

УДК 531.01,539.37,539.38

DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-4-498-506

**РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ ДЛЯ КОМБИНИРОВАННОГО РЕЗИНОМЕТАЛЛИЧЕСКОГО
ПАКЕТА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ****SOLUTION OF THE SPATIAL EDGE OF THE NONLINEAR ELASTICITY THEORY
FOR A COMBINED RESINOMETALLIC CYLINDRICAL SHAPE****С.К. Ефремов, Е.В. Михайленко
S.K. Efremov, E.V. Mikhaylenko**Краснодарский университет Министерства внутренних дел Российской Федерации,
Россия, 350005, г. Краснодар, ул. Ярославская, 128«Krasnodar University of the Ministry of the Interior of the Russian Federation
128 Yaroslavl St, Krasnodar, 350005, Russia

E-mail: efremovsk@yandex.ru, evmikhaylenko@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача нелинейной теории упругости для комбинированного резинометаллического пакета цилиндрической формы с учетом малой объемной сжимаемости резины, а также геометрической и физической нелинейности структуры. При решении задачи методом конечных элементов использованы вариационные уравнения принципа возможных перемещений. Конечный элемент определен в виде прямой треугольной призмы с билинейной аппроксимацией перемещений. Уравнения состояния построены на основе потенциалов Пенга-Ланделла и Дымникова-Эрдманиса с использованием закона сжимаемости Мурнагана. Для построения приближенного решения системы использован метод последовательных нагружений. Построены нагрузочные диаграммы. Рассмотрен пример расчета для цилиндра, состоящего из десяти резиновых дисков и девяти стальных прослоек. Представлены графики вертикальной и горизонтальной реакции исследуемого пакета на заданные смещения. Проведен анализ зависимости механических характеристик резины от степени изменения объема.

Abstract

The article deals with the problem of the nonlinear theory of elasticity for a cylindrical rubber combined rubber package, taking into account the low volume compressibility of rubber, as well as the geometric and physical nonlinearity of the structure. When solving the problem by the finite element method, the variational equations of the principle of possible displacements are used. The finite element is defined as a straight triangular prism with a bilinear approximation of displacements. The equations of state are constructed on the basis of the Peng-Landell and Dymnikov-Erdmanis potentials using the Murnaghan compressibility law. To construct an approximate solution of the system, the method of successive loads is used. Built load charts. The example of calculation for a cylinder consisting of ten rubber disks and nine steel layers is considered. The graphs of the vertical and horizontal reaction of the investigated package at a given offset are presented. The dependence of the mechanical characteristics of rubber on the degree of volume change was analyzed.

Ключевые слова: деформируемое тело, метод конечных элементов, тензор деформаций, закон сжимаемости Мурнагана, потенциал Пенга-Ланделла, эффект Пойнтинга.

Keywords: deformable body, finite element method, strain tensor, Murnaghan compressibility law, Peng-Landell potential, Pointing effect.

Введение

Методы исследования геометрически нелинейных задач в существенной мере зависят от математической природы заложенных в них определяющих уравнений. Существуют общие теории определяющих уравнений с затухающей памятью. В теории функционального типа состояние механической системы однозначно определяется функциональными зависимостями параметров системы от истории движения и температуры. Определяющие уравнения, построенные на базе этой теории, обладают максимальной общностью и подвергаются дальнейшей конкретизации путем наложения ограничений, обусловленных требованиями физической допустимости к определяющим функционалам и условиями, диктуемыми проработкой экспериментальных данных [2, 15].

В частном случае термоупругих материалов напряжения в любой точке среды считаются зависящими только от мгновенных значений деформаций окрестности точки и температуры. Функция свободной энергии является потенциалом для энергетического тензора Коши. В случае изотермического деформирования получаем гиперупругие материалы. Именно этому случаю посвящены многочисленные работы различных авторов. В этих работах [1, 3, 6–8, 11–14, 18] используются известные потенциалы для гиперупругих изотропных механически несжимаемых материалов. Каждый из предложенных потенциалов не являлся универсальным в смысле полного описания имеющегося набора экспериментальных данных. Однако моделирование механического поведения эластомеров с помощью упругих потенциалов является общепризнанным, хотя единого мнения о форме их записи и границах применимости не выработано [19].

