УДК 517.9
DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-2-136-143

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ 2×2 СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

ON A REPRESENTATION OF A GENERAL SOLUTION OF SECOND ORDER ELLIPTIC 2×2 - SYSTEMS ON THE PLANE

А.П. Солдатов, О.А. Тарасова
A. P .Soldatov, O.A. Tarsova

Научно-исследовательский институтт
прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360002, КБР, г. Нальчик, Долинск, ул. Балкарова, 2

Research institute of applied mathematics and automation of KBNTs RAS,
2 Balkarov St, Russia, Dolinsk, Nalchik, 360002, KBR,

E-mail: soldatov48@gmail.com, tarsova_ o@bsu.edu.ru

Аннотация
Рассматривается эллиптическая система второго порядка на плоскости, состоящая из двух уравнений с постоянными (и только старшими коэффициентами). Описано явное представление общего решения этой системы через так называемые J − аналитические функции.

Abstract
An elliptic second order system on the plane consisting of two equations with constant (and only leading) coefficients is considered. An explicit representation of a general solution of this system is given via the so-called J- analytic functions.

Ключевые слова: эллиптические системы второго порядка, дифференциальные уравнения.
Key words: second-order elliptic systems, differential equations.

Рассмотрим эллиптическую систему второго порядка

$$a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

с постоянными вещественными 2×2– матречными коэффициентами $a_j \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. С ней свяже характеристический матречный трехчлен

$$p(z) = a_0 + 2a_1 z + a_2 z^2 = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_4 & p_2 \end{pmatrix}(z). \qquad (2)$$

И скалярный многочлен $\chi(z) = \det p(z)$. Условие эллиптичности заключается в том, что матрица a_2 обратима и многочлен χ не имеет вещественных корней. Обозначим σ множество корней этого многочлена в верхней полуплоскости, ко- торое состоит из двух или одной точки. По отношению к нему рассматриваемые системы разбиваются на три класса $(i)-(iii)$, определяемых условиями

$$(i)\sigma=\{\nu_1,\nu_2\},\nu_1\neq\nu_2;\ (ii)\sigma=\{\nu\},\ p(\nu)\neq 0;\ (iii)\sigma=\{\nu\},\ p(\nu)=0.$$

Заметим, что если два скалярных трехчлена имеют общий корень ν в верхней полуплоскости, то они линейно зависимы, точнее, пропорциональны многочлену $(z-\nu)(z-\overline{\nu})$.

Поэтому класс (iii) определяется условием

$$p(z) = (z^2 - 2(\mathrm{Re}\,\nu)\mathrm{z}+|\nu|^2)a_2.$$

Для каждого из трех классов можем ввести матрицу

$$(i)J=\begin{pmatrix}\nu_1 & 0\\ 0 & \nu_2\end{pmatrix},\quad (ii)J=\begin{pmatrix}\nu & 1\\ 0 & \nu\end{pmatrix},\quad (iii)J=\nu, \tag{3}$$

где (здесь и ниже) скалярная матрица (когда ясно о каком порядке идет речь) отождествляется со скаляром.

Помимо этой матрицы с системой (1) можно связать x[1] матрицу b, обладающую следующими свойствами.

Лемма 1. Существует такая матрица $b\in C^{2\times 2}$, что

$$a_0b+2a_1bJ+a_2bJ^2=0,\det\begin{pmatrix}b & bJ\\ \overline{b} & \overline{b}\overline{J}\end{pmatrix}\neq 0. \tag{4}$$

Любая другая матрица $\tilde{b}$ этого типа связана с b соотношением $\tilde{b}=bd$, где матрица d обратима и коммутирует с J, т.е. имеет вид

$$(i)d=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix},\quad (ii)d=\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ 0 & \lambda\end{pmatrix},\quad (iii)d=\in \mathrm{R}^{2\times 2}, \tag{5}$$

Конечно, в случае (iii) в качестве b можно взять любую обратимую матрицу, в частности, можно положить b = 1.

