МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.926.4
DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-2-111-120

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СУММЫ РЕГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА И ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ВИДЕ КОМПОЗИЦИИ

PRESENTATION OF THE SUM OF REGULAR ELLIPTIC OPERATOR AND DEGENERATE ELLIPTIC OPERATORS OF HIGHER ORDER AS A COMPOSITION

А.В. Глушак
A.V. Glushak

Белгородский национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University,
85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: Glushak@.bsu.edu.ru

Аннотация
Рассматриваемое в работе дифференциальное уравнение в частных производных относится к классу уравнений с неотрицательной характеристической формой, которые также называют вырождающимися эллиптическими уравнениями. К изучению таких задач приводят некоторые задачи гидромеханики, газовой динамики, теории фильтрации и другие. Основное внимание при этом уделяется исследованию разрешимости граничных задач. В настоящей работе устанавливается представление суммы регулярного эллиптического оператора и вырождающихся эллиптических операторов в виде композиции похожих по структуре операторов, что позволит в дальнейшем исследовать и однозначную разрешимость соответствующей граничной задачи.

Abstract
The partial differential equation considered in this paper refers to a class of equations with a nonnegative characteristic form, also called degenerate elliptic equations. Some problems of hydromechanics, gas dynamics, filtration theory, etc. lead to the study of such problems. The main attention is paid to the investigation of the solvability of boundary problems. In this paper we establish a representation of the sum of a regular elliptic operator and degenerate elliptic operators in the form of a composition of operators similar in structure, which will allow us to further investigate the unique solvability of the corresponding boundary value problem.

Ключевые слова: вырождающиеся эллиптические дифференциальные операторы высокого порядка, композиция.
Key words: degenerate high-order elliptic differential operators, composition.

Введение

Дифференциальные уравнения с обращающимся в нуль коэффициентом при старшей производной не вписываются в рамки стандартной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и давно привлекали внимание широкого круга исследователей. Обзор литературы по уравнениям с неотрицательной характеристической формой, которые, в частности, включают вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных, можно найти в [1, 2]. В этих работах уже рассматривались вырождающиеся эллиптические граничные задачи, содержащие производные с различными весовыми функциями. В отличие от указанных работ [1, 2] в настоящей работе в уравнение введён регулярный эллиптический оператор порядка $2l$, что приведет к изменению в постановке граничных условий.

В настоящей статье предложен метод представления суммы регулярного эллиптического оператора и вырождающихся эллиптических операторов высокого порядка в виде композиции похожих по структуре операторов. Это представление в дальнейшем будет использовано для доказательства однозначной разрешимости соответствующей задачи Дирихле. Отметим, что априорная оценка решения указанной задачи Дирихле установлена ранее в статье [3].

Постановка задачи

В полосе $D=[0,d]\times R_n$ рассмотрим задачу Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами:

$$L_{2m}(D_\alpha,D_y)U(x,y)+L_{2p}(D_\beta,D_y)U(x,y)+L_{2l}(D_x,D_y)U(x,y)=F(x,y), \tag{1}$$

$$U(d,y)=\partial_x U(d,y)=\cdots=\partial_x^{m-1}U(d,y)=0, \tag{2}$$

$$U(0,y)=\partial_x U(0,y)=\cdots=\partial_x^{l-1}U(0,y)=0, \tag{3}$$

где $l<p<m$ – натуральные числа, $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ – мультииндекс,

$$L_{2m}(\tau,\xi)=a_1\tau^{2m}+a_2\xi^{2m}+a_3,\qquad L_{2p}(\tau,\xi)=b_1\tau^{2p}+b_2\xi^{2p}+b_3,\qquad L_{2l}(\tau,\xi)=d_1\tau^{2l}+d_2\xi^{2l}+d_3,$$

$$D_y^\mu U(x,y)=D_{y_1}^{\mu_1}\cdots D_{y_n}^{\mu_n}U(x,y),\quad D_yU(x,y)=-i\partial_y U(x,y),$$

$D_\alpha U(x,y)=i\sqrt{\alpha(x)}\partial_x\left(\sqrt{\alpha(x)}U(x,y)\right)$, $\alpha(x)\in C^{2m}[0,d]$, $\alpha(0)=0$, $\alpha(x)>0$ при $x>0$. Аналогично D_α определяется оператор D_β. Коэффициенты $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,d_1,d_2,d_3$ – действительные постоянные числа.

Условие 1. Многочлены $L_{2m}(\tau,\xi)$, $L_{2p}(\tau,\xi)$ и $L_{2l}(\tau,\xi)$ положительны при любых $(\tau,\xi)\in R_{n+1}$.

Условие 2. Пусть $\alpha(x),\beta(x)\in C^{2m}[0,d]$ и $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$. Пусть также $\partial_x\alpha(0)=\partial_x\beta(0)=0$.

Условие 3. Функции $\gamma(x)=\beta^{p/(m-p)}(x)$ и $\delta(x)=\left(\dfrac{\alpha^m(x)}{\beta^p(x)}\right)^{1/(m-p)}$ принадлежат $C^{2m}[0,d]$ и при этом $\partial_x\gamma(0)=\partial_x\delta(0)=0$.

Условие 4. а) Пусть $r=p-l\ge q=m-p$ и $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\delta(x)}{\gamma(x)}<\infty$, что равносильно условиям $2p\ge m+l$ и $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\alpha^{m/(m-p)}(x)}{\beta^{p(m-l)/((m-p)(p-l))}(x)}<\infty$.