Основой настоящего исследования являются определяющие уравнения нелинейной теории термоупругости структурно-неоднородных эластомеров, полученные в работе [9] и распространенные на случай механически сжимаемых эластомеров в работе [10]. Будучи физически обоснованными, они содержат параметры, имеющие определенный физический смысл, и наделены явными зависимостями механических параметров от температуры [20].

Остановимся на решении задачи нелинейной теории упругости для комбинированного резинометаллического пакета цилиндрической формы с учетом малой объемной сжимаемости резины, а также геометрической и физической нелинейности структуры.

1. Постановка задачи

Пусть деформируемое тело представляет собой цилиндр, составленный из чередующихся тонких дисков резины и металла.

Обозначим: $V_0 \in R^3$ - область, занимаемую деформируемым телом в исходном состоянии; $\Sigma_0^{(b)}$ – результат объединения границ стыковки стальных (материал «А») и резиновых (материал «Б») элементов; $\Sigma_0 = \Sigma_0^\sigma \cup \Sigma_0^\mu$ - внешняя поверхность тела, где известны перемещения или усилия.

Постановка задачи в переменных Лагранжа $\vec{X} \in V_0$, будет иметь следующий вид. Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial t_{(k)}^{im}}{\partial X^i} + F_{(k)}^m = 0, \quad k = 1, 2; \quad (1)$$

Определяющие уравнения, получаемые на основании соответствующих потенциалов $\Psi_{(1)}$ и $\Psi_{(2)}$:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{(k)} &= \tilde{S}_{(k)}(\tilde{g}), \\ \vec{X} &\in V_0^{(k)}, \\ S_{(k)}^{ij} &= I_3^{-0,5} \left(\frac{\partial \Psi_{(k)}}{\partial g_{ij}} + \frac{\partial \Psi_{(k)}}{\partial g_{ji}} \right);\end{aligned}\quad (2)$$

Связь между компонентами тензора деформаций Грина [17] и градиентами перемещений:

$$g_{ij} = x_{,i}^m x_{,j}^m; \quad (3)$$

Условия непрерывности по напряжениям и перемещениям на элементах внутренней поверхности $\Sigma_0^{(b)}$:

$$\vec{P}_{(1)}(\vec{X}) = \vec{P}_{(2)}(\vec{X}), \quad (4)$$

$$\vec{u}_{(1)}(\vec{X}) = \vec{u}_{(2)}(\vec{X}); \quad (5)$$

Граничные условия в перемещениях:

$$\vec{u}(\vec{X}) = \vec{u}_0(\vec{X}), \quad \vec{X} \in \Sigma_0^u; \quad (6)$$

Граничные условия в усилиях:

$$t^{ij} \nu_{0i} = \bar{k}(\vec{X}) P^j(\vec{x}), \quad \vec{X} \in \Sigma_0^\sigma. \quad (7)$$

В представленных формулах (1)–(7) введены следующие обозначения:

t^{ij} – компоненты тензора условных напряжений;

S^{ij} – компоненты тензора напряжений Коши;

F^i – компоненты вектора объемной силы;

I_α – инварианты тензора \tilde{g} ;

\vec{x} – координаты Эйлера;

$\vec{u}(\vec{X})$ – вектор перемещений;

$\vec{u}_0(\vec{X})$ – заданная функция перемещений;

$\vec{P}(\vec{X})$ – известная функция усилий;

$\bar{k}(\vec{X})$ – кратность изменения элементарной площадки;

ν_{0i} – компоненты единичной нормали к площадке в недеформированном состоянии.

