МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 620.192.45+517.955.4
DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-2-179-196

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К НЕМАГНИТНОМУ ПРОВОДЯЩЕМУ ТЕЛУ С НЕГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ

UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF MAXWELL'S EQUATIONS IN THE QUASI-STATIONARY APPROXIMATION FOR A NONMAGNETIC CONDUCTIVE BODY WITH NON-SMOOTH BOUNDARIES

С.В. Марвин
S.V.Marvin

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина,
Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin,
19 Mira St, Yekateriburg, 620002, Russia

E-mail: s.v.marvin@yandex.ru

Аннотация

Исследована начально-краевая задача электродинамики в пренебрежении током смещения для немагнитного проводника, находящегося в поле стороннего тока. Предполагается, что граница проводника может иметь точки негладкости; указывается, какие конкретно типы таких точек допускаются в проводимом исследовании. При естественных предположениях относительно гладкости напряженностей поля, их поведения на бесконечности, а также относительно поверхностной односвязности области, внешней по отношению к проводнику, доказывается, что у рассматриваемой начально-краевой задачи может существовать не более одного решения.

Abstract

An initial-boundary value problem of electrodynamics in neglect of the displacement current for a nonmagnetic conductor, which is locating in a field of external current, are investigated. The statement of the problem does not assume a steady-state harmonic mode. It is assumed, that the boundary of conductor has points of nonsmoothness; it is assumed, that the every point of nonsmoothness may be point of edge or point of vertice (zero angles are possible). It is assumed, that the tensions of field are smooth vector functions in the separate mediums, their curls may be continuous extension to the boundaries of mediums, their tangent components are continuous when crossing the boundaries of mediums and their behavior at infinity is natural: the tension of electric field asymptotically does not exceed a function, inversely proportional the distance from the origin; the tension of magnetic field asymptotically does not exceed a function, inversely proportional the square of distance from the origin. About domain, external to the conductor, it is assumed, that it's structure is surface-simply-connected. With all this assumptions it is proved, that the considered initial-boundary value problem has none more unique solution.

Ключевые слова: начально-краевая задача, уравнения Максвелла, квазистационарное приближение, теорема единственности, интегро-дифференциальные уравнения.
Keywords: initial-boundary value problem, Maxwell's equations, quasi-stationary approximation, existence theorem, integro-differential equations.

Введение

Начально-краевые задачи электродинамики, привлекаемые для описания нестационарных электромагнитных полей (полей, меняющихся не по гармоническому закону), имеют существенную практическую значимость для неразрушающего контроля. В контексте применения нестационарных методов вихретоковой дефектоскопии следует обратить внимание на следующие важные обстоятельства.

В неразрушающем контроле зачастую используются медленно меняющиеся поля. В связи с этим в математических моделях вихретоковых дефектоскопов широко используются уравнения электродинамики в квазистационарном приближении, то есть, уравнения Максвелла, в которых ток смещения полагается равным нулю. Также следует заметить, что в реальных ситуациях неразрушающего контроля воздействию нестационарных электромагнитных полей подвергаются проводящие тела, поверхности которых имеют особые точки (точки негладкости). Следовательно, неизбежно возникают вопросы и проблемы, касающиеся постановки задач математической физики в случае негладких границ. Причем для приложений в неразрушающем контроле задачи электродинамики должны быть не внутренними и не внешними, а задачами сопряжения.

Ранее исследовались начально-краевые задачи сопряжения для проводящих тел, границы которых могут иметь особые точки, но без предположения о квазистационарности [1-3]. Методы и приемы этих исследований неприменимы к квазистационарному приближению: отсутствие в уравнениях Максвелла производной по времени от напряженности электрического поля делает невозможным использование теоремы Хилле-Иосиды.

В квазистационарном приближении для областей с гладкими границами широко исследовались внутренние начально-краевые задачи электродинамики [4], а также задачи сопряжения в случае установившегося гармонического режима [5]. Было, в частности, показано, что при отсутствии тока смещения в уравнениях Максвелла для обеспечения единственности решения требуется ввести дополнительное уравнение и дополнительное граничное условие в общую постановку задачи [5].

Также исследовались внутренние краевые задачи электродинамики применительно к установившемуся гармоническому режиму без предположения о квазистационарности и для области, граница которой имела линию негладкости – ребро [6]. Было показано, что для единственности решения следует дополнить общую постановку задачи граничным условием на ребре. Это согласуется с общим положением вещей в теории краевых и начально-краевых задач математической физики для областей с негладкими границами: особые точки границы требуют дополнительных граничных условий. Эти условия могут выражаться как в требовании суммируемости решения и его производных с некоторой степенью, так и в задании конкретной асимптотики решения в окрестности особой точки [7-10]. Поиск таких условий, имеющих физический смысл, в общем случае представляет собой нетривиальную проблему.

Перечисленные обстоятельства указывают на актуальность исследования начально-краевой задачи электродинамики в квазистационарном приближении для граничных условий сопряжения и применительно к случаю негладких границ, обосновывают необходимость поиска условий, обеспечивающих единственность решения такой задачи.

Постановка начально-краевой задачи

Предположим, что проводящее тело занимает ограниченную область Ω в трехмерном пространстве R^3. Обычный упорядоченный набор трех пространственных координат (x, y, z) будем коротко обозначать как $\mathbf{r}$. Полярный угол и полярный радиус соответствующей цилиндрической системы координат (с полярной осью Oz) будем обозначать, соответственно, как φ и ρ. Обозначения и символы, привязанные к $Oxyz$, будут использоваться и в случаях, когда координаты прямоугольной системы координат будут отмечаться штрихами; только соответствующие обозначения и символы тоже будут под штрихами.

Необходимо определиться с видами точек, из которых по нашим предположениям состоит граница Ω – поверхность $\partial\Omega$ (здесь и далее символом ∂ перед обозначением области будем обозначать границу области). Заметим, что за понятием поверхности закреплен вполне определенный смысл [11], означающий, в частности, связность множества. В работах, посвященных исследованию краевых задач для областей с негладкими границами, различные типы точек $\partial\Omega$ определяются через диффеоморфизм пересечения замкнутого единичного шара с некоторой сравнительно простой замкнутой пространственной фигурой [8-10]. Однако в конкретных задачах зачастую возможно явное задание отдельных участков поверхности в виде функции одной пространственной координаты от двух других (при подходящем выборе осей). Именно через явное задание определим типы точек, из которых, по нашим предположениям, будет состоять $\partial\Omega$.

Опр. 1. *Точку $\mathbf{r}_0 \in \partial\Omega$ будем называть точкой гладкости $\partial\Omega$, если существует некоторая прямоугольная система координат $O'x'y'z'$ с началом в точке $\mathbf{r}_0$, и некоторая прямоугольная окрестность со сторонами, параллельными осям этой прямоугольной системы координат: $\{(x', y', z') : x' \in (-\delta_1; \delta_1), y' \in (-\delta_2; \delta_2), z' \in (-\delta_3; \delta_3)\}$, заключенная в которую часть $\partial\Omega$ описывается уравнением*

$$z' = f(x', y'), (x', y') \in (-\delta_1; \delta_1) \times (-\delta_2; \delta_2),$$

где $f(x', y')$ – функция, непрерывно-дифференцируемая в открытом прямоугольнике $\{(x', y') : x' \in (-\delta_1; \delta_1), y' \in (-\delta_2; \delta_2)\}$ и допускающая непрерывное продолжение вместе со своими частными производными на его границу. Внутри рассматриваемой прямоугольной окрестности $\mathbf{r}_0$ неравенству $z' < f(x', y')$ соответствуют внутренние точки Ω, а неравенству $z' > f(x', y')$ – внешние точки Ω.

Заметим, что в условиях данного определения начало системы координат $O'x'y'z'$ совпадает с точкой $\mathbf{r}_0$, через которую проходит поверхность, локально задаваемая уравнением $z' = f(x', y')$; следовательно, $f(0,0) = 0$.