б) Если хотя бы одно из условий п. а) не выполнено, то потребуем, чтобы

$$\lim_{x\to0+}\frac{\alpha^{2(p-l)+m_0}(x)}{\beta^{2p}(x)}=0,$$

где $m_0 = \left[\dfrac{2l(p-l)}{m-l}\right]$ ($[\cdot]$ – целая часть числа).

Обозначим через $H^{2m,2p,2l}_{\alpha,\beta}(D)$ пространство функций $U(x,y) \in L_2(D)$, для которых конечен квадрат нормы:

$$|||U(x,y)|||^2 = \sum_{j=0}^{2m} \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^d \left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j} \left|D^j_\alpha u(x,\xi)\right|^2 dxd\xi + \sum_{j=0}^{2p} \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^d \left(1+|\xi|^2\right)^{2p-j} \left|D^j_\beta u(x,\xi)\right|^2 dxd\xi +$$
$$+ \sum_{j=0}^{2l} \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^d \left(1+|\xi|^2\right)^{2l-j} \left|D^j_x u(x,\xi)\right|^2 dxd\xi ,$$

где $u(x,\xi) = F_{y\to\xi}[U(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty} U(x,y)\exp(-i\xi y)dy$ – преобразование Фурье функции $U(x,y) \in L_2(D)$ по переменной $y \in R_n$. Через $FH^{2m,2p,2l}_{\alpha,\beta}(D)$ мы будем обозначать пространство образов Фурье по переменной $y \in R_n$ функций из пространства $H^{2m,2p,2l}_{\alpha,\beta}(D)$.

Представление оператора в виде композиции

Определение 1. Будем говорить, что оператор $L_{2m}(D_\alpha,\xi) + L_{2p}(D_\beta,\xi) + L_{2l}(D_x,\xi)$ при $|\xi| \le \lambda_0$ принадлежит классу эквивалентности $\{M_{2r}(D_\gamma,\xi) \circ M_{2q}(D_\delta,\xi) \circ M_{2l}(D_x,\xi)\}$, порождённому композицией операторов $M_{2r}(D_\gamma,\xi)$, $M_{2q}(D_\delta,\xi)$, $M_{2l}(D_x,\xi)$, если для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует такое $d = d(\varepsilon_0)$, что при $0 < x < d(\varepsilon_0)$ имеет место представление

$$M_{2r}(D_\gamma,\xi) \circ M_{2q}(D_\delta,\xi) \circ M_{2l}(D_x,\xi) - L_{2m}(D_\alpha,\xi)u(x,\xi) - L_{2p}(D_\beta,\xi)u(x,\xi) - L_{2l}(D_\beta,\xi)u(x,\xi) = T(x,\xi)u(x,\xi),$$

при этом для любых $u(x,\xi) \in FH^{2m,2p,2l}_{\alpha,\beta}(D)$ и $|\xi| \le \lambda_0$ справедлива оценка

$$\|T(x,\xi)u(x,\xi)\| \le \varepsilon_0 \langle u(x,\xi)\rangle ,$$

где $||\cdot||$ – L_2-норма, $\langle u(x,\xi)\rangle^2 = \int_0^d \left(\sum_{j=0}^{2m} \left|D^j_\alpha u(x,\xi)\right|^2 + \sum_{j=0}^{2p} \left|D^j_\beta u(x,\xi)\right|^2 + \sum_{j=0}^{2l} \left|D^j_x u(x,\xi)\right|^2 \right) dx$.

Теорема. Пусть выполнены условия 1 – 4. Тогда существуют такие операторы $M_{2r}(D_\gamma,\xi)$, $M_{2q}(D_\delta,\xi)$, $M_{2l}(D_x,\xi)$ и число $\lambda_0 > 0$, что сумма $L_{2m}(D_\alpha,\xi) + L_{2p}(D_\beta,\xi) + L_{2l}(D_x,\xi)$ при $|\xi| \le \lambda_0$ принадлежит классу эквивалентности $\{M_{2r}(D_\gamma,\xi) \circ M_{2q}(D_\delta,\xi) \circ M_{2l}(D_x,\xi)\}$, порождённому композицией этих операторов.

Доказательство. Операторы $M_{2r}(D_\gamma,\xi)$, $M_{2q}(D_\delta,\xi)$, $M_{2l}(D_x,\xi)$ будем разыскивать в виде

$$M_{2r}(D_\gamma,\xi) = c_1(\xi)D^{2r}_\gamma + c_2(\xi), \qquad M_{2q}(D_\delta,\xi) = h_1(\xi)D^{2q}_\delta + h_2(\xi), \qquad M_{2l}(D_x,\xi) = g_1(\xi)D^{2l}_x + g_2(\xi) ,$$

где $r = p - l, q = m - p$, $\gamma(x), \delta(x)$ введены ранее, а неизвестные коэффициенты $c_1(\xi), c_2(\xi), h_1(\xi), h_2(\xi)$ и $g_1(\xi), g_2(\xi)$ подлежат определению.

