УДК: 517.9
DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-3-254-264

О ЧЕТЫРЕХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ ИЗ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

ABOUT FOUR DERINITIONS OF ALMOST PERIODIC AT INFINITY FUNCTIONS FROM HOMOGENEOUS SPACE

В.Е. Струков, И.И. Струкова
V.E. Strukov, I. I. Strukova

Воронежский государственный университет,
Россия, 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1

Voronezh State University, Russia,1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006

E-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com, irina.k.post@yandex.ru

Аннотация
В статье рассматриваются однородные пространства функций, заданных на всей вещественной оси (или полуоси), со значениями в комплексном банаховом пространстве. Вводится в рассмотрение и изучается новый класс почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства. На основании определений равномерно непрерывных и ограниченных почти периодических на бесконечности функции строятся четыре определения почти периодических на бесконечности функций из любого однородного пространства. Доказывается эквивалентность этих определений. Результаты статьи получены с существенным использованием теорий изометрических представлений и банаховых модулей.

Abstract
The article deals with homogeneous spaces of functions defined on the entire real axis (or semi-axis) with their values in a complex Banach space. We introduce and study a new class of almost periodic at infinity functions from homogeneous spaces. Based on the definitions of bounded uniformly continuous periodic at infinity functions we give analogous definitions for functions from homogeneous spaces. The first definition is based on the notion of an ε-period at infinity, the second one is concerned with the precompactness of the set of shifts, the third one is asymptotic and the fourth is connected to the equivalence class from the quotient space being a periodic vector. Then with the help of the properties of periodic vectors we prove the equivalence of all those definitions. The results of the article are obtained with substantial use of isometric representations theory and Banach modules theory.

Ключевые слова: почти периодическая на бесконечности функция, однородное пространство, банахов модуль, почти периодический вектор, спектр Берлинга.
Keywords: almost periodic at infinity function, homogeneous space, Banach module, almost periodic vector, Beurling spectrum.

Однородные пространства функций

Пусть X – комплексное банахово пространство, $End\,X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Пусть $\mathbb{J}$ – один из промежутков $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$.

Символом $L^1_{loc}(\mathbb{J},X)$ обозначим пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на $\mathbb{J}$ (классов эквивалентности) функций со значениями в банаховом пространстве X.

Через $S^p(\mathbb{J},X)$, где $p\in[1,\infty)$, будет обозначаться пространство Степанова [Левитан, Жиков, 1978], состоящее из функций $x\in L^1_{loc}(\mathbb{J},X)$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{S^p}=\sup_{s\in\mathbb{J}}\left(\int_0^1\|x(s+t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p},\ p\in[1,\infty),$$

принимаемая за норму.

Пространства Степанова играют важную роль при изучении дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (см. [Баскаков, 2009; Баскаков, 2013; Баскаков и др., 2014; Баскаков, Дуплищева, 2015; Баскаков, Диденко, 2018]).

Если $X=\mathbb{C}$, то символ X в обозначениях этих пространств будет опускаться.

Определение 1. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ функций, определенных на $\mathbb{R}$, со значениями в комплексном банаховом пространстве X, называется *однородным*, если выполнены следующие условия:

(a) пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ содержится в пространстве $S^1(\mathbb{R},X)$, причем вложение

$$\mathcal{F}(\mathbb{R},X)\subset S^1(\mathbb{R},X)$$

инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);

(b) в $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ определена и ограничена группа $S(t),t\in\mathbb{R}$, операторов сдвигов функций

$$(S(t)x)(s)=x(s+t),\ s,t\in\mathbb{R},\ x\in\mathcal{F}(\mathbb{R},X);\tag{1}$$

(c) для любых функций $f\in L^1(\mathbb{R})$, $x\in\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ их свертка

$$(f*x)(t)=\int_{\mathbb{R}}f(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{\mathbb{R}}f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau,\ t\in\mathbb{R},\tag{2}$$

принадлежит $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ и выполнено неравенство $\|f*x\|\le C\|f\|_1\|x\|$ для некоторой постоянной $C\ge1$ (как правило, $C=1$);

(d) $\varphi x\in\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ для любой $x\in\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ и любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi\in C_b(\mathbb{R})$ с компактным носителем $supp\,\varphi$, причем $\|\varphi x\|\le\|\varphi\|\|x\|$ и отображение $t\mapsto\varphi S(t)x:\mathbb{R}\to\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ непрерывно.

Через $\mathcal{F}_0(\mathbb{R},X)$ обозначим наименьшее замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$, содержащее все функции $\varphi x,\ x\in\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$, где $\varphi\in C_b(\mathbb{R},X)$ бесконечно дифференцируема и $supp\,\varphi$ – компакт.