Опр. 2. *Точку $\mathbf{r}_0 \in \partial\Omega$ будем называть ребровой точкой, если существует некоторая прямоугольная система координат $O'x'y'z'$ с началом в точке $\mathbf{r}_0$, и некоторая прямоугольная окрестность со сторонами, параллельными осям этой прямоугольной системы координат: $\{(x', y', z') : x' \in (-\delta_1; \delta_1), y' \in (-\delta_2; \delta_2), z' \in (-\delta_3; \delta_3)\}$, заключенная в которую часть $\partial\Omega$ описывается уравнением*

$$z' = f(x', y'), (x', y') \in (-\delta_1; \delta_1) \times (-\delta_2; \delta_2),$$

где $f(x', y')$ – функция, непрерывная в открытом прямоугольнике

$\{(x',y'): x' \in (-\delta_1;\delta_1), y' \in (-\delta_2;\delta_2)\}$ *и допускающая непрерывное продолжение на его границу. Кроме того, существует такая функция* $g(x')$, *непрерывно дифференцируемая на отрезке* $x' \in [-\delta_1;\delta_1]$, *что* $g(x') \in (-\delta_2,\delta_2)$ *при* $x' \in (-\delta_1,\delta_1)$; *кроме того,* $g(0)=0$, $g'(0)=0$, *и для* $f(x',y')$ *выполняется следующее условие кусочной гладкости. Во внутренних точках криволинейных трапеций* $\{(x',y'): x' \in [-\delta_1,\delta_1], -\delta_2 \le y' \le g(x')\}$ *и* $\{(x',y'): x' \in [-\delta_1,\delta_1], g(x') \le y' \le \delta_2\}$ *функция* $f(x',y')$ *непрерывно дифференцируема, причем ее частные производные допускают непрерывное продолжение изнутри трапеций на их границы, но при пересечении кривой* $y' = g(x')$ *в любой ее точке хотя бы одна из частных производных* $f(x',y')$ *терпит разрыв. Пределы частной производной* $f_{x'}(x',y')$ *в точке* $(0,0)$ *с обеих сторон кривой* $y' = g(x')$ *равны 0. Внутри рассматриваемой прямоугольной окрестности* $\mathbf{r}_0 \in \partial\Omega$ *неравенству* $z' < f(x',y')$ *соответствуют внутренние точки* Ω, *а неравенству* $z' > f(x',y')$ – *внешние точки* Ω.

В условиях данного определения $f(0,0)=0$. Кроме того, условия $g'(0)=0$ и $\lim\limits_{x',y'\to 0} f_{x'}(x',y') = 0$ обеспечивают в точке $(0,0,0)$ касательное расположение оси $O'x'$ по отношению к кривой, на которой нарушается гладкость $\partial\Omega$ (рис. 1).

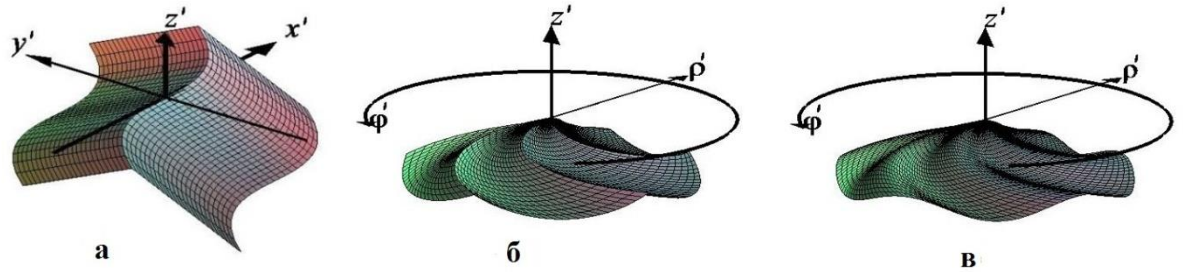

Рис. 1. Особые точки границы. а – ребровая точка, б – вершина реберного типа,
в – вершина конического типа
Fig. 1. Specific points of the boundary. a – edge point, б – vertex of the edge type,
в – vertex of the conical type

Опр. 3. *Точка* $\mathbf{r}_0 \in \partial\Omega$, *не являющаяся ребровой точкой* $\partial\Omega$, *называется вершиной реберного типа, если существует некоторая цилиндрическая система координат* (φ',ρ',z') *с началом в точке* $\mathbf{r}_0$, *а также некоторая цилиндрическая окрестность с осью, параллельной* z': $\{(\varphi',\rho',z'): \varphi' \in (-\infty;+\infty), \rho' \in (0;\delta_2), z' \in (-\delta_3;\delta_3)\}$, *заключенная в которую часть* $\partial\Omega$ *описывается уравнением*

$$z' = f(\varphi',\rho'), (\varphi',\rho') \in (-\infty;+\infty)\times(0;\delta_2),$$

где $f(\varphi',\rho')$ – *функция, непрерывная в открытом прямоугольнике* $\{(\varphi',\rho'): \varphi' \in (-\infty;+\infty), \rho' \in (0;\delta_2)\}$, *допускающая непрерывное продолжение на его границу, периодическая по переменной* φ' *с периодом* 2π, *причем для любого значения* $\varphi' \in (-\infty,+\infty)$ $f(0,\varphi') \equiv 0$. *Кроме того, существуют такие функции* $\varphi_i(\rho)$, $i = 1,2,...,n$, *непрерывно дифференцируемые на отрезке* $\rho' \in [0;\delta]$, *что* $\varphi_1(\rho') < \varphi_2(\rho') < ... < \varphi_n(\rho') < \varphi_{n+1}(\rho') = \varphi_1(\rho') + 2\pi$, *причем для* $f(\varphi',\rho')$ *выполняется следу-*

ющее условие кусочной гладкости. Во внутренних точках каждой из криволинейных трапеций $\{(\varphi',\rho'):\rho'\in[0;\delta_2],\varphi_i(\rho')\le\varphi'\le\varphi_{i+1}(\rho')\}$ *функция* $f(\varphi',\rho')$ *непрерывно дифференцируема, причем ее частные производные допускают непрерывное продолжение изнутри трапеций на их границы, но каждая точка любой кривой* $\varphi=\varphi_i(\rho)$ *при* $\rho'\in(0;\delta]$ *является ребровой точкой* $\partial\Omega$. *Внутри рассматриваемой цилиндрической окрестности* $\mathbf{r}_0\in\partial\Omega$ *неравенству* $z'<f(\varphi',\rho')$ *соответствуют внутренние точки* Ω, *а неравенству* $z'>f(\varphi',\rho')$ *– внешние точки* Ω.

Заметим, что криволинейные трапеции в плоскости переменных (φ',ρ'), о которых идет речь в данном определении, в обычных прямоугольных координатах (x',y') представляют собой криволинейные треугольники (одной из вершин для каждого такого треугольника является начало координат). Каждой внутренней точке этих криволинейных треугольников соответствует точка гладкости $\partial\Omega$. На сторонах этих криволинейных треугольников, определяемых в полярной системе координат уравнениями $\varphi=\varphi_i(\rho)$, при $\rho'\in(0;\delta]$ происходит нарушение гладкости $\partial\Omega$, так как по определению соответствующие точки $\partial\Omega$ – ребровые (см. рис. 1).

Заметим также, что опр. 2 требует непрерывную дифференцируемость функции $\varphi_i(\rho')$ на всем отрезке $[0;\delta]$. Это не противоречит тому обстоятельству, что в начале двумерной системы координат полярный угол не определен. Сама функциональная зависимость $\varphi_i(\rho')$, безотносительно к ее геометрическому смыслу, при определенных условиях может допускать непрерывно дифференцируемое продолжение с полуинтервала $(0;\delta]$ на его левый край, что для геометрических моделей, используемых при постановке конкретных задач математической физики, как правило, выполняется.