Рассмотрим композицию операторов:

$$M_{2r}(D_\gamma,\xi) \circ M_{2q}(D_\delta,\xi) \circ M_{2l}(D_x,\xi)u(t,\xi) =$$
$$= c_1(\xi)h_1(\xi)g_1(\xi)D^{2r}_\gamma D^{2q}_\delta D^{2l}_x u(t,\xi) + c_1(\xi)h_2(\xi)g_1(\xi)D^{2r}_\gamma D^{2l}_x u(t,\xi) + c_2(\xi)h_1(\xi)g_1(\xi)D^{2q}_\delta D^{2l}_x u(t,\xi) +$$
$$+ c_2(\xi)h_2(\xi)g_1(\xi)D^{2l}_x u(t,\xi) + c_1(\xi)h_1(\xi)g_2(\xi)D^{2r}_\gamma D^{2q}_\delta u(t,\xi) + c_1(\xi)h_2(\xi)g_2(\xi)D^{2r}_\gamma u(t,\xi) +$$
$$+ c_2(\xi)h_1(\xi)g_2(\xi)D^{2q}_\delta u(t,\xi) + c_2(\xi)h_2(\xi)g_2(\xi)u(t,\xi) ,$$

и найдём неизвестные коэффициенты из условия принадлежности оператора $L_{2m}(D_\alpha,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)+L_{2l}(D_x,\xi)$ классу эквивалентности $\{M_{2r}(D_\gamma,\xi)\circ M_{2q}(D_\delta,\xi)\circ M_{2l}(D_x,\xi)\}$.

Не содержащее производных слагаемое у оператора $M_{2r}(D_\gamma,\xi)\circ M_{2q}(D_\delta,\xi)\circ M_{2l}(D_x,\xi)$ имеет вид $c_2(\xi)h_2(\xi)g_2(\xi)u(t,\xi)$, а у оператора $L_{2m}(D_\alpha,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)+L_{2l}(D_x,\xi)$ – вид $a_2\xi^{2m}+b_2\xi^{2p}+d_2\xi^{2l}+a_3+b_3+d_3$. Потребуем выполнения равенства:

$$c_2(\xi)h_2(\xi)g_2(\xi)u(t,\xi)=a_2\xi^{2m}+b_2\xi^{2p}+d_2\xi^{2l}+a_3+b_3+d_3. \tag{4}$$

Рассмотрим далее слагаемое $c_2(\xi)h_1(\xi)g_2(\xi)D_\delta^{2q}u(t,\xi)$ и покажем, что его можно включить в оператор $T(x,\xi)$, фигурирующий в определении 1. Действительно, выражение

$$D_\delta^{2q}u(t,\xi)=(i\delta(x))^{2q}\partial_x^{2q}u(t,\xi)+\sum_{j=0}^{2q-1}\rho_j(x)D_\delta^j u(x,\xi),$$

где $\rho_j(x)$ некоторые ограниченные функции, зависящие лишь от функции $\delta(x)$ и ее производных до порядка $2q$ и такие, что $\rho_j(0)=0,\ j=0,1,\ldots,2q-1$, при малых $d\le d_0,\ d_0>0$ в силу неравенства (см. лемму 2 [1])

$$\left\|D_\alpha^m v(x)\right\|\le\varepsilon_1^{s-m}\left\|D_\alpha^s v(x)\right\|+c_2\left(\varepsilon_1^{-m}+\varepsilon_1^{s-m}\right)\left\|v(x)\right\|,\quad \varepsilon_1>0,\ 0<m<s \tag{5}$$

может быть оценено следующим образом:

$$\left\|D_\delta^{2q}u(x,\xi)\right\|\le\left\|\delta^{2q}(x)D_x^{2q}u(x,\xi)\right\|+\varepsilon_1\left(\left\|D_\delta^{2q}u(x,\xi)\right\|+\left\|u(x,\xi)\right\|\right). \tag{6}$$

Поскольку $\delta^{2q}(x)=\alpha^{2m}(x)\cdot\beta^{-2p}(x)=\varepsilon^{2p}(x)\alpha^{2(m-p)}(x)$, то в силу условия 2 и неравенства (6) при достаточно малых $d\le d_1,\ d_1>0$ для любого $\varepsilon_1>0$ справедлива оценка:

$$\left\|\delta^{2q}(x)D_x^{2q}u(x,\xi)\right\|\le\varepsilon_1\left\|\alpha^{2(m-p)}(x)\partial_x^{2(m-p)}u(x,\xi)\right\|\le\varepsilon_1\left(\left\|D_\alpha^{2(m-p)}u(x,\xi)\right\|+\left\|u(x,\xi)\right\|\right)\le\varepsilon_1\langle u(x,\xi)\rangle. \tag{7}$$

Из неравенств (6), (7) следует, что любого $\varepsilon_0>0$ существует такое $d=d(\varepsilon_0)$, что при $0<x<d(\varepsilon_0)$ выполнена оценка:

$$\left\|D_\delta^{2q}u(x,\xi)\right\|\le\varepsilon_0\langle u(x,\xi)\rangle, \tag{8}$$

т.е. слагаемое $D_\delta^{2q}u(x,\xi)$ можно включить в оператор $T(x,\xi)$, фигурирующий в определении 1.