Определение 2. Банахово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)$ функций из $S^1(\mathbb{R}_+,X)$ будем называть *однородным*, если существует однородное пространство $\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$, ассоциированное с пространством $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)$ такое, что для любой функции $x\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+,X)$ существует продолжение $y\in\mathcal{F}(\mathbb{R},X)$ со следующими свойствами:

1) $y(t)=x(t)$ для всех $t\in\mathbb{R}_+$;

2) $\|y\|\le C\|x\|,\ C>0$;

3) $y \in \mathsf{F}_0(\mathsf{R}_-, X)$;

4) $S(t)x \in \mathsf{F}(\mathsf{R}_+, X)$ для всех $t \geq 0$, $x \in \mathsf{F}(\mathsf{R}_+, X)$;

5) для любого другого продолжения $z \in \mathsf{F}(\mathsf{R}, X)$, обладающего свойствами 1–4, выполняется условие $y - z \in \mathsf{F}_0(\mathsf{R}, X)$.

Далее символом $\mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ будем обозначать однородное пространство. Если $X = \mathsf{C}$, то оно будет обозначаться символом $\mathsf{F}(\mathsf{J})$. Через $\mathsf{F}_c(\mathsf{J}, X)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$, состоящее из функций $x \in \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ таких, что функция $t \mapsto S(t)x : \mathsf{J} \to \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ непрерывна.

Пример 1. Следующие банаховы пространства функций, определенных на промежутке J, со значениями в банаховом пространстве X являются однородными. Все они являются линейными подпространствами из $L^1_{loc}(\mathsf{J}, X)$.

1. Пространства $L^p = L^p(\mathsf{J}, X)$, $p \in [1, \infty)$, измеримых по Лебегу и суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ (классов эквивалентности) функций, определенных на J, и принимающих свои значения в банаховом пространстве X. Нормы в данных пространствах имеют вид $\|x\|_p = \left(\int_{\mathsf{J}} \|x(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$. Отметим, что $(L^p(\mathsf{J}, X))_c = L^p(\mathsf{J}, X)$, $(L^p(\mathsf{J}, X))_0 = L^p(\mathsf{J}, X)$.

2. Пространство $L^\infty = L^\infty(\mathsf{J}, X)$ существенно ограниченных (классов эквивалентности) функций, определенных на J, со значениями в банаховом пространстве X и нормой $\|x\|_\infty = vrai \sup_{t \in \mathsf{J}} \|x(t)\|_X$. Отметим, что $(L^\infty(\mathsf{J}, X))_c = C_{b,u}(\mathsf{J}, X)$.

3. Пространства Степанова $S^p = S^p(\mathsf{J}, X)$, $p \in [1, \infty)$.

4. Пространства амальгам Винера $(L^p, l^q) = (L^p(\mathsf{J}, X), l^q(\mathsf{J}, X))$, $p \in [1, \infty)$, $q \in [1, \infty]$, состоящие из функций $x \in L^1_{loc}(\mathsf{J}, X)$ таких, что

$$\|x\|_{p,q} = \left(\sum_{k \in \mathsf{Z}} \left(\int_0^1 \|x(s+k)\|^p \, ds \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty,\ p, q \in [1, \infty).$$

Будет использоваться эквивалентная ей норма

$$\|x\|_{p,q} = \sup_{t \in [0,1]} \left(\sum_{k \in \mathsf{Z}} \left(\int_0^1 \|x(s+t+k)\|^p \, ds \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty,\ p, q \in [1, \infty).$$

5. Пространство $C_b = C_b(\mathsf{J}, X)$ ограниченных непрерывных функций, определенных на J, со значениями в X и нормой $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathsf{J}} \|x(t)\|_X$, $x \in C_b$ ($C_b(\mathsf{J}, X)$ – замкнутое подпространство из $L^\infty(\mathsf{J}, X)$). Отметим, что $(C_b(\mathsf{J}, X))_c = C_{b,u}(\mathsf{J}, X)$, $(C_b(\mathsf{J}, X))_0 = C_0(\mathsf{J}, X)$.

6. Подпространство $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathsf{J}, X) \subset C_b(\mathsf{J}, X)$ равномерно непрерывных функций из C_b. Отметим, что $(C_{b,u}(\mathsf{J}, X))_c = C_{b,u}(\mathsf{J}, X)$, $(C_{b,u}(\mathsf{J}, X))_0 = C_0(\mathsf{J}, X)$.