Матрица J определяет простейшую эллиптическую систему первого порядка

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}-J\frac{\partial\phi}{\partial x}=0, \tag{6}$$

обобщающую классическую система Коши – Римана (она соответствует случаю скалярной матрицы J = i). Нетрудно видеть, что в зависимости от вида матрицы J решения $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ этой системы связаны с парой аналитических функций взаимно обратными соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&(i)\phi_j(z) = \psi_j(x + \nu_j y),\ j = 1{,}2;.\\
&(ii)\phi_1(z) = \psi(x + \nu y) + y\psi_0(x + \nu y), \phi_2(z) = \psi_0(x + \nu y);.\\
&(iii)\phi_j(z) = \psi_j(x + \nu y),\ j = 1{,}2.
\end{aligned} \tag{7}
$$

В дальнейшем решения системы (6) называем кратко J-аналитическими функциями. Этот термин связан с тем, что для них по отношению к матрице

$$z_J = x + yJ \tag{8}$$

элементарные факты теории аналитических функций имеют свои аналоги. Например, если вектор-функция ϕ непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$, ограниченной гладким контуром Г, то имеет место формула Коши:

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t - z)_J\, dt_J \phi(t), \quad z \in D.$$

где контур Г ориентирован положительно по отношению к D и аналогично (8) положено $dt = dt_1 + dt_2 J$. В частности, в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ функция ϕ раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Тейлора:

$$\phi(z) = \sum_{k \ge 0}(z - z_0)_J^k \phi^k(z_0), \phi^k = \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}.$$

Решения системы (6) играют по отношению к (1) ту же роль, что и аналитические функции по отношению к уравнению Лапласа.

Теорема 1. Общее решение u системы (1) выражается через J-аналитические функции по формуле

$$u = \mathrm{Re} b\phi, \tag{9}$$

причем функция ϕ определяется с точностью до постоянного вектора единственным образом и ее производная $\phi' = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}$ однозначна в (вообще говоря многосвязной) области D.

Эта теорема (в более общей ситуации эллиптических $(l \times l)$ -систем) была установлена А.В. Бицадзе[2] (см. также [1]). Правда, за основу им было положено представление через аналитические функции ψ_1, ψ_2, которое получается подстановкой в (9) формул (6). Однако исследование краевых задач для эллиптических систем второго и более высокого порядков системы (1) значительно упрощается [3], если за основу взять представление (9) непосредственно через J-аналитические функции.

Матрица b, значение которой определяется теоремой 1, может быть вычислена явно в терминах многочленов p_j в (2) и корней ν ∈ σ характеристического многочлена. Конечно, согласно второй части леммы 1 достаточно указать хотя бы одну такую матрицу.

Теорема 2.

(a) Пусть одна из пар многочленов $\{p_2, p_4\}$и $\{p_1, p_3\}$линейно независима. Тогда имеет место один из двух случаев (i), (ii) и соответственно этим случаям условиям леммы 1 удовлетворяет матрица

$$(i)b = \begin{pmatrix} p_2(\nu_1) & p_2(\nu_2) \\ -p_4(\nu_1) & -p_4(\nu_2) \end{pmatrix}, (ii)b = \begin{pmatrix} p_2(\nu) & p_2'(\nu) \\ -p_4(\nu) & -p_4'(\nu) \end{pmatrix}, \tag{10a}$$

если пара $\{p_2, p_4\}$линейно независима, и матрица

$$(i)b = \begin{pmatrix} -p_3(\nu_1) & -p_3(\nu_2) \\ p_1(\nu_1) & p_1(\nu_2) \end{pmatrix}, (ii)b = \begin{pmatrix} -p_3(\nu) & -p_3'(\nu) \\ p_1(\nu) & p_1'(\nu) \end{pmatrix}, \tag{10b}$$

если пара $\{p_1, p_3\}$ линейно независима.

(b) Пусть обе пары $\{p_2, p_4\}$и $\{p_1, p_3\}$линейно зависимы. Тогда имеет место один из двух случаев (i), (iii), и в первом из них, если нумерацию корней выбрать так, чтобы

$$p_1(\nu_1) = p_3(\nu_1) = 0, p_2(\nu_2) = p_4(\nu_2) = 0, \tag{11}$$

то условиям леммы 1 удовлетворяет матрица

$$b = \begin{pmatrix} \delta_2 & -\delta_3 \\ -\delta_4 & \delta_1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где δ_j – коэффициент при z^2 многочлена $p_j(z)$.