Опр. 4. *Точка* $\mathbf{r}_0\in\partial\Omega$, *не являющаяся точкой гладкости* $\partial\Omega$, *называется вершиной конического типа, если существует некоторая цилиндрическая система координат* (φ',ρ',z') *с началом в точке* $\mathbf{r}_0$, *а также некоторая цилиндрическая окрестность с осью, параллельной* z': $\{(\varphi',\rho',z'):\varphi'\in(-\infty;+\infty),\rho'\in(0;\delta_2),z'\in(-\delta_3;\delta_3)\}$, *заключенная в которую часть* $\partial\Omega$ *описывается уравнением*

$$z'=f(\varphi',\rho'),(\varphi',\rho')\in(-\infty;+\infty)\times(0;\delta_2),$$

где $f(\varphi',\rho')$ *– функция, непрерывно дифференцируемая в открытом прямоугольнике* $\{(\varphi',\rho'):\varphi'\in(-\infty;+\infty),\rho'\in(0;\delta_2)\}$ *и допускающая непрерывное продолжение вместе со своими частными производными на его границу. Кроме того,* $f(\varphi',\rho')$ *периодическая по переменной* φ' *с периодом* 2π, *причем для любого значения* $\varphi'\in(-\infty;+\infty)$ $f(0,\varphi')\equiv 0$. *Внутри рассматриваемой цилиндрической окрестности* $\mathbf{r}_0\in\partial\Omega$ *неравенству* $z'<f(\varphi',\rho')$ *соответствуют внутренние точки* Ω, *а неравенству* $z'>f(\varphi',\rho')$ *– внешние точки* Ω.

Заметим, что в условиях данного определения точки $\partial\Omega$, расположенные внутри указанной цилиндрической окрестности, за исключением самой вершины, являются точками гладкости (см. рис. 1).

Опр. 5. *Гранью поверхности* $\partial\Omega$ *будем называть связное множество точек* $S\subset\partial\Omega$, *элементами которого могут быть только точки гладкости* $\partial\Omega$, *причем ни для какого множества* $S'\subset\partial\Omega$, *связного и состоящего исключительно из точек гладкости* $\partial\Omega$, S *не является подмножеством.*

Иными словами, гранью $\partial\Omega$ будем называть связное подмножество $S \subset \partial\Omega$, состоящее исключительно из точек гладкости и непродолжаемое в смысле одновременной связности и гладкости. Из этого, в частности, следует, что разные грани $\partial\Omega$ не могут иметь общих точек.

Будем предполагать, что множество всех точек гладкости $\partial\Omega$ разбивается на конечное число граней. Каждая из остальных (особых) точек $\partial\Omega$ является ребровой точкой либо вершиной реберного или конического типа. Это, в частности, означает, что в условиях опр. 2 не только $\mathbf{r}_0$, но и другие точки кривой, на которой происходит нарушение гладкости $\partial\Omega$, могут быть только ребровыми точками (далее эту кривую будем называть ребром).

Относительно геометрических свойств Ω также будем предполагать, что внешняя по отношению к ней область $\mathrm{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ поверхностно односвязна, то есть, на любой ломаной без самопересечений, расположенной в $\mathrm{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, можно, как на основании, построить пирамиду, боковая поверхность которой тоже будет полностью располагаться в $\mathrm{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ [11].

Электропроводность тела σ, занимающего область Ω, предполагается не зависящей от времени. Как функция пространственных координат, $\sigma(\mathbf{r})$ положительна, непрерывна во внутренних точках Ω и допускает непрерывное продолжение на $\partial\Omega$. Снаружи области Ω $\sigma(\mathbf{r}) \equiv 0$. Сторонний ток сосредоточен в ограниченной области T, граница которой удовлетворяет тем же требованиям гладкости, что и $\partial\Omega$; замыкания областей Ω и T не имеют общих точек. Плотность стороннего тока $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ (t – время) представляет собой непрерывно дифференцируемую векторную функцию при $\mathbf{r} \in \overline{T}$ и $t \in [0;+\infty)$, причем для нее выполняются необходимые условия применимости квазистационарного приближения [12]: $\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \equiv 0$, $j_n\big|_{\partial T} \equiv 0$ (индекс n обозначает нормальную компоненту поля, и указанное условие, накладываемое на j_n, обеспечивает выполнение тождества $\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \equiv 0$ во всем пространстве R^3 в обобщенном смысле).

Так как целью является доказательство единственности решения, достаточно рассмотреть однородную систему уравнений для электромагнитного поля в Ω и $\mathrm{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ при условии квазистационарности [12]:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E} \end{cases} \qquad (1)$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – напряженности, соответственно, электрического и магнитного поля; μ_0 – магнитная постоянная; t – время.

Решение системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении принято выражать через объемные потенциалы от стороннего тока и от тока проводимости в области Ω, а также через градиент потенциала простого слоя поверхностного заряда на $\partial\Omega$ [12]. Причем ток проводимости и поверхностная плотность заряда не задаются изначально при постановке задачи, а определяются через систему интегро-дифференциальных уравнений [13]. И разрешимость этой системы уравнений, в общем случае, для негладких поверхностей не очевидна и требует отдельного исследования. Однако можно ориентироваться на указанное представление электромагнитного поля через потенциалы, чтобы определиться с минимальными требованиями, касающимися асимптотического поведения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ вблизи $\partial\Omega$, ∂T и при $r = |\mathbf{r}| \to +\infty$ [7, 9]; эти требования должны обеспечивать единственность решения и, в то же время, не должны противоречить его существованию.

Далее, чтобы различать поля в разных областях, верхним индексом «I» будем обозначать поле в Ω, а верхним индексом «II» будем обозначать поле в точках, внешних по отношению к Ω.

В точках гладкости $\partial\Omega$ должны выполняться условия сопряжения для сред, не являющихся идеальными проводниками [12]:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\tau^{\mathrm{I}} = \mathbf{E}_\tau^{\mathrm{II}} \\ \mathbf{H}_\tau^{\mathrm{I}} = \mathbf{H}_\tau^{\mathrm{II}} \end{cases} \tag{2}$$

где индекс τ обозначает касательную компоненту векторного поля.

Как и в случае установившегося гармонического режима и гладкой поверхности $\partial\Omega$, для обеспечения единственности решения добавим к (1) и (2) дополнительное уравнение и дополнительное граничное условие для $\mathbf{E}^{\mathrm{II}}$ [5]:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}^{\mathrm{II}} = 0, \tag{3}$$

$$\oint\limits_{\partial\Omega} \mathrm{E}_n^{\mathrm{II}} dS = 0, \tag{4}$$

где dS – элемент площади. При $r \to +\infty$ напряженности полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\mathrm{II}} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{r}\right), \ r \to +\infty \\ \mathbf{H}^{\mathrm{II}} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{r^2}\right), \ r \to +\infty \end{cases}, \tag{5}$$

где O – обозначение функции, ограниченной по сравнению с выражением, указанным в скобках после O.

Наличие особых точек у $\partial\Omega$ требует дополнительных условий для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В окрестности ребровой точки должно выполняться следующее условие на напряженность электрического поля [6]:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\mathrm{I,II}} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{\rho_{\mathrm{norm}}^{\alpha}}\right) \\ \mathbf{H}^{\mathrm{I,II}} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{\rho_{\mathrm{norm}}^{\alpha}}\right) \end{cases}, \tag{6}$$

где ρ_{norm} – расстояние до ребровой точки в плоскости, нормальной к ребру; $\alpha < 1/2$.

Из условий (6) непосредственно вытекает условие Мейкснера [6]: поток энергии от ребра равен нулю. В окрестности вершины реберного типа должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\mathrm{I,II}} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{(r')^{\beta}\left(\rho_{1,\mathrm{norm}}\rho_{2,\mathrm{norm}}\ldots\rho_{n,\mathrm{norm}}\right)^{\alpha}} \right) \\ \mathbf{H}^{\mathrm{I,II}} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{(r')^{\beta}\left(\rho_{1,\mathrm{norm}}\rho_{2,\mathrm{norm}}\ldots\rho_{n,\mathrm{norm}}\right)^{\alpha}} \right) \end{cases}, \tag{7}$$

где индексы у ρ_{norm} нумеруют ребра, сходящиеся в рассматриваемой вершине; $\beta < 1$.