Аналогично доказывается, что слагаемое $D_\gamma^{2r}u(x,\xi)$ также можно включить в оператор $T(x,\xi)$. Рассмотрим теперь слагаемое $D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}u(x,\xi)$. Аналогично неравенству (6) устанавливается, что

$$\left\|D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}u(x,\xi)\right\|\le c_{10}\left(\left\|\gamma^{2r}(x)\partial_x^{2r}D_\delta^{2q}u(x,\xi)\right\|+\left\|D_\delta^{2q}u(x,\xi)\right\|\right)\le c_{10}\left(\left\|\gamma^{2r}(x)\partial_x^{2r}D_\delta^{2q}u(x,\xi)\right\|+\varepsilon_2\langle u(x,\xi)\rangle\right),\quad \varepsilon_2>0, \tag{9}$$

при этом мы воспользовались оценкой (8). Рассмотрим далее входящее в (9) выражение:

$$\gamma^{2r}(x)\partial_x^{2r}D_\delta^{2q}u(x,\xi)=\gamma^{2r}(x)\sum_{j=0}^{2r}C_{2r}^{j}\left((i\delta(x))^{2q}\right)^{(j)}\partial_x^{2(r+q)-j}u(x,\xi)+\gamma^{2r}(x)\partial_x^{2r}\sum_{j=0}^{2r-1}\rho_j(x)D_\delta^{j}u(x,\xi)\,. \tag{10}$$

В случае, когда $2(r+q)\le 2l$, т.е. $m\le 2l$, все производные с весом преобразуются в производные $\partial_x u(x,\xi)$, причем каждая такая производная будет иметь коэффициент, аннулирующийся при $x=0$. Поэтому, учитывая неравенство (10), мы запишем оценку:

$$\left\|D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}u(x,\xi)\right\|\le\varepsilon_0\langle u(x,\xi)\rangle\,. \tag{11}$$

Если $2l<2(r+q)\le 2p$, т.е. $2l<m\le p+l$, то производные порядков, не превосходящих $2l$, как и ранее, преобразуются в производные $\partial_x u(x,\xi)$, содержащие аннулирующиеся при $x=0$ множители, а все производные с весом порядков от $2l+1$ до $2p$ преобразуем к виду, содержащему только производные $D_\beta u(x,\xi)$ с аннулирующимися при $x=0$ множителями.

Действительно, рассмотрим, например, слагаемые, содержащие выражения вида

$$\gamma^{2r}(x)\left(\delta^{2q}(x)\right)^{(j)}\partial_x^{2(r+q)-j}u(x,\xi),\quad 0\le j\le 2(m-2l)-1<2r\,.$$

Тогда для функции

$$\begin{aligned}\gamma^{2r}(x)\left(\delta^{2q}(x)\right)^{(j)}&=\beta^{2(r+q)-j}(x)\cdot\beta^{2(p-m+l)+j}(x)\cdot\left(\alpha^{2m}(x)\cdot\beta^{-2p}(x)\right)^{(j)}=\\&=\beta^{2(r+q)-j}(x)\cdot\beta^{2(p-m+l)+j}(x)\cdot\sum_{k=0}^{j}C_j^k\cdot\left(\alpha^{2m}(x)\right)^{(k)}\cdot\left(\beta^{-2p}(x)\right)^{(j-k)}=\\&=\beta^{2(r+q)-j}(x)\cdot\beta^{2(p-m+l)+j}(x)\cdot\sum_{k=0}^{j}C_j^k\cdot\chi_k(x)\cdot\alpha^{2m-k}(x)\cdot\nu_{j-k}(x)\cdot\beta^{-2p+k-j}(x)\,,\end{aligned}$$

где $\chi_k(x),\nu_{j-k}(x),1\le k\le j$ – ограниченные функции, причем $\chi_k(0)=\nu_{j-k}(0)=0,\chi_0(x)=\nu_0(x)=1$, самый плохой для преобразования случай, когда рассматривается слагаемое при $k=j$. В этом случае функция

$$\beta^{2(-m+p+l)+j}(x)\cdot\chi_j(x)\cdot\alpha^{2m-j}(x)\cdot\nu_0(x)\cdot\beta^{-2p}(x)=\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)^{2m-j}\cdot\beta^{2l}(x)\cdot\chi_j(x),\quad 0\le j\le 2(m-2l)-1,$$

ограничена в силу условия 2, поэтому рассматриваемое выражение преобразуется к виду, содержащему только производные $D_\beta u(x,\xi)$.

Аналогично рассматриваются остальные слагаемые суммы в равенстве (10). Таким образом, оценка (11) справедлива также и при $2l<m\le p+l$.

Рассмотрим, наконец, пример, когда $2(r+q)>2p$, т.е. $m>p+l$. В этом случае все весовые производные порядков выше $2p+1$ преобразуются к виду, содержащему только $D_\alpha u(x,\xi)$, порядков от $2l+1$ до $2p$ – к виду, содержащему только $D_\beta u(x,\xi)$, остальные – к виду, содержащему только $\partial_x u(x,\xi)$. В самом деле, рассмотрим, например, слагаемые содержащие $\gamma^{2r}(x)\left(\delta^{2q}(x)\right)^{(j)}\partial_x^{2(r+q)-j}u(x,\xi),\quad 0\le j\le 2r$ и пусть вначале $0\le j\le 2(m-p-l)-1<2r$. Тогда для функции

$$\begin{aligned}\gamma^{2r}(x)\left(\delta^{2q}(x)\right)^{(j)}&=\alpha^{2(r+q)-j}(x)\cdot\alpha^{j-2(m-l)}(x)\cdot\beta^{2p}(x)\cdot\left(\delta^{2q}(x)\right)^{(j)}=\\&=\alpha^{2(r+q)-j}(x)\cdot\alpha^{j-2(m-l)}(x)\cdot\beta^{2p}(x)\cdot\sum_{k=0}^{j}C_j^k\cdot\chi_k(x)\cdot\alpha^{2m-k}(x)\cdot\nu_{j-k}(x)\cdot\beta^{-2p+k-j}(x)\end{aligned}$$

