$$y_1(x)=\mathrm{I}_{1+}^{\alpha}(D_{1+}^{\alpha}y_1)(x)=\mathrm{I}_{1+}^{\alpha}(t^{\lambda})=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^x\frac{t^{\lambda}dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=$$

$$=\left(\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}-\frac{\mathrm{B}_{1/x}(\lambda+1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)x^{\alpha+\lambda}=\frac{(-1)^{\alpha}(1-x)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\,{}_2\mathrm{F}_1\left[\begin{matrix}1,\,-\lambda\\1+\alpha\end{matrix}\middle|1-x\right],$$

где $\mathrm{B}_z(a,b)=\int_0^z t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$ − неполная бета-функция [1, 2, 14].

При условии $\mathrm{Re}\,\lambda < -1$ функция $y_1(x) \in \mathrm{I}^\alpha(L_1(1;+\infty))$. Если $\mathrm{Re}\,\lambda \geq -1$, то решению $z_1(x) = x^\lambda$ уравнения (2) не соответствуют никакие решения исходного уравнения (1) в искомом классе.

Решениям $z_2(x), ..., z_k(x)$ соответствуют решения уравнения (1) вида [1, 2, 6, 7, 10, 14, 17, 18]:

$$y_2(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^x \frac{t^\lambda \ln t\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \frac{x^{\alpha+\lambda}\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\left(\psi(\lambda+1)-\psi(\alpha+\lambda+1)+\ln x\right)+$$

$$+\frac{x^{\alpha-1}}{(1+\lambda)^2\Gamma(\alpha)}\,{}_3\mathrm{F}_2\left[\left.\begin{matrix}1+\lambda,\ 1+\lambda,\ 1-\alpha\\ 2+\lambda,\ 2+\lambda\end{matrix}\right|\frac{1}{x}\right],$$

$$y_3(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^x \frac{t^\lambda \ln^2 t dt}{(x-t)^{1-\alpha}} =$$

$$=\frac{x^{\alpha+\lambda}\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\Big((\psi(\lambda+1)-\psi(\alpha+\lambda+1)+\ln x)^2+\psi'(\lambda+1)-\psi'(\alpha+\lambda+1)\Big)-$$

$$-\frac{2x^{\alpha-1}}{(1+\lambda)^3\Gamma(\alpha)}\,{}_4\mathrm{F}_3\left[\left.\begin{matrix}1+\lambda,\ 1+\lambda,\ 1+\lambda,\ 1-\alpha\\ 2+\lambda,\ 2+\lambda,\ 2+\lambda\end{matrix}\right|\frac{1}{x}\right],\ \ ...,$$

$$y_k(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^x \frac{t^\lambda \ln^{k-1} t dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = x^{\alpha+\lambda}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left(\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\right)\ln^{k-i-1} x+$$

$$+\frac{(-1)^k(k-1)!\,x^{\alpha-1}}{(1+\lambda)^k\Gamma(\alpha)}\,{}_{k+1}\mathrm{F}_k\left[\left.\begin{matrix}1+\lambda,\ 1+\lambda,\ ...,1+\lambda,\ 1-\alpha\\ 2+\lambda,\ 2+\lambda,\ ...,2+\lambda\end{matrix}\right|\frac{1}{x}\right].$$

Здесь $\psi(x)$ − пси-функция Эйлера [1, 2, 14], $\mathrm{Re}\,\lambda < -1$, функции $y_2(x), ...,$ $y_k(x) \in \mathrm{I}^\alpha(L_1(1;+\infty))$. Если $\mathrm{Re}\,\lambda \geq -1$, то решениям $z_k(x) = x^\lambda \ln^{k-1} x$ уравнения (2) не соответствуют никакие решения исходного уравнения (1) в искомом классе.

Теорема 2. *Пусть характеристический многочлен* $P_m(\lambda)$ *имеет* κ_1 *простых корней* λ_{j1} $(j=1,...,\kappa_1)$, κ_2 *корней* λ_{j2} $(j=1,...,\kappa_2)$ *кратности 2, ...,* κ_l *корней* λ_{jl} $(j=1,...,\kappa_l)$ *кратности* l *в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,\lambda < -1$, *причем* $\kappa_1+\kappa_2+...+\kappa_l=\kappa$, $\kappa \leq m$. *Тогда общее решение уравнения* (1) *имеет вид:*

$$y(x) = c_0\left(x-1\right)^{\alpha-1}+\sum_{j=1}^{\kappa_1}c_{j1}\left(\frac{\Gamma(\lambda_{j1}+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda_{j1}+1)}-\frac{\mathrm{B}_{1/x}(\lambda_{j1}+1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)x^{\alpha+\lambda_{j1}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{\kappa_2}c_{j2}\frac{\Gamma(\lambda_{j2}+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda_{j2}+1)}x^{\alpha+\lambda_{j2}}\left(1+\psi(\lambda_{j2}+1)-\psi(\alpha+\lambda_{j2}+1)+\ln x\right)-$$