Условие для окрестности вершины конического типа:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\mathrm{I,II}} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{(r')^{\beta}} \right) \\ \mathbf{H}^{\mathrm{I,II}} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{(r')^{\beta}} \right) \end{cases}. \tag{8}$$

В начальный момент времени магнитное поле должно удовлетворять нулевым начальным условиям:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},0) = \mathbf{0}, \tag{9}$$

где $\mathbf{0}$ – обозначение нулевого вектора.

Заметим, что вследствие условия (5) у напряженности $\mathbf{H}$ гарантирована не только локальная квадратичная суммируемость, но и квадратичная суммируемость во всем пространстве R^3.

Дифференцируемость по времени в системе (1) при $t > 0$ будем понимать в смысле среднеквадратичной сходимости:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{\mathbf{H}(t+\Delta t) - \mathbf{H}(t)}{h} - \mathbf{H}'_t(t) \right\|_2 = 0, \tag{10}$$

где двойная прямая скобка с индексом 2 обозначает норму в пространстве векторных полей, квадратично суммируемых в R^3. В начальный момент времени $t = 0$ условие (10) предполагается выполненным, но для предела справа, то есть при $\Delta t \to +0$.

Введем в рассмотрение пространство $\boldsymbol{L}$, определяемое следующим образом. В пространство $\boldsymbol{L}$ входят векторные поля, непрерывные в Ω и $\mathrm{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$, а также непрерывно дифференцируемые в Ω, в T и $\mathrm{R}^3 \setminus \left(\bar{\Omega} \cup \bar{T}\right)$. Кроме того, векторные поля $\boldsymbol{L}$ должны допускать непрерывное продолжение на все точки гладкости $\partial\Omega$ изнутри и снаружи Ω (хотя результаты продолжения изнутри и снаружи могут различаться). Также будем предполагать, что роторы полей из $\boldsymbol{L}$ локально квадратично суммируемы.

Также определим подпространство $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{L}$, векторные поля которого, помимо условий непрерывности и гладкости, общих для полей из $\boldsymbol{L}$, удовлетворяют также требованию непрерывной дифференцируемости в $\mathrm{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$.

Докажем, что у начально-краевой задачи (1)-(10) решение $\mathbf{E} \in \boldsymbol{K}$ и $\mathbf{H} \in \boldsymbol{L}$ может быть только тривиальным.

Единственность решения начально-краевой задачи

Открытый шар с центром в начале координат будем обозначать как O_R, сферу, его ограничивающую – как S_R. Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. Пусть $\bar{\Omega}, \bar{T} \subset O_R$. Тогда *для любых полей* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \boldsymbol{L}$, *удовлетворяющих граничным условиям вида (6)-(9),*

$$\int\limits_{O_R} \big(\mathbf{v}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r})\big)dV = \oiint\limits_{S_R} \big[\mathbf{u}(\mathbf{r}) \times \mathbf{v}(\mathbf{r})\big]\mathbf{e}_{\mathbf{r}} dS, \tag{11}$$

где $e_{\mathbf{r}} = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$.

Доказательство. Выражение под знаком объемного интеграла в (11) для точек гладкости $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ равно $\operatorname{div}[\mathbf{u} \times \mathbf{v}]$. Однако формулу (11) нельзя считать непосредственным следствием теоремы Остроградского-Гаусса: по условию этой теоремы векторное поле должно быть непрерывно дифференцируемым вплоть до границы области интегрирования. Однако, поля $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ могут терпеть разрыв на $\partial\Omega$ (причем могут быть даже неограниченными в окрестности особых точек $\partial\Omega$), а производные могут терпеть разрыв на ∂T.

Для любой внутренней точки Ω, T или $O_R \setminus (\bar{\Omega} \cup \bar{T})$ существует прямоугольная окрестность, замыкание которой включается в Ω, T или $O_R \setminus (\bar{\Omega} \cup \bar{T})$ соответственно. Каждая из точек $\partial\Omega$ и ∂T может быть заключена в прямоугольную или цилиндрическую окрестность так, как указано в опр. 1-4. Причем в силу непрерывности функций, задающих в условиях опр. 1-4 участки $\partial\Omega$ и ∂T, прямоугольную или цилиндрическую окрестность можно уменьшить так, чтобы ее замыкание включалось в O_R, не содержало точки ∂T и $\partial\Omega$ соответственно, а условия опр. 1-4 оставались выполненными. Все точки S_R являются точками гладкости. Следовательно, каждую из них можно покрыть прямоугольной окрестностью так же, как и точку гладкости $\partial\Omega$ в условиях опр. 1, причем эту окрестность можно сделать достаточно малой, чтобы ее замыкание не пересекалось с $\bar{\Omega}$ и $\bar{T}$.

Таким образом, все множество $\bar{O}_R$ может быть покрыто окрестностями указанных видов. Так как это множество ограничено и замкнуто, то из системы окрестностей, его покрывающих, можно выделить конечное подпокрытие [14]. Количество окрестностей в этом конечном подпокрытии будем обозначать m, причем можно считать эти окрестности перенумерованными так, чтобы первые k из них покрывают S_R, а остальные вместе со своими замыканиями включаются в O_R.

Для окрестностей U_1, U_2,…, U_m этого конечного подпокрытия существует разбиение единицы [14], то есть, такая система бесконечно дифференцируемых и финитных функций $\psi_1(\mathbf{r})$, $\psi_2(\mathbf{r})\ldots$, $\psi_m(\mathbf{r})$, что $0 \le \psi_i(\mathbf{r}) \le 1$, $\operatorname{supp}\psi_i(\mathbf{r}) \subset U_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} \psi_i(\mathbf{r}) \equiv 1$ на $\bar{O}_R$.

$$\int\limits_{O_R} \operatorname{div}\big[\mathbf{u}(\mathbf{r}) \times \mathbf{v}(\mathbf{r})\big]dV = \int\limits_{O_R} \operatorname{div}\Big(1 \cdot \big[\mathbf{u}(\mathbf{r}) \times \mathbf{v}(\mathbf{r})\big]\Big)dV = \int\limits_{O_R} \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{m} \psi_i(\mathbf{r}) \cdot \big[\mathbf{u}(\mathbf{r}) \times \mathbf{v}(\mathbf{r})\big]\right)dV =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{O_R} \operatorname{div}\Big(\psi_i(\mathbf{r})\big[\mathbf{u}(\mathbf{r}) \times \mathbf{v}(\mathbf{r})\big]\Big)dV = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{U_i} \operatorname{div}\Big(\psi_i(\mathbf{r})\big[\mathbf{u}(\mathbf{r}) \times \mathbf{v}(\mathbf{r})\big]\Big)dV. \tag{12}$$

Проанализируем каждое слагаемое в получившейся сумме.

Если $\bar{U}_i \subset \Omega$, $\bar{U}_i \subset T$, или $\bar{U}_i \subset O_R \setminus \left(\bar{\Omega} \cup \bar{T}\right)$, то

$$\int\limits_{U_i} \operatorname{div}\left(\psi_i(\mathbf{r})\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]\right)dV = \oiint\limits_{\partial U_i} \psi_i(\mathbf{r})\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]\mathbf{n}(\mathbf{r})\,dS = 0,$$

так как $\psi_i(\mathbf{r}) \equiv 0$ на ∂U_i ($\mathbf{n}$ – единичная нормаль, внешняя по отношению к U_i).

Если U_i пересекается со сферой S_R, то

$$\int\limits_{U_i \cap O_R} \operatorname{div}\left(\psi_i(\mathbf{r})\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]\right)dV = \oiint\limits_{U_i \cap S_R} \psi_i(\mathbf{r})\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]\cdot \mathbf{e}_\mathbf{r}\,dS,$$

так как $\operatorname{supp}\psi_i$, не пересекаясь с ∂U_i, может иметь общие точки с S_R.