7. Подпространство $C_0 = C_0(\mathsf{J}, X) \subset C_{b.u}(\mathsf{J}, X)$ непрерывных исчезающих на бесконечности функций (для таких функций выполняется условие $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0,\ t \in \mathsf{J}$).

8. Подпространство $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathsf{J}, X) \subset C_{b,u}(\mathsf{J}, X)$ медленно меняющихся на бесконечности функций (для таких функций выполняется условие $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t+\tau) - x(\tau)\| = 0$, $t, \tau \in \mathsf{J}$) (см. [Струкова, 2014; Струкова, 2015; Струкова, 2016а; Baskakov, Strukova, 2016]).

9. Подпространство $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathsf{J}, X) \subset C_{b,u}(\mathsf{J}, X)$ ω -периодических на бесконечности функций, $\omega \in \mathsf{R}_+$ (для таких функций выполняется условие $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t+\omega) - x(\tau)\| = 0,\quad t \in \mathsf{J}$) (см. [Струкова, 2014; Струкова, 2015; Струкова, 2016а; Baskakov, Strukova, 2016]).

10. Подпространство $AP_\infty = AP_\infty(\mathsf{J}, X) \subset C_{b,u}$ непрерывных почти периодических на бесконечности функций (см. [Баскаков, 2013; Баскаков, 2015]).

11. Пространства $C^k = C^k(\mathsf{J}, X),\quad k \in \mathsf{N},\quad k$ раз непрерывно дифференцируемых функций с ограниченной k -ой производной и нормой $\|x\|_{(k)} = \|x\|_\infty + \|x^{(k)}\|_\infty$.

12. Пространства Гельдера $C^{k,\alpha} = C^{k,\alpha}(\mathsf{J}, X),\ k \in \mathsf{N} \cup \{0\},\ \alpha \in (0,1]$,

$$C^{k,\alpha} = \left\{ x \in C^k : \|x^{(k)}\|_{C^{0,\alpha}} = \sup_{t \neq s \in \mathsf{J}} \frac{|x^{(k)}(t) - x^{(k)}(s)|}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\},$$

$$\|x\|_{C^{k,\alpha}} = \|x\|_{C^k} + \|x^{(k)}\|_{C^{0,\alpha}}.$$

13. Подпространство $\mathsf{V} = \mathsf{V}(\mathsf{J}, X)$ функций из $L^\infty(\mathsf{J}, X)$ ограниченной вариации, т. е. функций, для которых конечна величина $\|x\|_{\mathsf{V}} = \sup\limits_{t\in\mathsf{J}} V_t^{t+1}(x) + \sup\limits_{t\in\mathsf{J}} \|x\|_X$, принимаемая за норму (см. [Струкова, 2016б]).

Непосредственно из определения 1 следует, что все перечисленные однородные пространства $\mathsf{F}(\mathsf{R}, X)$ являются банаховыми $L^1(\mathsf{R})$ -модулями, в которых действует группа S сдвигов вида (1) и модульная структура определяется сверткой функций (2). Таким образом, появляется возможность использования основных понятий и результатов из спектральной теории банаховых модулей над алгеброй $L^1(\mathsf{R})$, представленных далее. В частности, пространства $\mathsf{F}_c(\mathsf{R}, X)$ совпадают с пространствами S -непрерывных векторов (см. определение 3).

Банаховы $L^1(\mathsf{R})$ -модули и спектр Берлинга

Пусть X – комплексное банахово пространство и $End\ \mathsf{X}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Пусть $L^1(\mathsf{R})$ – банахова алгебра определенных на R измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных (классов) функций со сверткой функций в качестве умножения $(f * g)(t) = \int\limits_{\mathsf{R}} f(t-s) g(s) ds,\ t \in \mathsf{R},\ f, g \in L^1(\mathsf{R})$.

Будем считать, что X является невырожденным банаховым $L^1(\mathsf{R})$ -модулем (см. [Росс, Хьюитт, 1975; Баскаков, Криштал, 2005]), структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T:\mathsf{R}\to End\,\mathsf{X}$. Это означает, что выполняются два свойства следующего предположения:

Предположение 1. Для банахова $L^1(\mathsf{R})$ -модуля X выполняются следующие условия:

1) из равенства $fx=0$, справедливого для любой функции $f\in L^1(\mathsf{R})$, следует, что вектор $x\in\mathsf{X}$ – нулевой (свойство невырожденности банахова модуля X);

2) для всех $f\in L^1(\mathsf{R})$, $x\in\mathsf{X}$, $t\in\mathsf{R}$, имеют место равенства (свойство ассоциированности модульной структуры на X с представлением $T:\mathsf{R}\to End\,\mathsf{X}$):

$$T(t)(fx)=(T(t)f)x=f(T(t)x).$$

Если $T:\mathsf{R}\to End\,\mathsf{X}$ – сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x=fx=\int_{\mathsf{R}}f(t)T(-t)xdt,\ f\in L^1(\mathsf{R}),\ x\in\mathsf{X}, \tag{3}$$

определяет на X структуру банахова $L^1(\mathsf{R})$ -модуля, удовлетворяющего условиям предположения 1, причем эта модульная структура будет ассоциирована с представлением T.