$$-\frac{\mathrm{B}_{1/x}(\lambda_{j2}+1,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+\lambda_{j2}}+\frac{x^{\alpha-1}}{(1+\lambda_{j2})^2\Gamma(\alpha)}\,{}_3\mathrm{F}_2\left[\left.\begin{matrix}1+\lambda_{j2},\ 1+\lambda_{j2},\ 1-\alpha\\ 2+\lambda_{j2},\ 2+\lambda_{j2}\end{matrix}\right|\frac{1}{x}\right]+$$

$$+...+\sum_{j=1}^{\kappa_l}c_{jl}\sum_{k=1}^{l}x^{\alpha+\lambda_{jl}}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{d^i}{d\lambda_{jl}^i}\left(\frac{\Gamma(\lambda_{jl}+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda_{jl}+1)}\right)\ln^{k-i-1}x+$$

$$+\frac{(-1)^k (k-1)!\,x^{\alpha-1}}{(1+\lambda_{jl})^k\,\Gamma(\alpha)}\;{}_{k+1}\mathrm{F}_k\left[\begin{matrix}1+\lambda_{jl},\,1+\lambda_{jl},\,...,1+\lambda_{jl},\,1-\alpha\\ 2+\lambda_{jl},\,2+\lambda_{jl},\,...,2+\lambda_{jl}\end{matrix}\middle|\,\frac{1}{x}\right],$$

где $\mathrm{B}_z(a,b)=\int\limits_0^z t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$ *– неполная бета-функция,* c_0, c_{ij} *– произвольные постоянные.*

Применим к исследованию уравнения (1) метод эрмитовых форм (метод Льенара–Шипара) [3, 4, 5, 11, 12, 16].

Обозначим $Q_m(t)=P_m(-it-1)$ и пусть $\overline{Q_m}(t)$ – многочлен, коэффициенты которого комплексно сопряжены к коэффициентам $Q_m(t)$. В отличие от случая уравнения на интервале $(0,1)$, для уравнения на полуоси $(1,+\infty)$ подходят решения, соответствующие корням многочлена $Q_m(t)$, лежащим в нижней полуплоскости.

Пусть $\text{НОД}\left(Q_m(t),\overline{Q_m}(t)\right)=d_p(t)$ – многочлен степени $p\le m$. При $p=0$ имеем $d_0(t)\equiv 1$. Из теоремы Эрмита [11, 12] вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* r *и* s *– ранг и сигнатура эрмитовой формы* $H(Q_m;t_0,...,t_{m-1})$. *Тогда уравнение* (1) *имеет* $\left(\frac{r-s}{2}+1\right)$ *линейно независимых решений. Если эрмитова форма* $H(Q_m;t_0,...,t_{m-1})$ *определена отрицательно, то уравнение* (1) *имеет* $(m+1)$ *линейно независимых решений. Если эрмитова форма* $H(Q_m;t_0,...,t_{m-1})$ *определена положительно, то уравнение* (1) *имеет одно линейно независимое решение* $y(x)=c_0\left(x-1\right)^{\alpha-1}$, *где* c_0 *– произвольная постоянная.*

Пусть $0<p\le m$. Если многочлен $d_p(t)$ не имеет действительных корней, то p обязательно четное и корни многочлена $d_p(t)$ образуют пары комплексно сопряженных чисел. Решениям уравнения (1) соответствуют корни, лежащие в нижней полуплоскости. Их будет ровно $\frac{p}{2}$. Если многочлен $d_p(t)$ имеет w действительных корней, то в нижней полуплоскости будет ровно $\left(\frac{p-w}{2}\right)$ корней.

В этих случаях вместо теоремы 3 имеет место

Теорема 4. *Пусть* r *и* s *– ранг и сигнатура эрмитовой формы* $H(Q_m;t_0,...,t_{m-1})$. *Тогда уравнение* (1) *имеет* $\left(\frac{r-s}{2}+1+\frac{p-w}{2}\right)$ *линейно независимых решений.*

Уравнение типа Эйлера с двумя дробными производными $(D^{\alpha}_{1+}y)$ на полуоси $(1;+\infty)$

3. Рассмотрим частный случай уравнения (1) с двумя дробными производными:

$$A_1x(D^{\alpha+1}_{1+}y)(x)+A_0(D^{\alpha}_{1+}y)(x)=0, \tag{4}$$

где $A_0,\ A_1 \in \mathbb{C}$. Обозначив $z = D_{0+}^{\alpha} y$, получим уравнение Эйлера [13]:

$$A_1 x z'(x) + A_0 z(x) = 0. \qquad (5)$$

Сделав замену $x = e^t$, $0 < t < +\infty$, приводим (5) к виду:

$$A_1 z'(t) + A_0 z(t) = 0. \qquad (6)$$

Уравнению (6) ставим в соответствие характеристический многочлен $P_1(\lambda) = A_1\lambda + A_0$. Соответствующая эрмитова форма имеет вид:

$$H(Q_1; t_0) = E t_0 \overline{t_0},$$

где $E = 2A_1\overline{A_1} - (A_1\overline{A_0} + A_0\overline{A_1}) \in \mathbb{R}$.