2. Описание метода

При решении задачи методом конечных элементов можно использовать вариационные уравнения принципа возможных перемещений [16]:

$$\int_{V_0^{(k)}} t_{(k)}^{ij}(\vec{u}) \delta u_{j,i} dV_0^{(k)} - \int_{\Sigma_0^{\sigma(k)}} \bar{k}(\vec{u}) P^j \delta u_j d\Sigma_0^{\sigma(k)} = 0. \quad (8)$$

В уравнениях (8) интегрирование ведется по деформированному объему и поверхности тела; $\delta \vec{u} = \vec{v} - \vec{u}$, где \vec{u} – решение задачи, \vec{v} – кинематически возможное поле перемещений, мало отличающееся от поля \vec{u} .

Решим поставленную задачу с использованием двух типов физических соотношений, построенных, соответственно, на основании потенциалов Пенга-Ланделла [5] (материал «А»)

$$\Psi_{(2)} = 0,5G_0 J^{-2/3} I_1 + 0,5K_0 (J-1)^2 \tag{9}$$

и Дымникова-Эрдманиса [2] (материал «Б»)

$$\Psi_{(2)} = \frac{G_0}{2\alpha} G(J) \left\{ \left[1 + \frac{\alpha}{\beta} (J^{-2/3} I_1 - 3) \right]^\beta - 1 \right\} + K(J). \tag{10}$$

В формулах (9), (10) переменная $J = \sqrt{I_3}$ указывает на кратность изменения объема материала, G_0 и K_0 – модули сдвига и объемного сжатия резины при малых деформациях, а $G(J)$ и $K(J)$ определяются по формулам:

$$G(J) = 1 + \frac{\mu_0}{\mu} \left[J - 1 + \frac{1}{\mu - 1} (J^{1-\mu} - 1) \right], \tag{11}$$

$$K(J) = \frac{K_0}{k} \left[J - 1 + \frac{1}{k - 1} (J^{1-k} - 1) \right], \tag{12}$$

где α, β, k, μ – константы.

Формулы (11), (12) получены с использованием закона сжимаемости Мурнагана [4]. Можно привести потенциалы (9) и (10) к полиномиальному виду, используя разложения:

$$\left[1 + \frac{\alpha}{\beta} (J^{-2/3} I_1 - 3) \right]^\beta \approx 1 + \alpha (J^{-2/3} I_1 - 3), \tag{13}$$

$$J^{-2/3} \approx 1 - \frac{2}{3} (J - 1), \tag{14}$$

$$G(J) \approx 1 + 0,5\mu_0 (J - 1)^2, \tag{15}$$

$$K(J) \approx 0,5K_0 (J - 1)^2 - K_0 (k + 1) (J - 1)^3 / 6. \tag{16}$$

Перепишем формулы (9), (10) с учетом выражений (13)–(16)

$$\Psi_{(2)} = 0,5G_0 \left[1 - \frac{2}{3} (J - 1) \right] I_1 + 0,5K_0 (J - 1)^2, \tag{17}$$

$$\Psi_{(2)} = 0,5G_0 \left[1 + 0,5\mu_0 (J - 1)^2 \right] \left\{ \left[1 - \frac{2}{3} (J - 1) \right] I_1 - 3 \right\} + 0,5K_0 (J - 1)^2 - K_0 (k + 1) (J - 1)^3 / 6. \tag{18}$$

Очевидно, что потенциал (17) является частным случаем потенциала (18), где учтена зависимость механических характеристик от кратности изменения объема.

Найдем выражения для напряжений

$$S_{(2)}^{ij} = J^{-1} \left\{ G_0 \left[1 - \frac{2}{3} (J - 1) \right] \delta^{ij} + \left[K_0 (J - 1) - \frac{1}{3} G_0 I_1 \right] J g^{ij} \right\}, \tag{19}$$

$$S_{(2)}^{ij} = G_0 J^{-1} \left[1 + 0,5\mu_0 (J - 1)^2 \right] \left[1 - \frac{2}{3} (J - 1) \right] \delta^{ij} + g^{ij} \left\{ 0,5\mu_0 G_0 (J - 1) \times \left[\left[1 - \frac{2}{3} (J - 1) \right] I_1 - 3 \right] - \frac{G_0}{3} \left[1 + 0,5\mu_0 (J - 1)^2 \right] I_1 + K_0 (J - 1) - K_0 (k + 1) (J - 1)^2 / 2 \right\}. \tag{20}$$

В уравнениях (19) и (20) функция типа гидростатического давления не выделяется.