самый плохой для преобразования случай, когда рассматривается слагаемое при $k=j$. В этом случае функция $\alpha^{j-2(m-l)}(x)\cdot\chi_j(x)\cdot\alpha^{2m-j}(x)\cdot\nu_0(x)\cdot\beta^{2p}(x)=\alpha^{2l}(x)\cdot\chi_j(x),\quad 0\le j\le 2(m-p-l)-1,$ ограничена в силу условия 2, поэтому рассматриваемое выражение преобразуется к виду, содержащему только производные $D_\alpha u(x,\xi)$ с аннулирующимися при $x=0$ множителями.

Если $2(m-p-l)-1\le j\le 2(m-2l)-1<2r$, то, как мы уже знаем, весовые производные преобразуются к виду, содержащему только производные $D_\beta u(x,\xi)$.

Наконец, если $2(m-2l)-1\le j\le 2r$, то весовые производные, очевидно, преобразуется к виду, содержащему производные $\partial_x u(x,\xi)$ с аннулирующимися при $x=0$ множителями. Поскольку остальные слагаемые в (10) рассматриваются аналогично, то можно считать, что оценка (11) справедлива при любых m, удовлетворяющих условию 4, а это, в свою очередь, означает, что слагаемое $D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}u(x,\xi)$ можно включить в оператор $T(x,\xi)$, фигурирующий в определении 1. Продолжим далее доказательство теоремы. В операторы

$$M_{2r}(D_\gamma,\xi)\circ M_{2q}(D_\delta,\xi)\circ M_{2l}(D_x,\xi)\ \text{и}\ L_{2m}(D_\alpha,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)+L_{2l}(D_x,\xi)$$

входит слагаемое, содержащее производную $\partial_x^{2l}u(x,\xi)$, поэтому приравняем соответствующие коэффициенты и потребуем выполнения равенства

$$c_2(\xi)h_2(\xi)g_1(\xi)=d_1. \tag{12}$$

Прежде чем приравнивать коэффициенты при производных порядка $2(l+r)=2p$, запишем равенство:

$$\begin{aligned} D_\gamma^{2r}D_x^{2l}u(x,\xi)&=(-1)^l\cdot(i\gamma(x))^{2r}\cdot\partial_x^{2(r+l)}u(x,\xi)+\sum_{j=0}^{2r-1}\tilde\rho_j(x)D_\gamma^jD_x^{2l}u(x,\xi)=\\ &=(i\beta(x))^{2p}\cdot\partial_x^{2p}u(x,\xi)+\sum_{j=0}^{2r-1}\tilde\rho_j(x)D_\gamma^jD_x^{2l}u(x,\xi)=\\ &=D_\beta^{2p}u(x,\xi)+\sum_{k=0}^{2p-1}\omega_k(x)D_\beta^k u(x,\xi)+\sum_{j=0}^{2r-1}\tilde\rho_j(x)D_\gamma^jD_x^{2l}u(x,\xi) \end{aligned} \tag{13}$$

где $\tilde\rho_j(x)$ и $\omega_k(x)$ некоторые функции, такие что $\tilde\rho_j(0)=0,\ j=0,\dots 2r-1$ и $\omega_k(0)=0,\ k=0,\dots 2p-1$. В силу неравенства (5) при достаточно малых $d\le d_2,\ d_2>0$ для любого $\varepsilon_1>0$ справедлива оценка:

$$\left\|\sum_{k=0}^{2p-1}\omega_k(x)D_\beta^k u(x,\xi)+\sum_{j=0}^{2r-1}\tilde\rho_j(x)D_\gamma^jD_x^{2l}u(x,\xi)\right\|\le\varepsilon_1\left(\left\|D_\beta^{2p}u(x,\xi)\right\|+\left\|u(x,\xi)\right\|+\left\|D_\gamma^{2r}\partial_x^{2l}u(x,\xi)\right\|+\left\|D_x^{2l}u(x,\xi)\right\|\right). \tag{14}$$

Из (13), (14) вытекает справедливость неравенства

$$\left\|D_\gamma^{2r}D_x^{2l}u(x,\xi)\right\|\le c\langle u(x,\xi)\rangle,\quad c>0,$$

а, следовательно, и неравенства

$$\left\|\sum_{k=0}^{2p-1}\omega_k(x)D_\beta^k u(x,\xi)+\sum_{j=0}^{2r-1}\tilde\rho_j(x)D_\gamma^jD_x^{2l}u(x,\xi)\right\|\le\varepsilon_0\langle u(x,\xi)\rangle. \tag{15}$$

Таким образом, выражение

$$\sum_{k=0}^{2p-1}\omega_k(x)D_\beta^k u(x,\xi)+\sum_{j=0}^{2r-1}\tilde{\rho}_j(x)D_\gamma^j D_x^{2l}u(x,\xi)$$