Теорема 5.

1. *Пусть* $E < 0$. *Тогда уравнение* (4) *имеет два линейно независимых решения.*

2. *Пусть* $E \geq 0$. *Тогда уравнение* (4) *имеет одно линейно независимое решение* $y(x) = c_0\left(x-1\right)^{\alpha-1}$, *где* c_0 *– произвольная постоянная.*

В частном случае, когда $A_0,\ A_1 \in \mathbb{R}$, эрмитова форма принимает вид $H(Q_1; t_0) = 2A_1(A_1 - A_0)t_0\overline{t_0}$ и картину разрешимости уравнения (4) в предположении, что $A_1 > 0$, определяет

Следствие 1.

1. *Пусть* $A_1 > 0,\ A_1 < A_0$. *Тогда уравнение* (4) *имеет два линейно независимых решения.*

2. *Пусть* $A_1 > 0,\ A_1 > A_0$. *Тогда уравнение* (4) *имеет одно линейно независимое решение* $y(x) = c_0\left(x-1\right)^{\alpha-1}$, *где* c_0 *– произвольная постоянная.*

Уравнение типа Эйлера с тремя дробными производными $(D_{1+}^{\alpha} y)$ на полуоси $(1; +\infty)$

4. Рассмотрим частный случай уравнения (1) с тремя дробными производными:

$$A_2 x^2 (D_{1+}^{\alpha+2} y)(x) + A_1 x (D_{1+}^{\alpha+1} y)(x) + A_0 (D_{1+}^{\alpha} y)(x) = 0, \qquad (7)$$

где $A_0,\ A_1,\ A_2 \in \mathbb{C}$. Обозначив $z = D_{0+}^{\alpha} y$, получим уравнение Эйлера [13]:

$$A_2 x^2 z''(x) + A_1 x z'(x) + A_0 z(x) = 0. \qquad (8)$$

Сделав замену $x = e^t$, $0 < t < +\infty$, приводим (8) к виду:

$$A_2 z''(t) + (A_1 - A_2) z'(t) + A_0 z(t) = 0. \qquad (9)$$

Уравнению (9) ставим в соответствие характеристический многочлен:

$$P_2(\lambda) = A_2\lambda^2 + (A_1 - A_2)\lambda + A_0.$$

Соответствующая эрмитова форма имеет вид:

$$H(Q_2; t_0, t_1) = At_1\overline{t_1} + Bt_1\overline{t_0} + Bt_0\overline{t_1} + Ct_0\overline{t_0},$$

где $A = A_2(3\overline{A_2} - \overline{A_1}) + \overline{A_2}(3A_2 - A_1),\ B = i(A_2(2\overline{A_2} + \overline{A_0} - \overline{A_1}) - \overline{A_2}(2A_2 + A_0 - A_1)),$
$C = (3A_2 - A_1)(2\overline{A_2} + \overline{A_0} - \overline{A_1}) + (3\overline{A_2} - \overline{A_1})(2A_2 + A_0 - A_1).$

Теорема 6.

1. *Пусть* r *и* s *– ранг и сигнатура эрмитовой формы* $H(Q_2; t_0, t_1)$. *Тогда уравнение* (7) *имеет* $\left(\dfrac{r-s}{2} + 1\right)$ *линейно независимых решений.*

2. *Пусть* $A < 0,\ AC - B^2 > 0.$ *Тогда уравнение* (7) *имеет три линейно независимых решения.*

3. *Пусть* $A > 0,\ AC - B^2 > 0.$ *Тогда уравнение* (7) *имеет одно линейно независимое решение* $y(x) = c_0\left(x-1\right)^{\alpha-1}$, *где* c_0 *− произвольная постоянная.*

4. *Пусть* $AC - B^2 < 0.$ *Тогда уравнение* (7) *имеет два линейно независимых решения.*

5. *Пусть* $AC - B^2 = 0.$ *Тогда уравнение* (7) *при* $s = -1$ *имеет два линейно независимых решения, а при* $s = 1$ *одно линейно независимое решение* $y(x) = c_0\left(x-1\right)^{\alpha-1}$, *где* c_0 *− произвольная постоянная.*

Если $d_2(t) \neq 1,$ то $d_2(t) \equiv Q_2(t) \equiv \overline{Q_2}(t)$ – квадратный трехчлен с действительными коэффициентами.