Если предположить, что в составе физического тела сталь работает как линейно упругий материал, то

$$\Psi_{(1)} = \frac{1}{4} G (g_{ij} - \delta_{ij})(g_{ij} - \delta_{ij}) + \frac{1}{8} \lambda (I_1 - 3)^2 \quad (21)$$

$$S_{(1)}^{ij} = G (g_{ij} - \delta_{ij}) + \frac{1}{2} \lambda (I_1 - 3) \delta_{ij}, \quad (22)$$

где G и λ – константы Ламе.

Компоненты тензора \tilde{t} выражаются через компоненты тензора \tilde{S} :

$$t^{ij} = J A_i^j S^{il}, \quad (23)$$

где $A_j^i = \partial x^i / \partial X^j$ – компоненты аффинора преобразования $\vec{X} \rightarrow \vec{x}$.

При использовании конечный элемент в виде прямой треугольной призмы с билинейной аппроксимацией перемещений аппроксимирующие функции будут иметь вид:

$$u_i(\vec{X}) = [L_I u_i^I + L_J u_i^J + L_K u_i^K] f_1(X^3) + [L_L u_i^L + L_M u_i^M + L_N u_i^N] f_2(X^3), \quad (24)$$

где I, J, K – номера вершин нижнего, L, M, N – верхнего основания призмы; $L_p(X^1, X^2)$ – функции формы треугольного элемента; $f_1(X^3) = 1 - X^3/h$; $f_2(X^3) = X^3/h$, h – высота призмы.

Подставляя аппроксимации (24) в уравнения (8) с учетом формул для напряжений (19) или (20) и выполняя интегрирование по объему и поверхности, приходим к системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\vec{h}(\vec{U}, p) = 0, \quad (25)$$

где \vec{h} – нелинейный вектор-оператор, \vec{U} – глобальный вектор неизвестных, p – параметр, задающий процесс изменения внешних воздействий. Для построения приближенного решения системы (25) можно использовать метод последовательных нагружений

$$H(\vec{U}_r, p_r)(\vec{U}_{r+1} - \vec{U}_r) = -\vec{h}_p(\vec{U}_r, p_r)(p_{r+1} - p_r), \quad (26)$$

где $H = \partial \vec{h} / \partial \vec{U}$ – матрица Якоби, $\vec{h}_p = \partial \vec{h} / \partial p$ – вектор.

3. Пример расчета

Рассмотрим цилиндр, состоящий из десяти резиновых дисков толщиной 20 мм и девяти стальных прослоек толщиной 5 мм; диаметр цилиндра 600 мм, полная высота – 245 мм. Нижнее основание неподвижно, на верхнем заданы вертикальные $\Delta(p)$ и горизонтальные $s(p)$ смещения. Боковая поверхность свободна от нагрузки. С учетом симметрии можно рассматривать полуцилиндр.

Параметры сетки: число элементов – 7448, узлов – 4485, неизвестных – 13455. В расчетах принимаем $\Delta_{\max} = 6$ мм, $s_{\max} = 0,3$ м. Для вычисления матрицы Якоби используем численное интегрирование по 28 внутренним точкам (схемы Хаммера и Гаусса). Материалы: резина марки ИРП-1347, для которой $G_0 = 0,97$ МПа; $K_0 = 2334$ МПа; $k = 10,4$; $\mu_0 = 1400$ и сталь С235 - $G = 76923$ МПа, $\lambda = 115385$ МПа.

На рисунках 1 и 2 представлены графики $N(n)$ и $S(n)$ вертикальной и горизонтальной реакции пакета на заданные смещения. Первые 20 шагов отвечают вертикальной осадке верхнего основания, последующие 20 – горизонтальному смещению. Верхние кривые на обоих рисунках соответствуют материалу «Б». Сдвиг сопровождается снижением вертикальной реакции пакета, в большей степени это проявляется при

использовании соотношений вида (19). Учет зависимости механических характеристик резины от степени изменения объема приводит к повышению жесткости конструкции на сжатие и сдвиг. Для материала типа «Б» кривая $N(n)$ на ниспадающем участке «выполаживается», что связано с проявлением эффекта Пойнтинга. Жесткость на сдвиг при этом увеличивается незначительно.