Замечание 1. С каждым невырожденным банаховым $L^1(\mathsf{R})$ -модулем X ассоциировано единственное представление $T:\mathsf{R}\to End\,\mathsf{X}$ (см. [Баскаков, Криштал, 2005]). Чтобы это подчеркнуть, иногда будет использоваться обозначение (X,T).

Теория банаховых $L^1(\mathsf{R})$-модулей была построена в [Баскаков, 1973] и изложена в [Росс, Хьюитт, 1975; Баскаков, 1978; Баскаков, 2004; Баскаков, Криштал, 2005; Arendt et al., 2011; Баскаков, 2016; Baskakov, Krishtal, 2016].

Определение 3. Вектор из банахова $L^1(\mathsf{R})$ -модуля X назовем непрерывным (относительно представления T) или T -непрерывным, если функция $\varphi_x:\mathsf{R}\to\mathsf{X}$, $\varphi_x(t)=T(t)x,\ t\in\mathsf{R}$, непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на R).

Совокупность всех T -непрерывных векторов из банахова $L^1(\mathsf{R})$ -модуля X обозначим через X_c или $(\mathsf{X},T)_c$. Оно образует замкнутый *подмодуль* из X, т. е. X_c – замкнутое линейное подпространство из X, инвариантное относительно всех операторов $T(f)$, $T(t)$, $f\in L^1(\mathsf{R})$, $t\in\mathsf{R}$.

Любое однородное пространство $\mathsf{F}(\mathsf{R},X)$ является банаховым $L^1(\mathsf{R})$ -модулем с модульной структурой, определяемой равенствами (2), и эта структура ассоциирована с представлением (группой сдвигов функций) $S:\mathsf{R}\to End\,\mathsf{F}(\mathsf{R},X)$. Однако формула (2) не позволяет корректно задать структуру $L^1(\mathsf{R})$ -модуля на $\mathsf{F}(\mathsf{R}_+,X)$. Тем не менее такой структурой наделяется фактор-пространство $\mathsf{F}(\mathsf{J},X)/\mathsf{F}_0(\mathsf{J},X)$.

Рассмотрим фактор-пространство $\mathsf{F}(\mathsf{J},X)=\mathsf{F}(\mathsf{J},X)/\mathsf{F}_0(\mathsf{J},X)$, которое является банаховым пространством с нормой $\|\widetilde{x}\|=\inf_{y\in x+\mathsf{F}_0(\mathsf{J},X)}\|y\|$, где $\widetilde{x}=x+\mathsf{F}_0(\mathsf{J},X)$ – класс эквивалентности, содержащий функцию $x\in\mathsf{F}(\mathsf{J},X)$. Банахово пространство $\mathsf{F}(\mathsf{J},X)$ становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом: $\widetilde{x}\widetilde{y}=xy+\mathsf{F}_0(\mathsf{J},X)$, $\widetilde{x},\widetilde{y}\in\mathsf{F}(\mathsf{J},X)$.

В фактор-пространстве $\mathsf{F}(\mathsf{J},X)$ структура банахова $L^1(\mathsf{R})$ -модуля задается формулой (3), где в качестве представления U берется сильно непрерывная группа изометрических операторов $\widetilde{S}:\mathsf{R}\to End\,\mathsf{F}(\mathsf{J},X)$, описанная ниже. Для $t\ge 0$ под $\widetilde{S}(t)$ будем понимать фактор-оператор, построенный по оператору $S(t)$, т. е. $\widetilde{S}(t)\widetilde{x}=S(t)x+\mathsf{F}_0(\mathsf{J},X)$ для любой функции $x\in\mathsf{F}(\mathsf{J},X)$. Если $t<0$, то $\widetilde{S}(t)=\widetilde{S}(-t)$, если $\mathsf{J}=\mathsf{R}$. Для $\mathsf{J}=\mathsf{R}_+$ оператор $\widetilde{S}(t)$, $t<0$, определим формулой $\widetilde{S}(t)\widetilde{x}=S(t)y+\mathsf{F}_0(\mathsf{J},X)$, $\widetilde{x}\in\mathsf{F}(\mathsf{R}_+,X)$, а $\widetilde{y}$ – класс эквивалентности, построенный по функции $y\in\mathsf{F}(\mathsf{J},X)$. Здесь $y\in\mathsf{F}(\mathsf{R},X)$ – произвольное функции $x\in\mathsf{F}(\mathsf{R}_+,X)$ на R, удовлетворяющее всем пяти условиям определения 2. Отметим, что данное определение корректно, т. е. не зависит от выбора продолжения y функции x на R.