Пусть D – дискриминант многочлена $Q_2(t)$. Если $\mathrm{D} < 0,$ то $Q_2(t)$ имеет 2 комплексно сопряженных корня. Искомому решению соответствует корень в нижней полуплоскости.

Уравнение (7) будет иметь 2 линейно независимых решения с учетом решения $y(x) = c_0\left(x-1\right)^{\alpha-1}$, где c_0 – произвольная константа. Если $\mathrm{D} \geq 0,$ то $Q_2(t)$ имеет 2 действительных корня (с учетом кратности). В этом случае уравнение (7) имеет 1 решение $y(x) = c_0\left(x-1\right)^{\alpha-1}$.

В частном случае, когда $A_0,\ A_1,\ A_2 \in \mathbb{R}$, эрмитова форма принимает вид:

$$H(Q_2; t_0, t_1) = \gamma t_1\overline{t_1} + \beta t_0\overline{t_0},$$

где $\gamma = 2A_2(3A_2 - A_1),\ \ \beta = 2(3A_2 - A_1)(2A_2 + A_0 - A_1)$ и картину разрешимости уравнения (7) в предположении, что $A_2 > 0$ для $d_2(t) \equiv 1$ определяет

Следствие 2.

1. *Пусть* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 > A_1, \\ 2A_2 + A_0 > A_1. \end{cases}$ *Тогда уравнение* (7) *имеет одно линейно независимое решение* $y(x) = c_0\left(x-1\right)^{\alpha-1}$, *где* c_0 *− произвольная постоянная.*

2. *Пусть* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 > A_1, \\ 2A_2 + A_0 < A_1, \end{cases}$ *или* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 < A_1, \\ 2A_2 + A_0 < A_1. \end{cases}$ *Тогда уравнение* (7) *имеет два линейно независимых решения.*

3. *Пусть* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 < A_1, \\ 2A_2 + A_0 > A_1. \end{cases}$ *Тогда уравнение* (7) *имеет три линейно независимых решения.*

Пусть $d_2(t) \neq 1.$ Тогда $d_2(t)$ – квадратный трехчлен с действительными коэффициентами.

Если w – число действительных корней многочлена $d_2(t),$ то либо $w = 0,$ либо $w = 2.$ Тогда вместо теоремы 6 верна

Теорема 7. *Уравнение* (7) *имеет* $\left(\dfrac{2-w}{2}+1\right)$ *линейно независимых решений.*

Уравнение типа Эйлера с конечным числом дробных производных $(D_-^{\alpha} y)$ на полуоси $(1;+\infty)$

5. На полуоси $(1;+\infty)$ рассмотрим однородное дифференциальное уравнение порядка $\alpha+m$:

$$A_m x^m (D_-^{\alpha+m} y)(x) + A_{m-1} x^{m-1} (D_-^{\alpha+m-1} y)(x) + \ldots + A_0 (D_-^{\alpha} y)(x) = 0, \qquad (10)$$

где $0 < \alpha < 1,$ $m \in \mathbb{N},$ коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{C},$ $(D_-^{\alpha+m} y)(x)$ – дробная производная Римана−Лиувилля, определяемая формулой [17, 18]:

$$(D_-^{\alpha+m} y)(x) = -\left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}, \qquad 1 < x < +\infty.$$

Решение $y(x)$ будем искать в классе $I^{\alpha}(L_1(1;+\infty))$ функций, представимых дробным интегралом порядка α с плотностью из $L_1(1;+\infty)$.

Обозначив $z = D_-^{\alpha} y$, получим уравнение Эйлера [13]:

$$A_m x^m z^{(m)}(x) + A_{m-1} x^{m-1} z^{(m-1)}(x) + \ldots + A_0 z(x) = 0. \qquad (11)$$

Сделав замену $x = e^t$, $0 < t < +\infty$, приводим (11) к виду:

$$a_m \tilde{z}^{(m)}(t) + a_{m-1}\tilde{z}^{(m-1)}(t) + \ldots + a_0 \tilde{z}(t) = 0, \tag{12}$$

где $\tilde{z}(t) = z(e^t)$ и коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_m$ выражаются через $A_0, A_1, \ldots, A_m$ [13]. Уравнению (12) ставим в соответствие характеристический многочлен:

$$P_m(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0.$$

Пусть λ – корень кратности k многочлена $P_m(\lambda)$. Тогда такому корню λ многочлена $P_m(\lambda)$ соответствуют k решений $z_1(x) = x^\lambda$, $z_2(x) = x^\lambda \ln x$, ..., $z_k(x) = x^\lambda \ln^{k-1} x$ уравнения (11). Для решения уравнения (10) получим дробно-дифференциальные уравнения $D_-^\alpha y_1 = x^\lambda$, $D_-^\alpha y_2 = x^\lambda \ln x$, ..., $D_-^\alpha y_k = x^\lambda \ln^{k-1} x$.