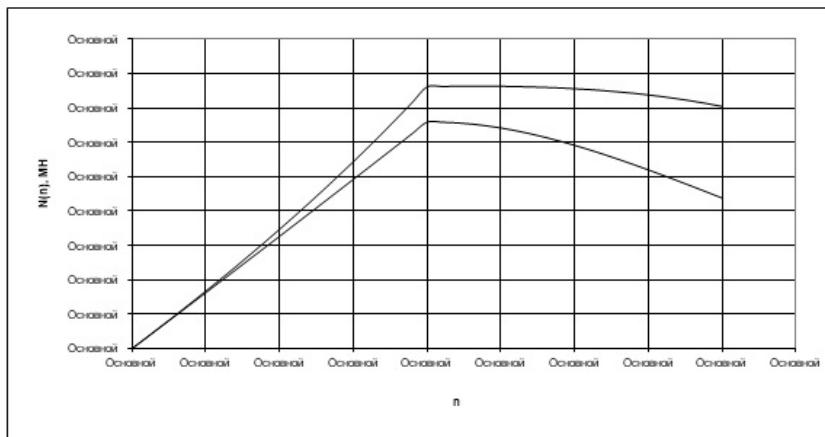


Рис. 1. Зависимость вертикальной реакции N от номера шага нагружения
 Fig. 1. Dependence of vertical reaction N on the number of loading step

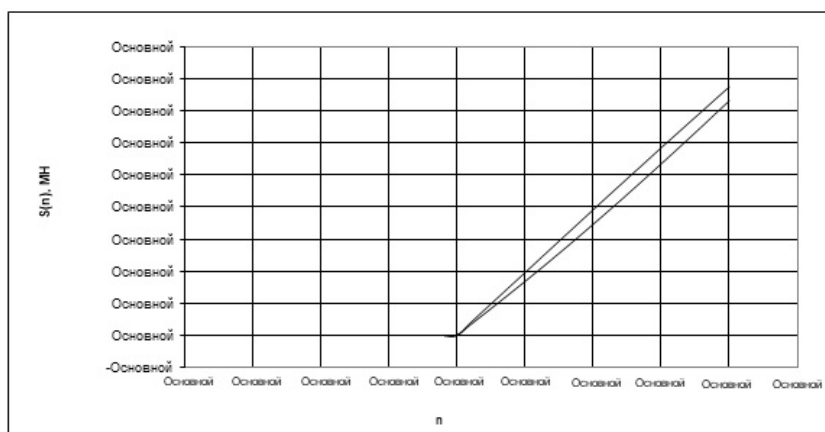


Рис. 2. Зависимость горизонтальной реакции S от номера шага нагружения
 Fig. 2. The dependence of the horizontal reaction on the number of loading step

Заключение

В работе рассмотрена задача нелинейной теории упругости для комбинированного резинOMETаллического пакета цилиндрической формы с учетом малой объемной сжимаемости резины, а также геометрической и физической нелинейности структуры. При решении задачи методом конечных элементов использованы вариационные уравнения принципа возможных перемещений. Уравнения состояния построены на основе потенциалов Пенга-Ланделла и Дымникова-Эрдманиса с использованием закона сжимаемости Мурнагана. Для построения приближенного решения системы использован метод последовательных нагружений. Рассмотрен пример расчета для цилиндра, состоящего из десяти резиновых дисков и девяти стальных прослоек. Представлены графики вертикальной и горизонтальной реакции исследуемого пакета на заданные смещения. Проведен анализ зависимости механических характеристик резины от степени изменения объема.