Рассмотрим случай, когда U_i является окрестностью реберной точки $\partial\Omega$, удовлетворяющей опр. 2. Определим область $U_i(-h) \subset U_i$, определяемую неравенством:

$$-\delta_3 < z' < f(x',y') - h,\ x' \in (-\delta_1, \delta_1),\ y' \in (-\delta_2, \delta_2), \tag{13}$$

где $h > 0$; область, определяемую неравенством (13) при $h = 0$ обозначим $U_i(-0)$. В области $U_i(-h)$ для поля $\psi_i[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]$ выполняются все условия теоремы Остроградского-Гаусса, причем $\operatorname{supp}\psi_i \cap \partial U_i = \varnothing$; следовательно,

$$\int\limits_{U_i(-h)} \operatorname{div}\left(\psi_i(\mathbf{r})\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]\right)dV = \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_{-\delta_2}^{\delta_2}\int\limits_{-\delta_3}^{f(x',y')-h} \operatorname{div}\left(\psi_i(\mathbf{r}')\left[\mathbf{u}(\mathbf{r}')\times\mathbf{v}(\mathbf{r}')\right]\right)dz'dy'dx' =$$
$$= \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_{-\delta_2}^{\delta_2} \psi_i\left(x',y',f(x',y')-h\right)\left[\mathbf{u}\left(x',y',f(x',y')-h\right)\times\mathbf{v}\left(x',y',f(x',y')-h\right)\right]d\mathbf{S}'_-, \tag{14}$$

где $d\mathbf{S}'_- = \mathbf{n}^-\left(x',y',f(x',y')\right)\sqrt{1+\left(f'_{x'}(x',y')\right)^2+\left(f'_{y'}(x',y')\right)^2}\,dx'dy'$, $\mathbf{n}^-$ – единичная нормаль к $\partial\Omega \cap \Pi$, внешняя по отношению к $U_i(-0)$. Единичные нормали у поверхностей, определяемых равенствами $z' = f(x',y')$ и $z' = f(x',y') - h$, очевидно, одинаковы при одинаковых (x',y'), что учтено в выражении для $d\mathbf{S}'_-$.

Заметим, что в силу выполнения граничных условий вида (5)-(7) и локальной квадратичной суммируемости роторов полей из $\boldsymbol{L}$, $\operatorname{div}\left(\psi_i[\mathbf{u}\times\mathbf{v}]\right)$ суммируема по любой подобласти Ω; следовательно,

$$\lim_{h\to+0}\int\limits_{U_i(-h)} \operatorname{div}\left(\psi_i(\mathbf{r})\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]\right)dV = \int\limits_{U_i(-0)} \operatorname{div}\left(\psi_i(\mathbf{r})\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]\right)dV.$$

Подынтегральная функция в двойном (поверхностном) интеграле в (10), в силу ограниченности ψ_i и выполнения граничного условия вида (5) допускает следующую оценку:

$$\left|\psi_i\left(x',y',f\left(x',y'\right)-h\right)\left[\mathbf{u}\left(x',y',f\left(x',y'\right)-h\right)\times\mathbf{v}\left(x',y',f\left(x',y'\right)-h\right)\right]\right|\le$$
$$\le\frac{C}{M^{2\alpha}\left(\left(y'-g\left(x'\right)\right)^2+\left(f\left(x',y'\right)-h-f\left(x',g\left(x'\right)\right)\right)^2\right)^{\alpha}}\le\frac{C}{M^{2\alpha}\left|y'-g\left(x'\right)\right|^{2\alpha}}, \tag{15}$$

где константа C определяет более конкретно выполнение условия (5) и ограниченность функции ψ_i; константа M равна точной нижней грани абсолютного значения косинуса угла между плоскостью, нормальной к ребру в точке $\left(x',g\left(x'\right),f\left(x',g\left(x'\right)\right)\right)$, и плоскостью, проходящей через точку $\left(x',0,0\right)$ параллельно осям $O'y'$ и $O'z'$. Заметим, что при $x'\in\left[-\delta_1;\delta_1\right]$ $M\ne0$, так как ребро допускает явное задание через переменную x'.

В силу неравенства (15), двойной интеграл в (14) сходится равномерно по параметру $h\ge0$; следовательно, этот интеграл непрерывен по $h\ge0$. То есть,

$$\lim_{h\to+0}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\int_{-\delta_2}^{\delta_2}\psi_i\left(x',y',f\left(x',y'\right)-h\right)\left[\mathbf{u}\left(x',y',f\left(x',y'\right)-h\right)\times\mathbf{v}\left(x',y',f\left(x',y'\right)-h\right)\right]d\mathbf{S}'_-=$$
$$=\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\int_{-\delta_2}^{\delta_2}\psi_i\left(x',y',f\left(x',y'\right)\right)\left[\mathbf{u}\left(x',y',f\left(x',y'\right)\right)\times\mathbf{v}\left(x',y',f\left(x',y'\right)\right)\right]d\mathbf{S}'_-$$

Тогда из (14) следует, что

$$\int_{U_i(-0)}\operatorname{div}\left(\psi_i\left(\mathbf{r}\right)\left[\mathbf{u}\left(\mathbf{r}\right)\times\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\right)\right]\right)dV=$$
$$=\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\int_{-\delta_2}^{\delta_2}\psi_i\left(x',y',f\left(x',y'\right)\right)\left[\mathbf{u}\left(x',y',f\left(x',y'\right)\right)\times\mathbf{v}\left(x',y',f\left(x',y'\right)\right)\right]d\mathbf{S}'_-. \tag{16}$$

Аналогично $U_i\left(-h\right)$ и $U_i\left(-0\right)$ определяются области $U_i\left(h\right)$ и $U_i\left(+0\right)$; затем доказывается, что

$$\int_{U_i(+0)}\operatorname{div}\left(\psi_i\left(\mathbf{r}\right)\left[\mathbf{u}\left(\mathbf{r}\right)\times\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\right)\right]\right)dV=$$
$$=\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\int_{-\delta_2}^{\delta_2}\psi_i\left(x',y',f\left(x',y'\right)\right)\left[\mathbf{u}\left(x',y',f\left(x',y'\right)\right)\times\mathbf{v}\left(x',y',f\left(x',y'\right)\right)\right]d\mathbf{S}'_+, \tag{17}$$

где $dS'_+=-dS'_-$. Из (16) и (17) следует, что

$$\int_{U_i}\operatorname{div}\left(\psi_i\left(\mathbf{r}\right)\left[\mathbf{u}\left(\mathbf{r}\right)\times\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\right)\right]\right)dV=$$
$$\int_{U_i(-0)}\operatorname{div}\left(\psi_i\left(\mathbf{r}\right)\left[\mathbf{u}\left(\mathbf{r}\right)\times\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\right)\right]\right)dV+\int_{U_i(+0)}\operatorname{div}\left(\psi_i\left(\mathbf{r}\right)\left[\mathbf{u}\left(\mathbf{r}\right)\times\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\right)\right]\right)dV=0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_{U_i} \operatorname{div}\left(\psi_i(\mathbf{r})\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]\right)dV = 0,$$

когда U_i окружает вершину $\partial\Omega$, а также точку гладкости $\partial\Omega$ и любую точку ∂T (причем для точек гладкости $\partial\Omega$ и всех точек ∂T доказательство оказывается гораздо проще в силу возможных непрерывных продолжений $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ на эти точки). Следовательно, в формуле (12) остается только k первых слагаемых (с интегралами по окрестностям точек S_R):

$$\int\limits_{O_R} \operatorname{div}\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]dV = \sum_{i=1}^{k}\int\limits_{U_i} \operatorname{div}\left(\psi_i(\mathbf{r})\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]\right)dV =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \oint\limits_{U_i\cap S_R} \psi_i(\mathbf{r})\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}dS = \sum_{i=1}^{k} \oint\limits_{S_R} \psi_i(\mathbf{r})\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}dS =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \oint\limits_{S_R} \psi_i(\mathbf{r})\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}dS = \oint\limits_{S_R} \sum_{i=1}^{m} \psi_i(\mathbf{r})\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}dS = \oint\limits_{S_R} \left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}dS.$$