Для $\left(D_-^\alpha y_1\right)(x) = x^\lambda$, используя [1, 2, 6, 7, 10, 14, 17, 18], получим решение исходного уравнения (10) в виде:

$$y_1(x) = \mathrm{I}_-^\alpha (D_-^\alpha y_1)(x) = \mathrm{I}_-^\alpha (t^\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{t^\lambda dt}{(t-x)^{1-\alpha}}.$$

Сделав замену $t = \dfrac{1}{\tau}$, $x = \dfrac{1}{u}$, после преобразований получим:

$$y_1(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u \frac{u^{1-\alpha}\tau^{1-\alpha} d\tau}{(u-\tau)^{1-\alpha}\tau^{2+\lambda}} = \frac{u^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^u \tau^{-1-\alpha-\lambda}(u-\tau)^{\alpha-1} d\tau.$$

Сделав замену $\tau = u\sigma$, $x = \dfrac{1}{u}$, окончательно будем иметь:

$$y_1(x) = \frac{1}{u^{\alpha+\lambda}\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \sigma^{-1-\alpha-\lambda}(1-\sigma)^{\alpha-1} d\sigma =$$
$$= \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{B}(-\alpha-\lambda; \alpha) = \frac{\Gamma(-\alpha-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)} x^{\alpha+\lambda}.$$

При условии $\operatorname{Re}\lambda < -1$ функция $y_1(x) \in \mathrm{I}^\alpha(L_1(1; +\infty))$. Если $\operatorname{Re}\lambda \geq -1$, то решению $z_1(x) = x^\lambda$ уравнения (11) не соответствуют никакие решения исходного уравнения (10) в искомом классе.

Для $\left(D_-^\alpha y_2\right)(x) = x^\lambda \ln x$, используя [1, 2, 6, 7, 10, 14, 17, 18], получим решение исходного уравнения (10) в виде:

$$y_2(x) = \mathrm{I}_-^\alpha (D_-^\alpha y_2)(x) = \mathrm{I}_-^\alpha (t^\lambda \ln t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{t^\lambda \ln t \, dt}{(t-x)^{1-\alpha}}.$$

Сделав замену $t=\frac{1}{\tau},\ x=\frac{1}{u},$ после преобразований получим:

$$y_2(x)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^u \frac{u^{1-\alpha}\ln\tau d\tau}{(u-\tau)^{1-\alpha}\tau^{1+\alpha+\lambda}}=-\frac{u^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^u \tau^{-1-\alpha-\lambda}(u-\tau)^{\alpha-1}\ln\tau d\tau.$$

Сделав замену $\tau=u\sigma,\ x=\frac{1}{u},$ окончательно будем иметь:

$$y_2(x)=-\frac{\ln u}{u^{\alpha+\lambda}\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \sigma^{-1-\alpha-\lambda}(1-\sigma)^{\alpha-1}d\sigma-$$

$$-\frac{1}{u^{\alpha+\lambda}\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \sigma^{-1-\alpha-\lambda}(1-\sigma)^{\alpha-1}\ln\sigma d\sigma=$$

$$=\frac{x^{\alpha+\lambda}\ln x}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{B}(-\alpha-\lambda;\alpha)-\frac{x^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \sigma^{-1-\alpha-\lambda}(1-\sigma)^{\alpha-1}\ln\sigma d\sigma=$$

$$=\frac{x^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)}\left(\mathrm{B}(-\alpha-\lambda;\alpha)\ln x+\frac{d}{ds}\mathrm{B}(-\alpha-\lambda;\alpha)\right)=$$

$$=x^{\alpha+\lambda}\left(\frac{\Gamma(-\alpha-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)}\ln x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{ds}\left(\frac{\Gamma(-\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(-\lambda)}\right)\right)=$$

$$=\frac{x^{\alpha+\lambda}\Gamma(-\alpha-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)}\left(\ln x-\psi(-\alpha-\lambda)+\psi(-\lambda)\right).$$

Поступая аналогично для $\left(D_-^\alpha y_k\right)(x)=x^\lambda\ln^k x$, используя [1, 2, 6, 7, 10, 14, 17, 18], получим решение исходного уравнения (10) в виде:

$$y_k(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty \frac{t^\lambda \ln^{k-1}t\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}=x^{\alpha+\lambda}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left(\frac{\Gamma(-\alpha-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)}\right)\ln^{k-i-1}x.$$

Решениям $z_2(x),\ \ldots,\ z_k(x)$ соответствуют решения уравнения (10) вида:

$$y_2(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty \frac{t^\lambda\ln t\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}=\frac{x^{\alpha+\lambda}\Gamma(-\alpha-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)}\left(\ln x-\psi(-\alpha-\lambda)+\psi(-\lambda)\right),$$

$$y_3(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty \frac{t^\lambda\ln^2 t\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{x^{\alpha+\lambda}\Gamma(-\alpha-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)}\left((\psi(-\lambda)-\psi(-\alpha-\lambda)+\ln x)^2+\psi'(-\alpha-\lambda)-\psi'(-\lambda)\right),$$