Далее через $\hat{f}:\mathsf{R}\to\mathsf{C}$ обозначается преобразование Фурье

$$\hat{f}(\lambda)=\int_{\mathsf{R}}f(t)e^{-i\lambda t}dt,\ \lambda\in\mathsf{R}, \tag{4}$$

функции $f\in L^1(\mathsf{R})$.

Определение 4. *Спектром Бёрлинга* вектора $x\in\mathsf{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из R вида

$\Lambda(x)=\{\lambda_0\in R: fx\ne 0$ для любой функции $f\in L^1(\mathsf{R})$ с $\hat{f}(\lambda_0)\ne 0\}$.

Из определения следует, что

$\Lambda(x)=R\setminus\{\lambda_0\in R:$ существует функция $f\in L^1(\mathsf{R})$ такая, что $\hat{f}(\lambda_0)\ne 0$ и $fx=0\}$.

Справедливы следующие свойства спектра Берлинга векторов из банахова пространства X (см. [Баскаков, 2004; Баскаков, Криштал, 2005]):

Лемма 1. Для любых $f\in L^1(\mathsf{R})$ и $x\in\mathsf{X}$ справедливы свойства:

1) из условия $fx=0$ для любой функции $f\in L^1(\mathsf{R})$ следует, что $x=0$ (т. е. $L^1(\mathsf{R})$-модуль X невырожден);

2) $\Lambda(x)$ – замкнутое подмножество из R, причем $\Lambda(x)=\varnothing$ тогда и только тогда, когда $x=0$;

3) $\Lambda(fx)\subset(supp\hat{f})\cap\Lambda(x)$;

4) $fx=0$, если $(supp\hat{f})\cap\Lambda(x)=\varnothing$, и $fx=x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\hat{f}=1$ в некоторой его окрестности;

5) $\Lambda(x)=\{\lambda_0\}$ – одноточечное множество тогда и только тогда, когда вектор $x\ne 0$ удовлетворяет равенствам $T(t)x=e^{i\lambda_0 t}x$, $t\in\mathsf{R}$, т. е. x – собственный вектор банахова $L^1(\mathsf{R})$ -модуля (X,T).

Определение 5. Вектор x_0 из банахова $L^1(\mathsf{R})$ -модуля (X,T) называется *почти периодическим* (относительно представления T), если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) для любого $\varepsilon>0$ множество $\Omega_{\varepsilon,x_0}=\{\omega\in\mathsf{R}:\|T(\omega)x_0-x_0\|<\varepsilon\}$ ε *-периодов* вектора x_0 относительно плотно на R (множество $\Omega\subset\mathsf{R}$ называется *относительно плотным* на R, если существует число $l>0$ такое, что любой промежуток $[t,t+l]$, $t\in\mathsf{R}$, содержит хотя бы одну точку множества Ω);

2) орбита $\{T(t)x_0, t \in \mathrm{R}\}$ вектора x_0 предкомпактна в X;

3) для любого $\varepsilon > 0$ существуют вещественные числа $\lambda_1,...,\lambda_N$ и собственные векторы $x_1,...,x_N$ представления T, соответствующие этим числам, такие, что $\left\| x_0 - \sum_{k=1}^{N} x_k \right\| < \varepsilon$ (т. е. $T(t)x_k = e^{i\lambda_k t}x_k,\ t \in \mathrm{R},\ 1 \le k \le N$);

4) функция $t \mapsto \varphi(t) = T(t)x_0,\ t \in \mathrm{R}$, – непрерывная почти периодическая функция, т. е. $\varphi \in AP(\mathrm{R}, \mathrm{X})$ (см. [Левитан, Жиков, 1978; Баскаков, 2004]).

Множество $AP(\mathrm{X}) = AP(\mathrm{X}, T)$ почти периодических векторов из X образует замкнутое подпространство в X и является замкнутым подмодулем из банахова $L^1(\mathrm{R})$-модуля X. Кроме того, имеет место включение $AP(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}_c$. Приводимые понятия и результаты содержатся в работах [Баскаков, 1973; Баскаков, 2013; Баскаков, 2015].