Доказательство. Пусть $b_{(j)}$, j = 1, 2, означают столбцы матрицы b, рассматриваемые как элементы C^2. Если имеет место случай (i), то матрица J диагональна и из соотношений (4) легко следует, что вектор $e_j = b_{(j)}$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению ν_j квадратичного пучка $p(z)$, т.е. $p(\nu_j)e_j = 0$. Второе условие в (4) показывает, что этот вектор обязательно должен быть отличен от нуля. Тем самым с точностью до пропорциональности столбцы матрицы b определяются однозначно.

В случае (ii) из определения матрицы J видно, что вектор $e = b_{(1)}$ является собственным, а $e_0 = b_{(2)}$ присоединенным вектором этого пучка, т.е. $p(\nu)e = 0, p(\nu)e_0 p'(\nu)e = 0$, где штрих означает производную $p'(z) = 2(a_1 + a_2 z)$. Здесь также второе условие в (4) показывает, что вектор e обязательно должен быть отличен от нуля, хотя присоединенный вектор, определенный с точностью до слагаемого, кратного e, может быть нулевым. Неопределенность в выборе e и e_0 как раз описывается второй частью леммы 1.

В случае (iii) оба столбца $b_{(j)}$ являются собственными векторами, отвечающими ν, поскольку все C^2 состоит из собственных векторов. Рассмотрим далее присоединенную матрицу:

$$p^* = \begin{pmatrix} p_2 & -p_3 \\ -p_4 & p_1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

и пусть $p^*{}_{(k)}, k = 1,2$, означают ее столбцы. Воспользуемся тождеством

$$p(z)p^*(z) = \chi(z), \tag{14}$$

где $\chi = \det p$ рассматривается как скалярная матрица. Оно показывает, что для ν ∈ σ ненулевой столбец $e = p^*{}_{(k)}(\nu)$ является собственным вектором, отвечающим ν. Поэтому в случае (i) можем положить

$$b_{(j)} = p^*_{(s_j)}(\nu_j),\ j = 1,2, \tag{15}$$

где s_j есть номер ненулевого столбца матрицы $p^*(\nu_j)$. Такой номер обязательно найдется, поскольку в противном случае оказались бы в случае (iii).

В случае (ii) рассуждения аналогичны. При этом имеем равенство $\chi(\nu) = \chi'(\nu) = 0$, так что (14) вместе с продифференцированным тождеством дает соотношения

$$p(\nu)p^*_{(r(\ ))}(\nu) = 0,\ p(\nu)(p^*)_{(r)}(\nu) + p'(\nu)p^*_{(r(\ ))}(\nu) = 0.$$

Следовательно, $e = p^*{}_{(s)}(\nu)$ и $e_0 = (p^*)'_{(s)}(\nu)$ являются собственным и просоединенным векторами. Таким образом, в этом случае можем положить

$$b_{(1)} = p^*{}_{(s)}(\nu), b_{(2)} = (p^*)'_{(s)}(\nu), \tag{16}$$

где s есть номер ненулевого столбца матрицы $p^*(\nu)$.

Если некоторый столбец $p^*{}_{(s)}(\nu)$ обращается в нуль на собственном значении ν ∈ σ, то, очевидно пара его элементов линейно зависима. Обратно, пусть, например, элементы первого столбца матрицы (13) линейно зависимы. Тогда либо $p_4 = \lambda p_2, \lambda \neq 0$, либо $p_2 = 0$. В первом случае имеем равенство $\chi = p_2(p_1 - \lambda p_3)$ показывает, что $p_2(\nu) = 0$ для некоторого ν ∈ σ. Но тогда $p_4(\nu) = \lambda p_2(\nu)$ и, следовательно, $p_1^*(\nu) = 0$. Случай $p_2 = 0$ рассматривается аналогично.

Итак, равенство $p^*{}_{(s)}(\nu) = 0$ для некоторого ν ∈ σ равносильно тому, что элементы s-го столбца матрицы p^* линейно зависимы. Поэтому, если пара $\{p_2, p_4\}$ линейно независима, то в (15) и (16) можно положить $s_j = s = 1$, что дает формулы (10a). Аналогично, если пара $\{p_1, p_3\}$ линейно независима, то в (15) и (16) можно положить $s_j = s = 2$, что приводит к (10b).