. . . .

$$y_k(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty \frac{t^\lambda\ln^{k-1}tdt}{(t-x)^{1-\alpha}}=x^{\alpha+\lambda}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left(\frac{\Gamma(-\alpha-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)}\right)\ln^{k-i-1}x.$$

Здесь $\psi(x)$ − пси-функция Эйлера [1, 2, 14], $\operatorname{Re}\lambda<-1$, функции $y_2(x)$, ..., $y_k(x)\in I^{\alpha}(L_1(1;+\infty))$. Если $\operatorname{Re}\lambda\ge-1$, то решениям $z_k(x)=x^{\lambda}\ln^{k-1}x$ уравнения (11) не соответствуют никакие решения исходного уравнения (10) в искомом классе.

Теорема 8. *Пусть характеристический многочлен* $P_m(\lambda)$ *имеет* κ_1 *простых корней* λ_{j1} $(j=1,\dots,\kappa_1)$, κ_2 *корней* λ_{j2} $(j=1,\dots,\kappa_2)$ *кратности 2, ...,* κ_l *корней* λ_{jl} $(j=1,\dots,\kappa_l)$ *кратности* l *в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda<-1$, *причем* $\kappa_1+\kappa_2+\dots+\kappa_l=\kappa$, $\kappa\le m$. *Тогда общее решение уравнения* (10) *имеет вид:*

$$y(x)=\sum_{j=1}^{\kappa_1}c_{j1}\frac{\Gamma(-\alpha-\lambda_{j1})}{\Gamma(-\lambda_{j1})}x^{\alpha+\lambda_{j1}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{\kappa_2}c_{j2}\frac{\Gamma(-\alpha-\lambda_{j2})}{\Gamma(-\lambda_{j2})}x^{\alpha+\lambda_{j2}}\left(\psi(-\lambda_{j2})-\psi(-\alpha-\lambda_{j2})+\ln x\right)+\dots$$

$$\dots+\sum_{j=1}^{\kappa_l}c_{jl}x^{\alpha+\lambda_{jl}}\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\frac{d^i}{d\lambda_{jl}^i}\left(\frac{\Gamma(-\alpha-\lambda_{jl})}{\Gamma(-\lambda_{jl})}\right)\ln^{k-i-1}x, \tag{13}$$

где c_0, c_{ij} *− произвольные постоянные.*

Используем метод Льенара−Шипара [3, 4, 5, 11, 12, 16].

Обозначим $Q_m(t)=P_m(-it-1)$ и пусть $\overline{Q_m}(t)$ − многочлен, коэффициенты которого комплексно сопряжены к коэффициентам $Q_m(t)$.

В отличие от случая уравнения на интервале $(0,1)$, для уравнения на полуоси $(1,+\infty)$ подходят решения, соответствующие корням многочлена $Q_m(t)$, лежащим в нижней полуплоскости.

Пусть $\text{НОД}\left(Q_m(t),\overline{Q_m}(t)\right)=d_p(t)$ – многочлен степени $p\le m$. При $p=0$ имеем $d_0(t)\equiv1$. Из теоремы Эрмита [11, 12] вытекает

Теорема 9. *Пусть* r *и* s *– ранг и сигнатура эрмитовой формы* $H(Q_m;t_0,\dots,t_{m-1})$. *Тогда уравнение* (10) *имеет* $\left(\frac{r-s}{2}\right)$ *линейно независимых решений. Если эрмитова форма* $H(Q_m;t_0,\dots,t_{m-1})$ *определена отрицательно, то уравнение* (10) *имеет* m *линейно независимых решений. Если эрмитова форма* $H(Q_m;t_0,\dots,t_{m-1})$ *определена положительно, то уравнение* (10) *решений не имеет.*

Пусть $0<p\le m$. Если многочлен $d_p(t)$ не имеет действительных корней, то p обязательно четное, и корни многочлена $d_p(t)$ образуют пары комплексно сопряженных чисел. Решениям уравнения (10) соответствуют корни, лежащие в нижней полуплоскости. Их будет ровно $\frac{p}{2}$. Если многочлен $d_p(t)$ имеет w действительных корней, то в нижней полуплоскости будет ровно $\left(\frac{p-w}{2}\right)$ корней.