Почти периодические на бесконечности функции

Далее символом $\mathrm{F}(\mathrm{J}, X)$ обозначается однородное пространство функций, удовлетворяющее всем условиям (a)-(d) определения 1. В банаховом пространстве $\mathrm{F}(\mathrm{J}, X)$ рассмотрим (полу-)группу $S : \mathrm{J} \to End\mathrm{F}(\mathrm{J}, X)$ операторов, действующих по правилу

$$(S(t)x)(\tau) = x(t+\tau),\ t, \tau \in \mathrm{J}. \tag{5}$$

Сформулируем четыре определения почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства $\mathrm{F}(\mathrm{J}, X)$.

Первое определение основано на понятии ε-периода на бесконечности.

Сначала введем определения ε-периода на бесконечности и почти периодической на бесконечности функции для непрерывных функций (см. [Баскаков, 2013; Баскаков, 2015]).

Определение 6. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathrm{J}$ называется *ε-периодом на бесконечности* функции $x \in C_b(\mathrm{J}, X)$, если существует число $a(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\sup_{|t| \ge a(\varepsilon)} \| x(t+\omega) - x(t) \| < \varepsilon.$$

Множество ε-периодов на бесконечности функции x обозначим символом $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Определение 7. Множество Ω из J называется *относительно плотным* на J, если существует такое $l > 0$, что $[t, t+l] \cap \Omega \ne \varnothing$ для любого $t \in \mathrm{J}$.

Определение 8. Функция $x \in C_b(\mathrm{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$ ее ε-периодов на бесконечности относительно плотно на J.

Определение 8 (данное в статье [Баскаков, 2015]) соответствует определению Бора (см. [Bohr, 1925; Левитан, Жиков, 1978]) почти периодической функции, заданной на R. Из него следует, что каждая непрерывная почти периодическая (по Бору) функция $x \in C_b(\mathrm{R}, X)$ является почти периодической на бесконечности (в смысле определения 8).

Определение 9. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{J}$ называется ε *-периодом на бесконечности* функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$, если существует функция $x_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{J}, X)$ такая, что

$$\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon.$$

Множество ε -периодов на бесконечности функции $x \in \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ обозначим тем же символом $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Определение 10. Функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$ ее ε -периодов на бесконечности относительно плотно на $\mathbb{J}$.

Множество почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ будем обозначать символом $AP_\infty\mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$.

Определение 11. Множество функций $M \subset \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ назовем *предкомпактным на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число функций $x_1, ..., x_n$ из M таких, что для любой функции $x \in M$ найдутся функция $x_0 \in \mathcal{F}_0(\mathbb{J}, X)$ и функция x_k $(1 \le k \le n)$ такие, что

$$\|x - x_k - x_0\| < \varepsilon.$$

Определение 12. Функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если множество $M = \{S(k)x, k \in \mathbb{J}\}$ предкомпактно на бесконечности.

Для $\mathcal{F}(\mathbb{J}, X) = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ определение 12 соответствует критерию С. Бохнера (см. [Левитан, Жиков, 1978]) почти периодичности функций. Если $\mathcal{F}(\mathbb{J}, X) = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, то пространство $AP_\infty\mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ обозначается символом $AP_\infty(\mathbb{J}, X)$.

Для формулировки третьего определения почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства нам потребуется ввести понятие медленно меняющейся на бесконечности функции из однородного пространства.

Определение 13. Функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если $S(t)x - x \in \mathcal{F}_0(\mathbb{J}, X)$ для любого $t \in \mathbb{J}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций из однородного пространства $\mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ обозначим символом $\mathcal{F}_{sl,\infty} = \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$. Непосредственно из определения следует, что $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$ образует линейное замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$, инвариантное относительно (полу-)группы сдвигов S.

Например, медленно меняющейся на бесконечности является функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ вида $x(t) = c + x_0(t), t \in \mathbb{J}$, где c – вектор из банахова пространства X и x_0 – любая функция из $\mathcal{F}_0(\mathbb{J}, X)$.