В выполненных тождественных преобразованиях учтено, что если $\operatorname{supp}\psi_i(\mathbf{r})\subset U_i$, то интеграл по пересечению $U_i\cap S_R$ от $\psi_i(\mathbf{r})\left[\mathbf{u}(\mathbf{r})\times\mathbf{v}(\mathbf{r})\right]\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{r}}$ равен интегралу от этой же функции по всей сфере S_R: за пределами U_i подынтегральная функция, все равно, тождественно нулевая. Также учтено, что суммирование от 1 до k можно заменить на суммирование от 1 до m, так как при $i>k$ носитель $\psi_i(\mathbf{r})$ не имеет общих точек с S_R, и соответствующие слагаемые-интегралы равны нулю. **Лемма доказана.**

Лемма 2. *Пусть поле* $\mathbf{u} = -\operatorname{grad}\chi(\mathbf{r})$, *определенное непрерывно дифференцируемое в* $\mathrm{R}^3\setminus\overline{\Omega}$, *допускает непрерывное продолжение на все точки гладкости* $\partial\Omega$, *удовлетворяет на ребровых точках граничному условию вида (6), и на каждой грани* $\partial\Omega$ $\chi(\mathbf{r})\equiv\mathrm{const}$. *Тогда эти константы одинаковы для всех граней* $\partial\Omega$.

Доказательство. Пусть в условиях опр. 2 на грани, удовлетворяющей неравенству $y'<g(x')$, $\chi(\mathbf{r}')\equiv C_1=\mathrm{const}$, а на грани, удовлетворяющей неравенству $y'>g(x')$, $\chi(\mathbf{r}')\equiv C_2=\mathrm{const}$.

Так как $\mathbf{u}$ удовлетворяет граничному условию вида (6), прямоугольную окрестность в условиях опр. 2 можно выбрать достаточно малой, чтобы все условия опр. 2 выполнялись, и, при этом, для некоторой константы A выполнялось неравенство

$$\left|\mathbf{u}(0,y',z')\right| \le \frac{A}{\left((y')^2+(z')^2\right)^{\alpha/2}}, \tag{18}$$

где $\alpha<1/2$. Рассмотрим криволинейный интеграл второго рода по кривой, состоящей из следующих звеньев:

$$\Gamma_1 = \left\{(x',y',z') : x'=0, y'=-h, f(0,-h)\le z'\le f(0,-h)+h\right\}, \tag{19}$$

$$\Gamma_2 = \left\{(x',y',z') : x'=0, y'\in[-h;h], z'=f(0,y')\right\}, \tag{20}$$

$$\Gamma_3 = \left\{(x',y',z') : x'=0, y'=h, f(0,h)\le z'\le f(0,h)+h\right\}, \tag{21}$$

где направление интегрирования выбрано от грани, определяемой неравенством $y' < g(x')$, к грани, определяемой неравенством $y' > g(x')$ (рис. 2).

В силу потенциальности поля $\mathbf{u}$,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u}(0, y', z') \cdot \mathbf{k}(y', z')\, dL = \chi(-h, f(0,-h)) - \chi(h, f(0,h)) = C_2 - C_1, \tag{22}$$

где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ – кривая интегрирования, $\mathbf{k}$ – единичный касательный вектор, dL – элемент длины.

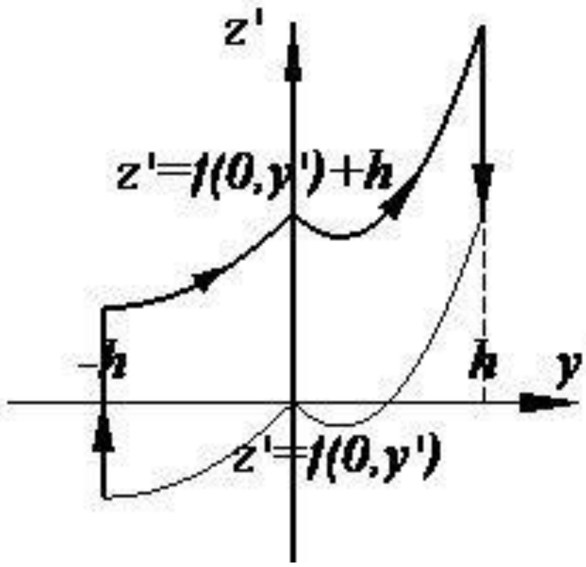

Рис. 2. Кривая интегрирования
Fig. 2. Curve of integration

Произведем оценку интеграла по звену кривой (19), воспользовавшись неравенством (18):

$$\left| \int_{\Gamma_1} \mathbf{u}(0, y', z') \cdot \mathbf{k}(y', z')\, dL \right| = \left| \int_{f(0,-h)}^{f(0,-h)+h} u_{z'}(0, y', z')\, dz' \right| \le \int_{f(0,-h)}^{f(0,-h)+h} \left| u_{z'}(0, y', z') \right| dz' \le$$

$$\le \int_{f(0,-h)}^{f(0,-h)+h} \frac{A}{\left(h^2 + (z')^2\right)^{\alpha/2}}\, dz' \le \int_{f(0,-h)}^{f(0,-h)+h} \frac{A}{|z'|^{\alpha}}\, dz'. \tag{23}$$

Оценочное неравенство для последнего интеграла в (23) может быть получено рассмотрением случаев: I) $f(0,-h) \le 0$; II) $f(0,-h) \le 0$ и $f(0,-h) + h > 0$; III) $f(0,-h) > 0$. Заметим, что в случае II), а также в случае I) при $f(0,-h) = 0$, интеграл, полученный в (23), является несобственным, но сходящимся. И, в конечном счете, для всех случаев I-III справедливо неравенство:

$$\int_{f(0,-h)}^{f(0,-h)+h} \frac{A}{|z'|^{\alpha}}\, dz' \le \frac{|f(0,-h)|^{1-\alpha} + |f(0,-h) + h|^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \tag{24}$$

Аналогично происходит оценка интеграла по звену (21):

$$\left|\int_{\Gamma_3}\mathbf{u}\left(0,y',z'\right)\cdot\mathbf{k}\left(y',z'\right)dL\right|\le\frac{\left|f\left(0,h\right)\right|^{1-\alpha}+\left|f\left(0,h\right)+h\right|^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \qquad (25)$$

Теперь выполним оценку сверху для звена (20):

$$\left|\int_{\Gamma_2}\mathbf{u}\left(0,y',z'\right)\cdot\mathbf{k}\left(y',z'\right)dL\right|\le\int_{-h}^{0}\left|u_{y'}\left(0,y',f\left(0,y'\right)\right)\right|dy'+\int_{-h}^{0}\left|u_{z'}\left(0,y',f\left(0,y'\right)\right)f'_{y'}\left(0,y'\right)\right|dy'+$$

$$+\int_{0}^{h}\left|u_{y'}\left(0,y',f\left(0,y'\right)\right)\right|dy'+\int_{0}^{h}\left|u_{z'}\left(0,y',f\left(0,y'\right)\right)f'_{y'}\left(0,y'\right)\right|dy'\le$$

$$\le\int_{-h}^{0}\frac{1+M_1}{\left(\left(y'\right)^2+f^2\left(y',z'\right)\right)^{\alpha/2}}dy'+\int_{0}^{h}\frac{1+M_2}{\left(\left(y'\right)^2+f^2\left(y',z'\right)\right)^{\alpha/2}}dy'\le\int_{-h}^{0}\frac{1+M_1}{\left(-y'\right)^{\alpha}}dy'+\int_{0}^{h}\frac{1+M_2}{\left(y'\right)^{\alpha}}dy'=$$

$$=\frac{\left(1+M_1\right)h^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{\left(1+M_2\right)h^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{\left(2+M_1+M_2\right)h^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \qquad (26)$$

где M_1 и M_2 – положительные константы, ограничивающие сверху $\left|f'_{y'}\left(0,y'\right)\right|$ на отрезках $\left[-h;0\right]$ и $\left[0;h\right]$ соответственно.