Пусть, наконец, обе пары $\{p_2, p_4\}$ и $\{p_1, p_3\}$ линейно зависимы. Тогда, либо столбцы $p^*{}_{(1)}(\nu), p^*{}_{(2)}(\nu)$ обращаются в нуль в одной точке ν ∈ σ и мы имеем случай (iii). Либо имеем случай (i), и тогда при указанной в (11) нумерации корней имеем соотношения $p^*_{(1)}(\nu_2) = p^*_{(2)}(\nu_1) = 0, p^*_{(1)}(\nu_1) \neq 0, p^*_{(2)}(\nu_2) \neq 0,$ и, следовательно, матрица

$$b = \begin{pmatrix} p_2(\nu_1) & -p_3(\nu_2) \\ -p_4(\nu_1) & p_1(\nu_2) \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям леммы 1. В силу (11) многочлены p_j имеют вид:

$$p_j(z) = \delta_j (z-\nu_1)(z-\overline{\nu}_1),\ j = 1{,}3,$$
$$p_j(z) = \delta_j (z-\nu_2)(z-\overline{\nu}_2),\ j = 2{,}4,$$

так что с учетом последнего утверждения, леммы 1 в качестве b можно выбрать и матрицу (12).

Отметим, что определитель матрицы b в (12) всегда отличен от нуля, поскольку он совпадает с коэффициентом при z^4 характеристического многочлена

$$\chi = p_1 p_2 - p_3 p_4 .$$

Особо остановимся на случае, когда многочлены $p_3 = p_4 = 0$, т.е. когда система (1) распадается на два скалярных уравнения. Для этой системы оба коэффициента β_1 и β_2 отличны от нуля и имет место случай (i) или (iii), причем в обоих случаях можем положить b = 1 (в первом случае нужно воспользоваться второй частью леммы 1).

Проиллюстрируем теорему 2 на примере эллиптической системы (1) с коэффициентами

$$a_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, 0 \le j \le 2. \qquad (17)$$

По отношению к $w = u_1 + iu_2$ эту систему можно записать в виде одного C-линейного уравнения

$$\gamma_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\gamma_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \gamma_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0 \qquad (18)$$

с коэффициентами $\gamma_j = \alpha_j + i\beta_j$.

Отметим попутно, что коэффициенты общей системы (1) можно единственным образом представить в форме

$$a_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_j & -\tilde{\beta}_j \\ \tilde{\beta}_j & \tilde{\alpha}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, эту систему можно записать в виде одного R - линейного уравнения

$$lw + \tilde{l}\,\tilde{w} = 0,$$

где lw есть левая часть (18) и $\tilde{l}$ определяется аналогично по отношению к $\tilde{\gamma}_j = \tilde{\alpha}_j + i\tilde{\beta}_j$..

Для системы (1), (17) квадратные трехчлены p_j в (2) удовлетворят соотношениям $p_4 = -p_3, p_2 = p_1$, так что $\chi = p_1^2 + p_3^2 = q\overline{q}$ с многочленами $q = p_1 + ip_3$ и $\overline{q} = p_1 - ip_3$. Первый из них естественно назвать характеристическим многочленом уравнения (18). Очевидно, случай (iii) соответствует $p_1(\nu) = p_3(\nu) = 0$, для него в лемме 1 можно положить b = 1.

Лемма 2. Для системы (1), (17) в случаях (i) и (ii) условиям леммы 1 довлетворяют, соответственно, матрицы

$$(i)b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon(\nu_1)i & \varepsilon(\nu_2)i \end{pmatrix}, \qquad (ii)b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon(\nu)i & \varepsilon(\nu)i \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где $\varepsilon(\nu) = 1$, если $q(\nu) = 0$, и $\varepsilon(\nu) = -1$, если $q(\overline{\nu}) = 0$.

В частности, $\det b \neq 0$ тогда и только тогда, когда корни характеристического многочлена q лежат по разные стороны от вещественной прямой.