Определение 14. Функция $x \in \mathcal{F}(\mathbb{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать числа $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ и медленно меняющиеся на бесконечности функции $x_1, ..., x_n \in \mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$ такие, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| < \varepsilon,$$

где функции e_k, $1 \le k \le n$, имеют вид $e_k(t) = e^{i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 15. Функция $x \in \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + \mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$ является почти периодическим вектором из пространства $\mathsf{X} = \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)/\mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$, в котором действует изометрическое представление $\widetilde{S} : \mathsf{R} \to End\,\mathsf{X}$ (т. е. $\{S(t)x, t \in \mathsf{R}\}$ – предкомпактное множество в фактор-пространстве X или, что эквивалентно, функция $t \mapsto \widetilde{S}(t)x : \mathsf{R} \to \mathsf{X}$ есть непрерывная почти периодическая функция).

Теорема 1. Все четыре определения почти периодической на бесконечности функции (определения 10, 12, 14, 15) эквивалентны. Множество $AP_\infty \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ почти периодических на бесконечности функций из однородного пространства $\mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ образует банахово пространство.

Доказательство. Рассмотрим фактор-пространство $\mathsf{X} = \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)/\mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$ и определенную выше группу изометрий $T = \widetilde{S} : \mathsf{R} \to End\mathsf{X}$. Для этого представления определение 14 соответствует свойству 3) из определения 5. Поскольку все свойства из определения 5 эквивалентны, достаточно показать, что первые три его свойства эквивалентны определениям 10, 12 и 14 соответственно.

Пусть $x \in \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ и $\widetilde{x}$ – класс эквивалентности в X, построенный по функции x. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathsf{F}_0; \varepsilon) \cup (-\Omega_\infty(x; \mathsf{F}_0; \varepsilon))$ совпадает с множеством $\Omega(\widetilde{x}, \varepsilon)$ ε -периодов класса $\widetilde{x}$. Следовательно, соответствующие определения эквивалентны.

Эквивалентность определения 12 и свойства 2) определения 5 непосредственно следует из определения фактор-модуля $\mathsf{X} = \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)/\mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$.

Докажем эквивалентность аппроксимационного определения 14 и свойства 4) из определения 5. Для доказательства достаточно установить, что спектр Берлинга $\Lambda(\widetilde{y})$ класса эквивалентности $\widetilde{y} \in \mathsf{X}$, $\widetilde{y} = y + \mathsf{F}_0$, является одноточечным множеством ($\Lambda(\widetilde{y}) = \{\lambda_0\}$) тогда и только тогда, когда функция $y \in \mathsf{F}(\mathsf{J}, X)$ представима в виде $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathsf{J}$, где $y_0 \in (\mathsf{F}_0)_{sl,\infty}$.

Если $\Lambda(\widetilde{y}) = \{\lambda_0\}$, то $\widetilde{S}(t)\widetilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\widetilde{y}$ для любого $t \in \mathsf{J}$ (см. свойство 5) из леммы 1). Следовательно, $\Lambda(\widetilde{y}_0) = \{0\}$, где $y_0(s) = y(s)e^{-i\lambda_0 s}$, $s \in \mathsf{J}$, и поэтому $\widetilde{S}(t)\widetilde{y}_0 = \widetilde{y}_0$ для любого $t \in \mathsf{J}$. Таким образом, $S(t)y_0 - y_0 \in \mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$, $t \in \mathsf{J}$, т. е. $y_0 \in (\mathsf{F}_0)_{sl,\infty}$.

И обратно: если $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathsf{J}$, где $y_0 \in \mathsf{F}_0(\mathsf{J}, X)$, то $\widetilde{S}(t)\widetilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\widetilde{y}$, $t \in \mathsf{J}$, и поэтому в силу свойства 5) из леммы 1 получим, что $\Lambda(\widetilde{y}) = \{\lambda_0\}$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00097.

The reported study was funded by the RFBR according to the research project № 18-31-00097.

Список литературы
References

1. Баскаков А.Г. 1973. Некоторые вопросы теории векторных почти периодических функций: Дис. канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 100.

Baskakov A.G. 1973. Nekotorye voprosy teorii vektornykh pochti periodicheskikh funktsiy: Dis. kand. fiz.-mat. Nauk [Some questions regarding the theory of almost periodic vector-valued funcitons: PhD thesis, 100.]. Voronezh, VSU, 100 (in Russian).

2. Баскаков А.Г. 1978. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений. Матем. заметки., 24(2) : 195–206.

Baskakov A. G. 1978. Spectral tests for the almost periodicity of the solutions of functional equations. Math. Notes, 24(1-2) : 606–612.

3. Баскаков А.Г. 2004. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов. СМФН, 9 : 3–151.

Baskakov A. G. 2006. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. J. Math. Sci. (N. Y.), 137(4) : 4885–5036.

4. Баскаков А.Г. 2009. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений. Изв. РАН. Сер. Матем., 73(2) : 3–68.