мы включаем в оператор $T(x,\xi)$, а коэффициенты при производной $D_\beta^{2p}u(x,\xi)$ в операторах $M_{2r}(D_\gamma,\xi)\circ M_{2q}(D_\delta,\xi)\circ M_{2l}(D_x,\xi)$ и $L_{2m}(D_\alpha,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)+L_{2l}(D_x,\xi)$ приравниваем. Имеем

$$c_1(\xi)h_2(\xi)g_1(\xi)=b_1. \qquad .... \tag{16}$$

Заметим, однако, что в случае, когда выполнено условие

$$r=q\text{, т.е. } 2p=m+l\text{, и } \lim_{x\to 0}\frac{\delta(x)}{\gamma(x)}=k_0\text{, т.е. } \lim_{x\to 0}\frac{\alpha^{m/(m-p)}(x)}{\beta^{p(m-l)/((p-l)(m-p))}(x)}=k_0, \tag{17}$$

выражение $c_2(\xi)h_1(\xi)g_1(\xi)D_\delta^{2q}\partial_x^{2l}u(x,\xi)$ также содержит производную $D_\beta^{2p}u(x,\xi)$ и уравнение (16) следует заменить на уравнение:

$$c_1(\xi)h_2(\xi)g_1(\xi)+k_0^q c_2(\xi)h_1(\xi)g_1(\xi)=b_1. \tag{18}$$

Если $r\ge q$ и $\lim_{x\to 0}\frac{\delta(x)}{\gamma(x)}<\infty$, но условие (17) не выполнено, то производные $D_\delta u(x,\xi)$ преобразуются в $D_\gamma u(x,\xi)$ и аналогично (15) доказывается неравенство

$$\left\|D_\delta^{2q}D_x^{2l}u(x,\xi)\right\|\le\varepsilon_0\langle u(x,\xi)\rangle. \tag{19}$$

Чтобы оценить $\left\|D_\delta^{2q}D_x^{2l}u(x,\xi)\right\|$ в случае, когда не выполнено условие 4(а), для достаточно малых $d\le d_2,\, d_2>0$ запишем неравенство вида (6) с заменой $u(x,\xi)$ на $D_x^{2l}u(x,\xi)$, а именно:

$$\left\|D_\delta^{2q}D_x^{2l}u(x,\xi)\right\|\le\left\|\delta^{2q}(x)D_x^{2q+2l}u(x,\xi)\right\|+\varepsilon_1\left\|D_x^{2l}u(x,\xi)\right\|. \tag{20}$$

Функция $\delta^{2q}(x)=\alpha^{2q+2l-m_0}(x)\cdot\alpha^{2p-2l+m_0}(x)\cdot\beta^{-2p}(x)$, где $m_0=\left[\frac{2l(p-l)}{m-l}\right]$, в силу условия 4(б) содержит аннулирующийся при $x=0$ множитель $\alpha^{2p-2l+m_0}(x)\cdot\beta^{-2p}(x)$, поэтому с учетом неравенства

$$\left\|D_\alpha^{2q+2l-m_0}D_x^{m_0}u(x,\xi)\right\|\le M\left(\left\|D_\alpha^{2m}u(x,\xi)\right\|+\left\|D_x^{2l}u(x,\xi)\right\|+\left\|u(x,\xi)\right\|\right), \qquad ..(21)$$

доказанного в [4], для нормы $\left\|\delta^{2q}(x)D_x^{2q+2l}u(x,\xi)\right\|$ запишем оценку:

$$\left\|\delta^{2q}(x)D_x^{2q+2l}u(x,\xi)\right\|\le\varepsilon_1\left(\left\|D_\alpha^{2q+2l-m_0}D_x^{m_0}u(x,\xi)\right\|+\langle u(x,\xi)\rangle\right)\le\varepsilon_0\langle u(x,\xi)\rangle. \qquad ..(21)$$

Из (20), (21) и следует неравенство (19). Тем самым мы установили, что в случае, когда не выполнено условие (17), выражение $D_\delta^{2q}D_x^{2l}u(x,\xi)$ также можно включить в оператор $T(x,\xi)$, фигурирующий в определении 1. Рассмотрим, наконец, последнее слагаемое, входящее в $M_{2r}(D_\gamma,\xi)\circ M_{2q}(D_\delta,\xi)\circ M_{2l}(D_x,\xi)$. Имеем

$$c_1(\xi)h_1(\xi)g_1(\xi)D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}D_x^{2l}u(x,\xi)=c_1(\xi)h_1(\xi)g_1(\xi)\left(\left(i\gamma(x)\right)^{2r}\partial_x^{2r}D_\delta^{2q}D_x^{2l}u(x,\xi)+\sum_{j=0}^{2r-1}\tilde{\rho}_j(x)D_\gamma^jD_\delta^{2q}D_x^{2l}u(x,\xi)\right)=$$

$$=c_1(\xi)h_1(\xi)g_1(\xi)\left(\left(i\alpha(x)\right)^{2m}\partial_x^{2m}u(x,\xi)+\left(i\gamma(x)\right)^{2r}\sum_{j=0}^{2r}C_{2r}^j\left(\left(i\delta(x)\right)^{2q}\right)^{(j)}\partial_x^{2r+2q-j}D_x^{2l}u(x,\xi)+\right.$$

$$\left.+\left(i\gamma(x)\right)^{2r}\partial_x^{2r}\sum_{j=0}^{2q-1}\rho_j(x)D_\delta^jD_x^{2l}u(x,\xi)+\sum_{j=0}^{2r-1}\tilde{\rho}_j(x)D_\gamma^jD_\delta^{2q}D_x^{2l}u(x,\xi)\right). \tag{22}$$

Приравняем далее коэффициенты при производной порядка $2m$ в операторах $M_{2r}(D_\gamma,\xi)\circ M_{2q}(D_\delta,\xi)\circ M_{2l}(D_x,\xi)$ и $L_{2m}(D_\alpha,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)+L_{2l}(D_x,\xi)$.