Приведенные в работе результаты могут быть использованы для расчета широкого класса резинотехнических изделий, работающих в условиях контакта с металлической или другого рода арматурой. При этом структура реализации ключевых методов решения рассматриваемой задачи позволяет осуществить переход к задачам с усложненным вариантом определяющих уравнений и граничных условий.

Список литературы References

1. Буренин А.А., Ковтаныук Л.В., Панченко Г.Л. 2018. Деформирование и разогрев упроговязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счет изменяющегося перепада давления. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1: 6–18.

Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L. 2018. Deformation and warming up of an elastic-viscoplastic cylindrical layer during its movement due to varying pressure drop. Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics. 1: 6–18.

2. Дунаев И.М., Фролов Н.Н. 1999. Нелинейная теория термовязкоупругости структурно неоднородных слабосжимаемых эластомеров. Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 1: 57–64.

Dunaev I.M., Frolov N.N. 1999. Nonlinear theory of thermoviscoelasticity of structurally inhomogeneous weakly compressible elastomers. Proceedings of higher educational institutions. North Caucasus region. Series: Natural Sciences 1: 57–64.

3. Зингерман К.М., Шавырин Д.А. 2015. О влиянии физической нелинейности на напряженное состояние вблизи вязкоупругого включения в вязкоупругом теле при конечных деформациях. Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 4: 5–16.

Zingerman K.M., Shavyrin D.A. 2015. On the effect of physical nonlinearity on the strained state near a viscoelastic inclusion in a viscoelastic body with finite deformations. Bulletin of Tver State University. Series: Applied Mathematics. 4: 5–16.

4. Козлов В.В., Маркин А.А. 2014. Анализ определяющих соотношений изотропных нелинейно упругих сжимаемых материалов. Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 1–1: 133–143.

Kozlov V.V., Markin A.A. 2014. Analysis of the defining relations of isotropic nonlinear elastic compressible materials. News of Tula State University. Natural Sciences. 1–1: 133–143.

5. Комков К.Ф. 2013. О тензорной нелинейности пластических материалов. Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. № 4: 265–286.

Komkov K.F. 2013. On the tensor nonlinearity of plastic materials. Science and education: a scientific publication MSTU. N.E. Bauman. 4: 265–286.

6. Кузьменко Р.В., Старостенко И.Н. 2012. Построение определяющих соотношений термовязкоупругости для принятия решений при проведении экспертных исследований. Вестник Воронежского института ФСИН России. 1: 79–82.

Kuz'menko R.V., Starostenko I.N. 2012. The construction of the defining relations of thermoviscoelasticity for decision-making during the conduct of expert studies. Bulletin of the Voronezh Institute of the Federal Penitentiary Service of Russia. 1: 79–82.

7. Михайленко Е.В. 2006. Численное решение расчета резинометаллического сейсмоизолятора с использованием различных законов упругости. В кн.: Математические методы и информационно-технические средства: Труды II всероссийской научно-практической конференции (Краснодар, 23 июня, 2006). Краснодар, Краснодарский университет МВД России: 65–67.

Mikhaylenko E.V. 2006. Numerical solution for calculating a rubber-metal seismic insulator using various laws of elasticity. In: Matematicheskie metody i informacionno-tekhicheskie sredstva: Trudy vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii. [Mathematical methods and information technology tools: Proceedings of the All-Russian scientific-practical conference] (Krasnodar, June 23, 2006). Krasnodar, Krasnodar University of the Ministry of the Interior of Russia: 65–67.

8. Михайленко Е.В. 2007. Технология решения пространственных краевых задач нелинейной теории упругости. В кн.: Математические методы и информационно-технические средства: Труды III всероссийской научно-практической конференции (Краснодар, 22 июня, 2007). Краснодар, Краснодарский университет МВД России: 71–74.

Mikhaylenko E.V. 2007. Technology for solving spatial boundary value problems of the nonlinear theory of elasticity. In: Matematicheskie metody i informacionno-tekhicheskie sredstva: Trudy

vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii. [Mathematical methods and information technology tools: Proceedings of the All-Russian scientific-practical conference] (Krasnodar, June 22, 2007). Krasnodar, Krasnodar University of the Ministry of the Interior of Russia: 71–74.