Baskakov A.G. 2009. Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations. Izv. Math., 73(2) : 215–278.

5. Баскаков А.Г. 2013. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений. УМН, 68(1) : 77–128.

Baskakov A. G. 2013. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. Russian Mathematical Surveys, 68(1) : 69–116.

6. Баскаков А.Г. 2015. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве. Матем. Заметки, 97(2) : 174–190.

Baskakov A. G. 2015. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. Math. Notes., 97(2) : 164–178.

7. Баскаков А.Г. 2016. Гармонический анализ в банаховых модулях и спектральная теория линейных операторов. Воронеж, Издательский дом ВГУ, 152.

Baskakov A.G. 2016. Garmonicheskiy analiz v banakhovykh modulyakh i spektral'naya teoriya lineynykh operatorov [Harmonic analysis in Banach modules and spectral theory of linear operators]. Voronezh, Izdatel'skiy dom VGU, 152 (in Russian).

8. Баскаков А.Г., Диденко В.Б. 2018. О состояниях обратимости разностных и дифференциальных операторов. Изв. РАН. Сер. матем., 82(1) : 3–16.

Baskakov A.G., Didenko V.B. 2018. On invertibility states of differential and difference operators. Izv. Math., 82 (1) : 1–13.

9. Баскаков А.Г., Дуплищева А.Ю. 2015. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка. Изв. РАН. Сер. матем., 79(2) : 3–20.

Baskakov A.G., Duplischeva A. Yu. 2015. Difference operators and operator-valued matrices of the second order. Izv. Math., 79(2) : 217–232.

10. Баскаков А.Г., Калужина Н.С., Поляков Д.М. 2014. Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов. Изв. вузов. Матем., 7 : 3–14.

Baskakov A.G., Kaluzhina N.S., Polyakov D.M. 2014. Slowly varying at infinity operator semigroups. Russian Math. (Iz. VUZ), 58(7) : 1–10.

11. Баскаков А.Г., Криштал И.А. 2005. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства. Изв. РАН. Серия матем., 69(3) : 3–54.

Baskakov A. G., Krishtal I. A. 2005. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. Izv. Math., 69(3) : 439–486.

12. Левитан Б.М., Жиков В.В. 1978. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М., Изд-во Московского университета, 205.

Levitan B.M., Zhikov V.V. 1983. Almost periodic functions and differential equations. Cambridge University Press, 224.

13. Росс К.А., Хьюитт Э. 1975. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах. М., Мир, 904. (Ross K.A., Hewitt E. 1970. Abstract harmonic analysis. Vol. 2. Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups. Berlin, Hedelberg, New York Springer-Verlag, 771.).

Ross K.A., Kh'yuitt E. 1975. Abstraktnyy garmonicheskiy analiz. T. 2. Struktura i analiz kompaktnykh grupp. Analiz na lokal'no kompaktnykh abelevykh gruppakh. [Abstract harmonic analysis. Vol. 2. Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups.] M., Mir, 904. (Ross K.A., Hewitt E. 1970. Abstract harmonic analysis. Vol. 2. Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups. Berlin, Hedelberg, New York, Springer-Verlag, 771.).

14. Струкова И.И. 2014. О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 14(1) : 28–38.

Strukova I. I. 2014. About harmonic analysis of periodic at infinity functions. Izv. Sarat. univ. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika, 14(1) : 28–38. (in Russian)

15. Струкова И.И. 2015. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы. Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика, 3 : 161–165.

Strukova I. I. 2015. Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. Vestnik VSU. Ser. Physica. Matematika, 3 : 161–165. (in Russian)

16. Струкова И.И. 2016. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций. Сиб. матем. журн., 57(1) : 186–198.

Strukova I. I. 2016. On Wiener's theorem for functions periodic at infinity. Siberian Math. J., 57(1) : 145–154.

17. Струкова И.И. 2016. Периодические на бесконечности функции ограниченной вариации. Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика, 44(20)(241) : 50–59.

Strukova I. I. 2016. Periodic at infinity functions of bounded variation. Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics, 44(20)(241) : 50–59. (in Russian)

18. Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F.. 2011. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Vol.96. Basel, Birkhauser, Monographs in Mathematics, 412.

19. Baskakov A.G., Krishtal I.A. 2016. Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces. Mediterranean Journal of Mathematics. 13(5) : 2443–2462.

20. Baskakov A., Strukova I. 2016. Harmonic analysis of functions periodic at infinity. Eurasian Math. J., 7(4) : 9–29.

21. Bohr H. 1925. Almost periodic functions Acta math. 45 : 29–127.