Получим уравнение

$$c_1(\xi)h_1(\xi)g_1(\xi)=a_1. \tag{23}$$

А остальные слагаемые, входящие в правую часть (22), оцениваются аналогично выражению $D_\gamma^{2r}D_\delta^{2q}u(x,\xi)$ с заменой $u(x,\xi)$ на $D_x^{2l}u(x,\xi)$. Для примера рассмотрим слагаемые, содержащие выражения вида $\gamma^{2r}(x)\cdot\left(\delta^{2q}(x)\right)^{(j)}\cdot\partial_x^{2(r+q)-j}D_x^{2l}u(x,\xi),\quad 1\le j\le 2r$.

Если

$$2(r+q)-j+2l\le 2p,\quad 1\le j\le 2r,\ \text{т.е.}\ 2(m-p)\le j\le 2(p-l),$$

то для функции

$$\gamma^{2r}(x)\left(\delta^{2q}(x)\right)^{(j)}=\beta^{2(r+q)-j}(x)\cdot\beta^{j-2(m-p)}(x)\cdot\sum_{k=0}^{j}C_j^k\cdot\chi_k(x)\cdot\alpha^{2m-k}(x)\cdot\nu_{j-k}(x)\cdot\beta^{-2p+k-j}(x)$$

самый плохой для преобразования случай, когда рассматривается слагаемое при $k=j$.
В этом случае в силу условия 2 функция

$$\beta^{j-2(m-p)}(x)\cdot\chi_j(x)\cdot\alpha^{2m-j}(x)\cdot\nu_0(x)\cdot\beta^{-2p}(x)=\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)^{2m-j}\cdot\chi_j(x)$$

ограничена, поэтому рассматриваемое выражение преобразуется к виду, содержащему только производные $D_\beta u(x,\xi)$ с аннулирующимися при $x=0$ коэффициентами.

Если $2p<2(r+q)-j+2l\le 2m$, т.е. $1\le j\le 2(m-p)$, то мы также рассмотрим самый плохой для преобразования случай, когда у функции

$$\gamma^{2r}(x)\left(\delta^{2q}(x)\right)^{(j)}=\alpha^{2(r+q)-j}(x)\cdot\alpha^{j-2m}(x)\cdot\beta^{2p}(x)\cdot\sum_{k=0}^{j}C_j^k\cdot\chi_k(x)\cdot\alpha^{2m-k}(x)\cdot\nu_{j-k}(x)\cdot\beta^{-2p+k-j}(x)$$

выбирается слагаемое при $k=j$.

При этом функция $\alpha^{j-2m}(x)\cdot\beta^{2p}(x)\cdot\chi_j(x)\cdot\alpha^{2m-j}(x)\cdot\nu_0(x)\cdot\beta^{-2p}(x)=\chi_j(x)$ обращается в нуль при $x=0$ и рассматриваемое выражение преобразуется к виду, содержащему только производные $D_\alpha u(x,\xi)$ с аннулирующимися при $x=0$ коэффициентами. Таким образом, для любого $\varepsilon_0>0$ при достаточно малых $d\le d_5,\, d_5>0$ для любого $\varepsilon_1>0$ справедлива оценка:

$$\left\|(i\gamma(x))^{2r}C_{2r}^{j}\left((i\delta(x))^{2q}\right)^{(j)}\partial_x^{2r+2q-j}D_x^{2l}u(x,\xi)\right\|\le\varepsilon_0\langle u(x,\xi)\rangle,\quad 1\le j\le 2r\,,$$

а сумму

$$(i\gamma(x))^{2r}\cdot\sum_{j=0}^{2r}C_{2r}^{j}\left((i\delta(x))^{2q}\right)^{(j)}\partial_x^{2r+2q-j}D_x^{2l}u(x,\xi)$$

мы включаем в оператор $T(x,\xi)$, фигурирующий в определении 1. Аналогично доказывается, что все остальные слагаемые, кроме $(i\alpha(x))^{2m}\partial_x^{2m}u(x,\xi)$, также включаются в оператор $T(x,\xi)$. Теперь, чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно найти ограниченное при $|\xi|\le\lambda_0$ решение системы четырех алгебраических уравнений (4), (12), (16) или (18), (23) с шестью неизвестными. Положив $c_1=h_1=1$, найдем оставшиеся неизвестные:

$$g_1=a_1\,,\ g_2=\frac{a_1a_0(\xi)}{d_1}\,,\ \text{где}\ a_0(\xi)=a_2\xi^{2m}+b_2\xi^{2p}+d_2\xi^{2l}+a_3+b_3+d_3\,,$$

$$c_2=\frac{c_1}{a_1}\,,\ \text{а если выполнено равенство (17), то}\ c_2=\frac{1}{2k_0^q}\left(\frac{b_1}{a_1}\pm\sqrt{\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2-4k_0^q\frac{d_1}{a_1}}\right),$$

$$h_2=\frac{b_1}{a_1}\,,\ \text{а если выполнено равенство (17), то}\ h_2=\frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{a_1}\mp\sqrt{\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2-4k_0^q\frac{d_1}{a_1}}\right).$$