В этих случаях вместо теоремы 9 имеет место

Теорема 10. *Пусть* r *и* s *– ранг и сигнатура эрмитовой формы* $H(Q_m;t_0,...,t_{m-1})$. *Тогда уравнение* (10) *имеет* $\left(\frac{r-s}{2}+\frac{p-w}{2}\right)$ *линейно независимых решений.*

Уравнение типа Эйлера с двумя дробными производными $(D_-^{\alpha}y)$ на полуоси $(1;+\infty)$

6. Рассмотрим частный случай уравнения (10) с двумя дробными производными:

$$A_1x(D_-^{\alpha+1}y)(x)+A_0(D_-^{\alpha}y)(x)=0, \tag{14}$$

где $A_0,\ A_1\in\mathbb{C}$. Обозначив $z=D_-^{\alpha}y$, получим уравнение Эйлера [13]:

$$A_1x\,z'(x)+A_0z(x)=0. \tag{15}$$

Сделав замену $x=e^t$, $0<t<+\infty$, приводим (15) к виду:

$$A_1\,z'(t)+A_0z(t)=0. \tag{16}$$

Уравнению (16) ставим в соответствие характеристический многочлен $P_1(\lambda)=A_1\lambda+A_0$. Соответствующая эрмитова форма имеет вид

$$H(Q_1;t_0)=Et_0\overline{t_0},$$

где $E=2A_1\overline{A_1}-(A_1\overline{A_0}+A_0\overline{A_1})\in\mathbb{R}$.

Теорема 11.

1. *Пусть* $E<0$. *Тогда уравнение* (14) *имеет одно линейно независимое решение.*

2. *Пусть* $E\geq 0$. *Тогда уравнение* (14) *решений не имеет.*

В частном случае, когда $A_0,\ A_1\in\mathbb{R}$, эрмитова форма принимает вид $H(Q_1;t_0)=2A_1(A_1-A_0)t_0\overline{t_0}$ и картину разрешимости уравнения (14) в предположении, что $A_1>0$, определяет

Следствие 3.

1. *Пусть* $A_1>0,\ A_1<A_0$. *Тогда уравнение* (14) *имеет одно линейно независимое решение.*

2. *Пусть* $A_1>0,\ A_1>A_0$. *Тогда уравнение* (14) *решений не имеет.*

Уравнение типа Эйлера с тремя дробными производными $(D_-^{\alpha}y)$ на полуоси $(1;+\infty)$

7. Рассмотрим частный случай уравнения (10) с тремя дробными производными:

$$A_2x^2(D_-^{\alpha+2}y)(x)+A_1x(D_-^{\alpha+1}y)(x)+A_0(D_-^{\alpha}y)(x)=0, \tag{17}$$

где $A_0,\ A_1,\ A_2\in\mathbb{C}$. Обозначив $z=D_-^{\alpha}y$, получим уравнение Эйлера [13]:

$$A_2x^2z''(x)+A_1xz'(x)+A_0z(x)=0. \tag{18}$$

Сделав замену $x=e^t$, $0<t<+\infty$, приводим (18) к виду:

$$A_2z''(t)+(A_1-A_2)z'(t)+A_0z(t)=0. \tag{19}$$

Уравнению (19) ставим в соответствие характеристический многочлен:

$$P_2(\lambda)=A_2\lambda^2+(A_1-A_2)\lambda+A_0.$$

Соответствующая эрмитова форма имеет вид:

$$H(Q_2;t_0,t_1)=At_1\overline{t_1}+Bt_1\overline{t_0}+Bt_0\overline{t_1}+Ct_0\overline{t_0},$$

где $A=A_2(3\overline{A_2}-\overline{A_1})+\overline{A_2}(3A_2-A_1)$, $B=i(A_2(2\overline{A_2}+\overline{A_0}-\overline{A_1})-\overline{A_2}(2A_2+A_0-A_1))$,
$C=(3A_2-A_1)(2\overline{A_2}+\overline{A_0}-\overline{A_1})+(3\overline{A_2}-\overline{A_1})(2A_2+A_0-A_1)$.

Теорема 12.

1. *Пусть* r *и* s *– ранг и сигнатура эрмитовой формы* $H(Q_2;t_0,t_1)$. *Тогда уравнение* (17) *имеет* $\left(\dfrac{r-s}{2}\right)$ *линейно независимых решений.*

2. *Пусть* $A<0$, $AC-B^2>0$. *Тогда уравнение* (17) *имеет два линейно независимых решения.*

3. *Пусть* $A>0$, $AC-B^2>0$. *Тогда уравнение* (17) *решений не имеет.*

4. *Пусть* $AC-B^2<0$. *Тогда уравнение* (17) *имеет одно линейно независимое решение.*

5. *Пусть* $AC-B^2=0$. *Тогда уравнение* (17) *при* $s=-1$ *имеет одно линейно независимое решение, а при* $s=1$ *решений не имеет.*

Если $d_2(t)\neq 1$, то $d_2(t)\equiv Q_2(t)\equiv\overline{Q_2}(t)$ – квадратный трехчлен с действительными коэффициентами.