9. Михайленко Е.В. 2013. Численное решение задачи нахождения механических параметров ортотропной слоистой среды по известным значениям показателей металлической и резиновой фаз. В кн.: Математические методы и информационно-технические средства: Труды IX всероссийской научно-практической конференции (Краснодар, 21 июня, 2013). Краснодар, Краснодарский университет МВД России: 196–198.

Mikhaylenko E.V. 2013. Numerical solution of the problem of finding the mechanical parameters of an orthotropic layered medium by the known values of the indicators of the metal and rubber phases. In: Matematicheskie metody i informacionno-tekhnicheskie sredstva: Trudy vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii. [Mathematical methods and information technology tools: Proceedings of the All-Russian scientific-practical conference] (Krasnodar, June 21, 2013). Krasnodar, Krasnodar University of the Ministry of the Interior of Russia: 196–198.

10. Михайленко Е.В. 2014. Методология решения пространственных краевых задач нелинейной теории упругости. В кн.: Математические методы и информационно-технические средства: Труды X всероссийской научно-практической конференции (Краснодар, 20–21 июня, 2014). Краснодар, Краснодарский университет МВД России: 199–202.

Mikhaylenko E.V. 2014. Methodology for solving spatial boundary value problems of the nonlinear theory of elasticity. In: Matematicheskie metody i informacionno-tekhnicheskie sredstva: Trudy vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii. [Mathematical methods and information technology tools: Proceedings of the All-Russian scientific-practical conference] (Krasnodar, June 20–21, 2014). Krasnodar, Krasnodar University of the Ministry of the Interior of Russia: 199–202.

11. Михайленко Е.В. Старостенко И.Н. 2005. Кручение куба из высокоэластичного слабосжимаемого материала. В кн.: Математические методы и информационно-технические средства: Труды всероссийской научно-практической конференции (Краснодар, 24 июня, 2005). Краснодар, Краснодарская академия МВД России: 28–31.

Mikhaylenko E.V. Starostenko I.N. 2005. Torsion of a cube of highly elastic, weakly compressible material. In: Matematicheskie metody i informacionno-tekhnicheskie sredstva: Trudy vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii. [Mathematical methods and information technology tools: Proceedings of the All-Russian scientific-practical conference] (Krasnodar, June 24, 2005). Krasnodar, Krasnodar Academy of the Ministry of the Interior of Russia: 28–31.

12. Михайленко Е.В. Старостенко И.Н. 2006. Построение модели ортотропного материала с матрицей упругих констант ромбического типа. В кн.: Математические методы и информационно-технические средства: Труды II всероссийской научно-практической конференции (Краснодар, 23 июня, 2006). Краснодар, Краснодарский университет МВД России: 75–77.

Mikhaylenko E.V. Starostenko I.N. 2006. Building a model of an orthotropic material with a matrix of rhombic elastic constants In: Matematicheskie metody i informacionno-tekhnicheskie sredstva: Trudy vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii. [Mathematical methods and information technology tools: Proceedings of the All-Russian scientific-practical conference] (Krasnodar, June 23, 2006). Krasnodar, Krasnodar University of the Ministry of the Interior of Russia: 75–77.

13. Михайленко Е.В., Старостенко И.Н. 2007. Построение определяющих уравнений нелинейной теории термоупругости эластомеров. В кн.: Математические методы и информационно-технические средства: Труды III всероссийской научно-практической конференции (Краснодар, 22 июня, 2007). Краснодар, Краснодарский университет МВД России: 75–78.

Mikhaylenko E.V., Starostenko I.N. 2007. Construction of the governing equations of the nonlinear theory of elastomer thermoelasticity. In: Matematicheskie metody i informacionno-tekhnicheskie sredstva: Trudy vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii. [Mathematical methods and information technology tools: Proceedings of the All-Russian scientific-practical conference] (Krasnodar, June 22, 2007). Krasnodar, Krasnodar University of the Ministry of the Interior of Russia: 75–78.