Приведенные рассуждения доказывают, что оператор $M_{2r}(D_\gamma,\xi)\circ M_{2q}(D_\delta,\xi)\circ M_{2l}(D_x,\xi)$ принадлежит классу эквивалентности $\{L_{2m}(D_\alpha,\xi)+L_{2p}(D_\beta,\xi)+L_{2l}(D_x,\xi)\}$. Поскольку два класса эквивалентности, имеющие хотя бы общий элемент, совпадают, то тем самым справедливость теоремы установлена.

Следствие. Пусть выполнены условие 1. Тогда многочлены $M_{2r}(\eta,\xi), M_{2q}(\eta,\xi)$ и $M_{2l}(\eta,\xi)$ по переменной η отличны от нуля при любых $\eta\in R_1,\, \xi\in R_n$.

Доказательство. Из теоремы следуют следующие представления для рассматриваемых многочленов:

$$M_{2r}(\eta,\xi)=\eta^{2r}+\frac{d_1}{b_1}\,,\qquad M_{2q}(\eta,\xi)=\eta^{2q}+\frac{b_1}{a_1}\,,$$

а если выполнено равенство (17), то

$$M_{2r}(\eta,\xi)=\eta^{2r}+\frac{1}{2k_0^q}\left(\frac{b_1}{a_1}\pm\sqrt{\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2-4k_0^q\frac{d_1}{a_1}}\right),\qquad M_{2q}(\eta,\xi)=\eta^{2q}+\frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{a_1}\mp\sqrt{\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2-4k_0^q\frac{d_1}{a_1}}\right),$$

$$M_{2l}(\eta,\xi)=a_1\eta^{2l}+\frac{a_0(\xi)\cdot a_1}{d_1}\,,$$

из которых, по условию 1, и вытекает требуемое утверждение.

В заключение, укажем источники [5–15], в которых исследовались близкие задачи или были использованы похожие методы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-01-00197.

Список литературы
References

1. Глушак А. 2017. Априорная оценка решения задачи Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами. Научные ведомости Белгородского государственного университета, серия Математика. Физика, №20 (269), Выпуск 48: 50–57.

Glushak A. 2017. A priori estimate of the solution of the Dirichlet problem for a differential equation of high order with two degenerate elliptic operators. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics, №20 (269), issue 48: 50–57.

2. Глушак А. 2017. Разрешимость задачи Дирихле для дифференциального уравнения высокого порядка с двумя вырождающимися эллиптическими операторами. Научные ведомости Белгородского государственного университета, серия Математика. Физика, № 27 (276), Вып. 49: 5–14.

Glushak A. 2017. Solvability of the solution of the Dirichlet problem for a differential equation of high order with two degenerate elliptic operators. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics, № 27 (276), issue 48: 5–14.

3. Глушак А. 2018. Априорная оценка решения задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка, содержащего различные весовые функции. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, Т. 50, № 1: 14–20.

Glushak A. 2018. Apriori estimate of the solution of the Dirichlet problem for one class of high order degenerating elliptic equation containing various weight functions. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics, V. 50, № 1: 14–20.

4. Богатов М.И., Глушко В.П. 1979. Пространства типа С.Л. Соболева дробного порядка с весом и их свойства. Деп. ВИНИТИ № 3239-79 Деп. – 32.

Bogatov M.I., Glushko V.P. 1979. Type space S.L. Sobolev fractional order with weight and their properties. Dep. VINITI № 3239-79 Dep. – 32.

5. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения с неотрицательной характеристической формой. МГУ. Москва. 2010.

Oleinic O.A., Radkevich E.V. Equations wits nonnegative characteristic form. Moscow State University. Moscow. 2010.

6. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1383–1393.

Arkhipov V.P. Linear Second-Order Differential Equations with Degenerating Coefficient of the Second Derivative. Differential Equations. 2011. V. 47. № 10. Pp. 1383–1393.

7. Архипов В.П., Глушак А.В. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка около точки вырождения. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2013. №5 (148). Выпуск 30.

Arhipov V.P., Glushak A.V. Asymptotic Representations of Solutions the Second-Order Differential Equation near the Degenerating Point. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics. 2013. №5(148). Iss. 30.

8. Архипов В.П. Асимптотические представления решений вырождающихся эллиптических уравнений. Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. 2016. №1. С. 50–65.

Arhipov V.P. Asymptotic representations of solutions of degenerate elliptic equations. Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics. 2014. №1. Pp. 50–65.

9. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2016. №20 (241). Выпуск 44. С. 5–22.

Arhipov V.P., Glushak A.V. Degenerating Second-Order Differential Equations. Asymptotic Representations of Solutions. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics. 2016. №20 (241), issue 44. Pp. 5–22.

10. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления спектра. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2016. №27 (248). Выпуск 45. С. 45–59.

Arhipov V.P., Glushak A.V. Degenerating Second-Order Differential Equations. Asymptotic Representations of Spectrum. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathem.&Physics. 2016. №27 (248), issue 45. Pp. 45–59.