Заметим, что в силу непрерывности функции $f\left(x',y'\right)$ и условия $f\left(0,0\right)=0$ правые части (24)-(26) стремятся к нулю при $h\to+0$. Следовательно, левая часть равенства (22) (интеграл по всей кривой Γ) тоже стремится к нулю при $h\to+0$. Правая часть (22) представляет собой разность констант C_1 и C_2, и от h не зависит. Следовательно, $C_1-C_2=0$ и $C_1=C_2$.

По предположению все особые точки $\partial\Omega$ удовлетворяют опр. 2-4. Край любой грани может состоять только из таких точек. Особая точка конического типа не может быть общей точкой у краев двух разных граней.

То есть, «соединять» две разные грани может либо ребровая точка, либо вершина реберного типа, но, по опр. 3, в вершине реберного типа сходится некоторое количество кривых, состоящих из точек реберного типа. Следовательно, в силу связности $\partial\Omega$, все конечное множество граней $\partial\Omega$ можно упорядочить так, чтобы каждая последующая грань имела с каждой предыдущей общую краевую точку реберного типа. Тогда, в силу доказанного выше для двух граней, имеющих общую краевую точку реберного типа, $\chi\left(\mathbf{r}\right)$ равна одной и той же константе на всей поверхности $\partial\Omega$.

Лемма доказана.

Теперь докажем основную теорему.

Теорема. *У начально-краевой задачи (1)-(10) решение* $\mathbf{E}\in\boldsymbol{K}$ *и* $\mathbf{H}\in\boldsymbol{L}$ *может быть только тривиальным.*

Доказательство. Рассмотрим шар $O_R\supset\bar{\Omega}\cup\bar{T}$. Умножим первое уравнение системы (1) на $\mathbf{H}$, второе на $\mathbf{E}$, затем вычтем из второго уравнения первое и проинтегрируем получившуюся разность по O_R:

$$\int\limits_{O_R}\left(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r},t)-\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right)dV=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\sigma(\mathbf{r})\left|\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right|^2 dV+\frac{\mu_0}{2}\int\limits_{O_R}\frac{\partial\left|\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\right|^2}{\partial t}dV. \tag{27}$$

В силу леммы 1,

$$\int\limits_{O_R}\left(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\operatorname{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r},t)-\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right)dV=\oint\limits_{S_R}\left[\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right]\mathbf{e}_r dS.$$

Из условий (5) и (6) следует, что

$$\oint\limits_{S_R}\left[\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right]\mathbf{e}_r dS\le\oint\limits_{S_R}\mathrm{O}\left(\frac{1}{R^3}\right)dS=\mathrm{O}\left(\frac{1}{R}\right)\underset{R\to+\infty}{\to}0.$$

Таким образом, из (27) следует, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathrm{R}^3}\left|\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\right|^2 dV=-\frac{2}{\mu_0}\int\limits_{\Omega}\sigma(\mathbf{r})\left|\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right|^2 dV \tag{28}$$

где учтено, что, в силу (12), интегрирование по объему и дифференцирование по времени можно переставить. То есть, интеграл $\int\limits_{\mathrm{R}^3}\left|\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\right|^2 dV$ является невозрастающей функцией времени. При этом, он неотрицателен и в начальный момент времени, в силу (11), равен нулю. Следовательно, $\mathbf{H}^{\mathrm{I,II}}(\mathbf{r},t)\equiv\mathbf{0}$. Тогда, в силу (28), $\mathbf{E}^{\mathrm{I}}(\mathbf{r},t)\equiv\mathbf{0}$ в Ω.

Из первого уравнения системы (1) вытекает, что в $\mathrm{R}^3\setminus\bar{\Omega}$ $\operatorname{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\equiv\mathbf{0}$. Тогда, в силу поверхностной односвязности $\mathrm{R}^3\setminus\bar{\Omega}$, для поля $\mathbf{E}^{\mathrm{II}}$ существует потенциал [11]: $\mathbf{E}^{\mathrm{II}}=-\operatorname{grad}\chi(\mathbf{r})$ (потенциал $\chi(\mathbf{r})$ зависит и от t; однако эта зависимость в дальнейших рассуждениях не играет роли и не будет явно указываться). В силу свойств $\mathbf{E}$, функция $\chi(\mathbf{r})$ дважды непрерывно дифференцируема в $\mathrm{R}^3\setminus\bar{\Omega}$ и допускает непрерывно дифференцируемое продолжение на все точки гладкости $\partial\Omega$.

Из (2)-(8) вытекает, что $\chi(\mathbf{r})$ является в $\mathrm{R}^3\setminus\bar{\Omega}$ решением следующей краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\Delta\chi=0, \tag{29}$$

$$\left.\frac{\partial\chi}{\partial\tau}\right|_{\partial\Omega}=0, \tag{30}$$

$$\oint\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\chi}{\partial n}dS=0, \tag{31}$$

$$\chi=\mathrm{O}(\ln r),\ r\to+\infty, \tag{32}$$

$$\mathrm{grad}\chi = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{norm}}^{\alpha}}\right),\ \rho_{\mathrm{norm}} \to 0, \tag{33}$$

$$\mathrm{grad}\chi = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(r')^{\beta}\left(\rho_{1,\mathrm{norm}}\rho_{2,\mathrm{norm}}\ldots\rho_{n,\mathrm{norm}}\right)^{\alpha}}\right), \tag{34}$$

$$\mathrm{grad}\chi = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(r')^{\beta}}\right). \tag{35}$$

где $\partial/\partial\tau$ и $\partial/\partial n$ – обозначения, соответственно, касательной и нормальной производной (для определенности, будем предполагать, что речь идет о нормали, внешней по отношению к Ω). Из (30) вытекает, что на каждой отдельной грани $\partial\Omega$ $\chi(\mathbf{r}) \equiv \mathrm{const}$. В силу леммы 2, из (33) следует, что эта константа – одна и та же для всех граней $\partial\Omega$; обозначим ее C. Известно представление для функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа снаружи некоторого шара и растущей при $r \to +\infty$ не быстрее r [15]:

$$\chi(\mathbf{r}) = \chi_0(\mathbf{r}) + A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z, \tag{36}$$

где $\chi_0(\mathbf{r})$ – гармоническая снаружи шара функция, то есть, функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа и стремящаяся к нулю при $r \to +\infty$; A_i – некоторые константы. Причем для $\chi_0(\mathbf{r})$ установлены асимптотические оценки [15]:

$$|\chi_0(\mathbf{r})| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{r}\right),\ r \to +\infty, \tag{37}$$

$$\left|\frac{\partial\chi_0(\mathbf{r})}{\partial r}\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2}\right),\ r \to +\infty. \tag{38}$$

Так как, в силу (32), $\chi(\mathbf{r})$ при $r \to +\infty$ растет не быстрее $\ln r$, в выражении (36) $A_1 = A_2 = A_3 = 0$. То есть функцию $\chi_0(\mathbf{r}) = \chi(\mathbf{r}) - A_0$ можно считать определенной не только снаружи некоторого шара достаточно большого радиуса, но и во всей области $\mathrm{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$. Причем очевидно, что $\chi_0(\mathbf{r})$, как и $\chi(\mathbf{r})$, удовлетворяет уравнению Лапласа (29), граничным условиям вида (30), (31), (33)-(35), а также удовлетворяет асимптотическим оценкам (37), (38). Кроме того, $\mathbf{E}^{\mathrm{II}} = -\mathrm{grad}\chi_0(\mathbf{r})$, то есть, можно полностью перейти от потенциала $\chi(\mathbf{r})$ к потенциалу $\chi_0(\mathbf{r})$. В силу (29),

$$\mathrm{div}\left(\chi_0(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\chi_0(\mathbf{r})\right) = \left|\mathrm{grad}\chi_0(\mathbf{r})\right|^2 + \chi(\mathbf{r})\Delta\chi_0(\mathbf{r}) = \left|\mathrm{grad}\chi(\mathbf{r})\right|^2.$$