Пусть D – дискриминант многочлена $Q_2(t)$. Если $\mathrm{D}<0$, то $Q_2(t)$ имеет 2 комплексно сопряженных корня. Искомому решению соответствует корень в нижней полуплоскости. Уравнение (17) будет иметь одно линейно независимое решение. Если $\mathrm{D}\geq 0$, то $Q_2(t)$ имеет 2 действительных корня (с учетом кратности). В этом случае уравнение (17) решений не имеет.

В частном случае, когда A_0, A_1, $A_2\in\mathbb{R}$, эрмитова форма принимает вид:

$$H(Q_2;t_0,t_1)=\gamma t_1\overline{t_1}+\beta t_0\overline{t_0},$$

где $\gamma=2A_2(3A_2-A_1)$, $\beta=2(3A_2-A_1)(2A_2+A_0-A_1)$ и картину разрешимости уравнения (17) в предположении, что $A_2>0$ для $d_2(t)\equiv 1$ определяет

Следствие 4.

1. *Пусть* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 > A_1, \\ 2A_2 + A_0 > A_1. \end{cases}$ *Тогда уравнение* (17) *решений не имеет.*

2. *Пусть* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 > A_1, \\ 2A_2 + A_0 < A_1, \end{cases}$ *или* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 < A_1, \\ 2A_2 + A_0 < A_1. \end{cases}$ *Тогда уравнение* (17) *имеет одно линейно независимое решение.*

3. *Пусть* $\begin{cases} A_2 > 0, \\ 3A_2 < A_1, \\ 2A_2 + A_0 > A_1. \end{cases}$ *Тогда уравнение* (17) *имеет два линейно независимых решения.*

Пусть $d_2(t) \neq 1.$ Тогда $d_2(t)$ – квадратный трехчлен с действительными коэффициентами.

Если w – число действительных корней многочлена $d_2(t),$ то либо $w = 0,$ либо $w = 2.$ Тогда вместо теоремы 12 верна

Теорема 13. *Уравнение* (17) *имеет* $\left(\dfrac{2-w}{2}\right)$ *линейно независимых решений.*

Заключение

В работе изучен специальный тип дифференциальных уравнений дробного порядка типа Эйлера. Получено решение однородного дифференциального уравнения дробного порядка Эйлерова типа с дробными производными Римана – Лиувилля на полуоси $(1;+\infty)$. Дается общее решение уравнения в случае, когда все корни характеристического многочлена различны, а также в более общем случае, когда среди корней характеристического многочлена имеются кратные. Методом эрмитовых форм (методом Льенара – Шипара) исследована разрешимость рассматриваемых уравнений для случаев двух, трех и любого конечного числа дробных производных Римана – Лиувилля, сформулированы достаточные условия линейной независимости решений данного уравнения, получен признак разрешимости в специальных функциональных классах.

Список литературы
References

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1965. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, М: Наука, 294 с.

Bateman H., Erdelyi A. 1953. Higher transcendental functions. Vol. 1, McGraw-Hill, 1953, 316 p.

2. Гантмахер Ф. 1988. Р. Теория матриц, М.: Наука, 548 с.

Gantmacher F. R. 1988. The theory of matrices, M.: Nauka, 548 p.

3. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. 2014. Mittag–Leffler functions: related topics and applications, Springer-Verlag, Berlin, 443 p.

4. Debnath L., Bhatta D. 2007. Integral transforms and their applications. – ChapmanHall, 688 p.

5. Kilbas A. A., Trujillo J. J. 2001. Differential equations of fractional order: methods, results and problems – I / Applicable Analysis, Vol. 78, №1: 153-192.

6. Kilbas A. A., Trujillo J. J. 2002. Differential equations of fractional order: methods, results and problems – II / Applicable Analysis, Vol. 81, №3 – 4: 435-493.

7. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. 2006. Theory and applications of fractional differential equations. – Amsterdam: Elsevier, Vol. 204., 540 p.

8. Крейн М. Г., Наймарк М. А. 1936. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. – Харьков: ОНТИ, 40 с.

Krein M. G., Naimark M. A. 1981. The method of symmetric and Hermitian forms in the theory of separation of the roots of algebraic equations / Linear and Multilinear Algebra, Vol. 10(4), 1981: 265-308. (Published online: 02 Apr 2008 DOI: 10.1080/03081088108817420.)

9. Матвеев Н. М. 1967. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Высшая школа: 565.

Matveev N. M. 1967. Methods of integration of ordinary differential equations, M., Vysshaya shkola, 565 p.

10. Olver F., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W. 2010. NIST handbook of mathematical functions. – Cambridge University Press, 951 p.

11. Podlubny I. 1999. Fractional differential equations. – San-Diego: Academic Press, 340 p.

12. Постников М. М. 1981. Устойчивые многочлены. М.: Наука, 176 с.

Postnikov M. M. 1981. Stable polynomials, M.: Nauka, 176 p.

13. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. 1987. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., Наука и техника, 688 с.

Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. 1993. Fractional integrals and derivatives: theory and applications. – Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, 1012 p.