14. Михайленко Е.В., Старостенко И.Н. 2008. Расчет напряженно-деформированного состояния многослойного резинометаллического цилиндра в режиме заданных перемещений. В кн.: Математические методы и информационно-технические средства: Труды IV всероссийской научно-практической конференции (Краснодар, 20 июня, 2008). Краснодар, Краснодарский университет МВД России: 154–158.

Mikhaylenko E.V., Starostenko I.N. 2008. The calculation of the stress-strain state of a multilayer rubber-metal cylinder in the mode of specified displacements. In: Matematicheskie metody i

informacionno-tehnicheskie sredstva: Trudy vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii. [Mathematical methods and information technology tools: Proceedings of the All-Russian scientific-practical conference] (Krasnodar, June 20, 2008). Krasnodar, Krasnodar University of the Ministry of the Interior of Russia: 154–158.

15. Михайленко Е.В., Фролов Н.Н. 2009. Решение однородной задачи для ортотропной резинометаллической полосы с поперечным вариантом армирования. В кн.: Математические методы и информационно-технические средства: Труды V всероссийской научно-практической конференции (Краснодар, 19 июня, 2009). Краснодар, Краснодарский университет МВД России: 210–212.

Mikhaylenko E.V., Frolov N.N. 2009. Solving a homogeneous problem for an orthotropic rubber-metal strip with a transverse reinforcement option. In: Matematicheskie metody i informacionno-tehnicheskie sredstva: Trudy vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii. [Mathematical methods and information technology tools: Proceedings of the All-Russian scientific-practical conference] (Krasnodar, June 19, 2009). Krasnodar, Krasnodar University of the Ministry of the Interior of Russia: 210–212.

16. Овчинникова Н.В. 2017. О тензорных мерах напряжений и деформаций, используемых в ANSYS для решения упругопластических задач при конечных деформациях. Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 5: 31–36.

Ovchinnikova N.V. 2017. On tensor measures of stresses and strains used in ANSYS for solving elastoplastic problems with finite deformations. Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. 5: 31–36.

17. Раенко М.И., Чайнов Н.Д. 2018. Применение конечно-элементной модели нелинейной сплошной среды для анализа напряженно-деформированного состояния элементов конструкций. Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 5 (698): 31–36.

Raenko M.I., Chaynov N.D. 2018. The use of a finite element model of a nonlinear continuous medium for the analysis of the stress-strain state of structural elements. Proceedings of higher educational institutions. Engineering. 5 (698): 31–36.

18. Соколова М.Ю., Чиков В.С. 2017. Описание конечных деформаций сплошных цилиндров при кручении. Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2–1: 109–118.

Sokolova M.Yu., Chikov V.S. 2017. Description of final deformations of solid cylinders in torsion. News of Tula State University. Natural Sciences. 2–1: 109–118.

19. Старостенко И.Н., Фролов Н.Н. 2009. Особенности конечноэлементной реализации нелинейных краевых задач для тел из слабосжимаемых высокоэластичных материалов. Обзорные прикладной и промышленной математики. 1 (16): 182–184.

Starostenko I.N., Frolov N.N. 2009. Features of the finite element realization of nonlinear boundary value problems for bodies from weakly compressible highly elastic materials. Review of applied and industrial mathematics. 1 (16): 182–184.

20. Старостенко И.Н., Фролов Н.Н. 2011. Расчет температуры в предварительно деформированном резиновом цилиндре при гармоническом догружении. В кн.: Математические методы и информационно-технические средства: Труды VII всероссийской научно-практической конференции (Краснодар, 24 июня, 2011). Краснодар, Краснодарский университет МВД России: 128–132.

Starostenko I.N., Frolov N.N. 2011. Calculation of temperature in a pre-deformed rubber cylinder during harmonic loading. In: Matematicheskie metody i informacionno-tehnicheskie sredstva: Trudy vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii. [Mathematical methods and information technology tools: Proceedings of the All-Russian scientific-practical conference] (Krasnodar, June 24, 2011). Krasnodar, Krasnodar University of the Ministry of the Interior of Russia: 128–132.