Доказательство. Очевидно, в случаях (i) и (ii) выполнено ровно одно из равенств $q(\nu) = 0$ или $q(\overline{\nu}) = 0$, причем $p_1(\nu)p_3(\nu) \neq 0$. Поэтому на основании теоремы 2 в последних двух случаях матрицу b можно взять в форме

$$(\mathrm{i})\mathrm{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon(\upsilon_1)\mathrm{i} & \varepsilon(\upsilon_2)\mathrm{i} \end{pmatrix}, (\mathrm{ii})\mathrm{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon(\upsilon)\mathrm{i} & \varepsilon(\upsilon)\mathrm{i} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

Кроме того, в случае (ii) либо $\mathrm{q}(\upsilon) = \acute{\mathrm{q}}(\upsilon) = 0$, либо $\mathrm{q}(\overline{\upsilon}) = \acute{\mathrm{q}}(\overline{\upsilon}) = 0$. В самом деле, пусть, например, $\mathrm{q}(\upsilon) = 0, \overline{\mathrm{q}}(\upsilon) \neq 0$. Тогда равенство $\acute{\mathrm{q}}(\upsilon)\overline{\mathrm{q}}(\upsilon) + \mathrm{q}(\upsilon)\acute{\overline{\mathrm{q}}}(\upsilon) = 0$ влечет $\acute{\mathrm{q}}(\upsilon) = 0$. При этом $\acute{\mathrm{p}}_1(\upsilon)\acute{\mathrm{p}}_2(\upsilon) \neq 0$, так как в противном случае $\acute{\mathrm{p}}_1$ и $\acute{\mathrm{p}}_3$ должны быть константами и, соответственно, p_1 и p_3 многочленами первой степени, что невозможно.

Итак, если $\mathrm{q}(\upsilon) = 0$, то $\mathrm{p}_1(\upsilon) = \mathrm{i}\mathrm{p}_3(\upsilon)$, причем в случае (ii) и $\acute{\mathrm{p}}_1(\upsilon) = \mathrm{i}\acute{\mathrm{p}}_3(\upsilon)$. Аналогично $\mathrm{p}(\overline{\upsilon}) = 0$ влечет $\mathrm{p}_1(\upsilon) = -\mathrm{i}\mathrm{p}_3(\upsilon)$, причем в случае (ii) и $\acute{\mathrm{p}}_1(\upsilon) = -\mathrm{i}\acute{\mathrm{p}}_3(\upsilon)$. В соответствии со второй частью леммы 1, отсюда следует, что вместе с матрицами (20) условиям леммы 1 также удовлетворяют и матрицы (19).

Список литературы
References

1. Солдатов А.П. 2003. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости. Дифференциальные уравнения, Т. 39, No 5: 674-686

Soldatov A. P. 2003. On the first and second boundary value problems for elliptic systems on a plane, Differential equations, T. 39, No 5: 674-686

2. Бицадзе А.В. 1966. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Москва.

Bitsadze, A.V. 1966. Boundary value problems for elliptic equations of second order, Moscow.

3. Солдатов А.П. 1991. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай, Изв. АН СССР"(сер.матем.),. Т.55, No.5: 1070-1100.

Soldatov A. P. 1991. A method of the theory of functions in boundary value problems on a plane. I. The Smooth case, New. AN SSSR" (ser.Matem.), T.55, No.5: 1070-1100.

4.Полунин В.А., Солдатов А.П. 2016. Система Моисила - Теодореску в многосвязных областях. Научные ведомости БелГУ. Математика.Физика., 27(248): 10-15.

Polunin V.A., Soldatov A.P. 2016. The Moisila-Teodoresku system in multicoherent areas. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 27(248): 10-15.

5. Полунин В.А., Солдатов А.П. 2017. Об интегральном представлении решений системы Моисила – Тедореску в многосвязных областях. Докл. РАН, 475 (4).

Polunin V.A., Soldatov A.P. 2017. About integrated submission of solutions of the Moisila-Tedoresku system in multicoherent areas. Reports of RAS, 475(4).

6. Шевченко В.И. 1970. О некоторых краевых задачах для голоморфного вектора, Сб. "Матем. физика". Киев. Вып.8: 172-187.

Shevchenko V.I. 1970. About some regional tasks for a holomorphic vector, Sb. "Matem. physics". Kiev. Issue 8: 172-187.

7.Agmon S, Douglis A., Nirenberg L. 1964. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. Comm. Pure Appl. Math., 17: 35-92.

8. Полунин В.А., Солдатов А.П. 2011. О сопряженной задаче Римана - Гильберта для системы Моисила - Теодореску, Научные ведомости БелГУ, 5 (22): 106 – 111

Polunin V.A., Soldatov A.P. 2011. About the interfaced Riemann's task - Gilbert for the Moisila-Teodoresku system. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 5(22): 106-111.