Следовательно, в силу (33)-(35), функция $\mathrm{div}(\chi_0\mathrm{grad}\chi_0)$ суммируема в $O_R \setminus \bar{\Omega}$. Кроме того, воспользовавшись, как в лемме 1, разбиением единицы, можно доказать, что, в силу (33)-(35), объемный интеграл от $\mathrm{div}(\chi\mathrm{grad}\chi)$ по $O_R \setminus \bar{\Omega}$ допускает сведение к поверхностному интегралу (даже несмотря на то, что нельзя гарантировать непрерывность векторного поля $\chi_0 \mathrm{grad}\chi_0$ и, тем более, его производных вплоть до границы $\partial\Omega$):

$$\int\limits_{O_R\setminus\bar{\Omega}} \left|\mathrm{grad}\chi_0(\mathbf{r})\right|^2 dV = \oiint\limits_{S_R} \chi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial\chi_0(\mathbf{r})}{\partial r} dS - \oiint\limits_{\partial\Omega} \chi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial\chi_0(\mathbf{r})}{\partial n} dS . \tag{39}$$

В силу условия (31),

$$\oiint\limits_{\partial\Omega} \chi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial\chi_0(\mathbf{r})}{\partial n} dS = (C - A_0) \oiint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial\chi_0(\mathbf{r})}{\partial n} dS = 0 . \tag{40}$$

В силу асимптотических оценок (37) и (38),

$$\oiint\limits_{S_R} \chi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial\chi_0(\mathbf{r})}{\partial r} dS = \oiint\limits_{S_R} \mathrm{O}\left(\frac{1}{R^3}\right) dS = \mathrm{O}\left(\frac{1}{R}\right) \underset{R\to+\infty}{\to} 0 . \tag{41}$$

Из (39)-(41) вытекает, что $\int\limits_{\mathrm{R}^3} \left|\mathrm{grad}\chi_0(\mathbf{r})\right|^2 dV = 0$ и, следовательно, $\mathbf{E}^{\mathrm{II}} = -\mathrm{grad}\chi_0(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0}$.

Теорема доказана.

Заключение

Методы и приемы, использовавшиеся в данной работе для доказательства единственности решения начально-краевой задачи электродинамики в квазистационарном приближении, могут быть также применены к случаю ферромагнитного проводника с негладкими границами. Так как задачи электродинамики применительно к ферромагнитным проводникам представляют немалый интерес для неразрушающего контроля, обобщение полученных в работе результатов на ферромагнитные металлы имеет немалое фундаментальное и прикладное значение и является основной целью дальнейших исследований по тематике статьи.

Список литературы
References

1. Марвин С.В. 2016. Существование и единственность решения начально-краевой задачи для однородной системы уравнений Максвелла в случае неферромагнитного дефектного металлического тела. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, 1: 105-117.

Marvin S.V. 2016. Existence and the uniqueness of solution of initial-boundary problem for the uniform system of equations of Maxwell in the case of nonferromagnetic defective metallic body. Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 1: 105-117.

2. Марвин С. В. 2016. Начально-краевая задача структуроскопии неферромагнитного металлического тела с инородными диэлектрическими включениями остаточным полем мгновенно выключенного стороннего тока. Дефектоскопия, 2: 42-54.

Marvin S.V. 2016. An initial-boundary value problem of structurescopy of a nonferromagnetic metal solid with foreign dielectric inclusions using the residual field of an instantaneously cut-off extraneous current. Russian journal of nondestructive testing, 52 (2): 85-94.

3. Марвин С.В. 2017. Начально-краевая задача для системы уравнений Максвелла в случае неограниченной немагнитной проводящей среды под диэлектрическим слоем. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика, 13 (262), выпуск 47: 5-14

Marvin S.V. 2017. An initial–boundary value problem for the system of Maxwell’s equations in the case of an unlimited nonmagnetic conductive medium under dielectric layer. Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics &Physics, 13 (262), issue 48: 50–57.

4. Калинин А.В. 2007. Математические задачи физической диагностики. Корректность задач электромагнитной теории в стационарном и квазистационарном приближении. Нижний Новгород, Нижегородский государственный университет, 121.

Kalinin A.V. 2007. Matematicheskie zadachi fizicheskoj diagnostiki. Korrektnost’ zadach v statzionarnom i kvazistatzionarnom priblizhenii [Mathematical problems of physical diagnostics. Correct-ness of problems of the electromagnetic theory in the stationary and quasi-stationary approximation]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State University, 121. (in Russian)

5. Тозони О.В., Маергойз И.Д. 1974. Расчет трехмерных электромагнитных полей. Киев, Техника, 352.

Tozoni O.V., Maergoiz I.D. 1974. Raschet trehmernyh elektromagnitnyh polei [Three-dimensional calculation of electromagnetic fields]. Kiev, Technique, 352. (in Russian)

6. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. 1991. Математические модели электродинамики. М., Высшая школа, 224.

Il’inskii, A.S., Kravtsov, V.V., Sveshnikov, A.G. 1991. Matematicheskie modeli elektrodinamiki [Mathematical Models of Electrodynamics]. Moscow: Vysshaya Shkola, 224. (in Russian)

7. Фикера Г. 1975. Асимптотическое поведение электрического поля и плотности электрического заряда в окрестности сингулярных точек проводящей поверхности. Успехи математических наук, выпуск 3 (183): 105-124.

Fichera G. 1975. Asymptotic behavior of the electric field and density of the electric charge in the neighborhood of singular points of a conducting surface. Russian Mathematical Surveys, issue 3 (183): 107-127.

8. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. 1980. О первой краевой задаче для уравнений гидродинамики в области с кусочно-гладкой границей. Записки научного семинара ЛОМИ, 96: 179-186.

Maz'ya V.G., Plamenevskii B.A. 1980. First boundary value problem for the equations of hydrodynamics in a domain with a piecewise-smooth boundary. Journal of Soviet Mathematics, 21 (5): 777–783.

9. Кондратьев В.А., Олейник О.А. 1983. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях. Успехи математических наук, выпуск 2 (230): 3-76.

Kondrat'ev V. A., Oleinik O.A. 1983. Boundary-value problems for partial differential equations in non-smooth domains. Russian Mathematical Surveys, issue 2 (230): 1-66.

10. Мазья В.Г. 1988. Граничные интегральные уравнения. В. Кн.: Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Т. 27. М.: ВИНИТИ: 131-228.

Maz'ya V.G. Granichnye integral uravneniya. V kn. : Itogi nauki I tehniki. Seriya «Sovremennye 196roblem matematiki. Fundamental’nye napravleniya» [The results of science and technology. Series «modern problems of mathematics. Fundamental directions]. Vol. 27. Moscow, VINITY: 131-228. (in Russian)

11. Кудрявцев Л.Д. 1981. Курс математического анализа. Т. 2. М., Высшая школа, 584.

Kudryavtsev L. D. 1981. Kurs matematicheskogo analiza [Course of mathematical analysis]. Vol. 2. Moscow, Vysshaya shkola, 584. (in Russian)

12. Тамм И. Е. 2003. Основы теории электричества. М., Физматлит, 2003, 616.

Tamm, I.E., Osnovy teorii elektrichestva [Fundamentals of the Theory of Electricity], Moscow: Fizmatlit, 2003, 616. (in Russian)

13. Е. Петрушенко Е.И. 1966. К расчету вихревых токов в проводниках сложной формы. Известия Академии наук СССР. Энергетика и транспорт, 6: 59-70

Petrushenko E.I. For the calculation of eddy currents in the conductors with difficult form. Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Energy and transport, 6: 59-70

14. Е. Никольский С.М. 1973. Курс математического анализа. Т. 2. М., Наука, 392

Nikol’skii S.M. 1973. Kurs matematicheskogo analiza [Course of mathematical analysis]. Vol. 2. Moscow, Nauka, 392. (in Russian)

15. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М., Наука, 444.

Sobolev S.L. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 444. (in Russian)