Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 3. С. 248–257.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 3. P. 248–257.

УДК 517.955
MSC 35E15
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-248-257

Многочлены Лагерра в описании профилей прямой и обратной волн для волнового уравнения на отрезке при условии Робена или при условии присоединённой массы

[1] **Найдюк Ф. О.**, [1] **Прядиев В. Л.**, [2] **Ситник С. М.**
[1] Воронежский государственный университет,
Россия, 394006, Воронеж, Университетская пл., 1
xakepph@yandex.ru, pryad@mail.ru
[2] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85
mathsms@yandex.ru

Аннотация. В работе выводится формула, описывающая через начальные данные и прочие параметры профили прямой и обратной волн у решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на отрезке при следующих краевых условиях: на левом конце – условие первого или второго рода, а на правом – условие третьего рода (Робена) или так называемое условие присоединённой массы. Эта формула содержит конечное число арифметических операций, элементарных функций, квадратур и таких преобразований независимого аргумента у начальных данных, как умножение на число и взятие целой части числа.

Ключевые слова: одномерное волновое уравнение, начально-краевая задача, краевые условия первого, второго и третьего родов, условие нагруженной массы, профили прямой и обратной волн, многочлены Лагерра

Для цитирования: Найдюк Ф. О., Прядиев В. Л., Ситник С. М. 2023. Многочлены Лагерра в описании профилей прямой и обратной волн для волнового уравнения на отрезке при условии Робена или при условии присоединённой массы. *Прикладная математика & Физика*, 55(3): 248–257. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-248-257

Original Research

Laguerre Polynomials in Describing the Profiles of Forward and Backward Waves for the Wave Equation on a Segment Under the Robin Condition or Under the Joined Mass Condition

[1] **Filipp O. Naydyuk**, [1] **Vladimir L. Pryadiev**, [2] **Sergey M. Sitnik**
[1] Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006, Russia
xakepph@yandex.ru, pryad@mail.ru
[2] Belgorod National Research University,
85, Pobeda st., Belgorod, 308015, Russia mathsms@yandex.ru

Abstract. A formula that describes the profiles of forward and backward waves for the solution of the initial-boundary value problem for the wave equation on a segment is obtained. The following combinations of boundary conditions are considered: 1) the first kind condition in the left end point and the third kind condition in the right end point, 2) the second kind condition in the left end point and the third kind condition in the right end point, 3) the first kind condition in the left end point and so-called joined mass condition in the right end point, 4) the second kind condition in the left end point and joined mass condition in the right end point. This formula contains a finite number of arithmetic operations, elementary functions, quadratures, and such transformations of the independent argument of the initial data as multiplication by a number and taking the integer part of the number.

Keywords: One-Dimensional Wave Equation, Initial-Boundary Value Problem, Boundary Conditions of the First, Second and Third Kinds, Joined Mass Condition, Forward and Backward Wave Profiles, Laguerre Polynomials

For citation: Naydyuk F. O., Pryadiev V. L., Sitnik S. M. 2023. Laguerre Polynomials in Describing the Profiles of Forward and Backward Waves for the Wave Equation on a Segment Under the Robin Condition or Under the Joined Mass Condition. *Applied Mathematics & Physics*, 55(3): 248–257. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-3-248-257

---

1. Введение. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для однородного одномерного волнового уравнения (одно краевое условие – первого рода, а другое – третьего):

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \ \ (0 < x < l,\ t > 0) \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) + k\,u(l,t) = 0 \ \ (t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0 \ \ (0 \le x \le l) \end{cases}, \tag{1}$$

в которой l и k – фиксированные положительные числа, $\varphi \in C^2[0;l]$, причём $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(l) + k\,\varphi(l) = 0$; решение $u(x,t)$ ищется в классе вещественнозначных дважды непрерывно дифференцируемых на $(0;l) \times (0;+\infty)$ функций, у которых все производные второго порядка доопределяемы по непрерывности на $[0;l] \times [0;+\infty)$. Кроме того, будем предполагать, что $\varphi''(0) = 0$ – иначе решение задачи (1) из указанного класса функций не существует (см., например, в [9] Лекцию IV, § 2, стр. 54, или [14]).

Выписывая решение (1) в форме Даламбера, придём к представлению:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)\right), \tag{2}$$

в котором $\tilde{\varphi}$ есть дважды непрерывно дифференцируемое продолжение φ с $[0;l]$ на множество всех вещественных чисел $\mathbf{R}$, подчинённое условиям: $\tilde{\varphi}(-x) = -\tilde{\varphi}(x)$ и $(\tilde{\varphi}' + k\,\tilde{\varphi})(l+x) = -(\tilde{\varphi}' + k\,\tilde{\varphi})(l-x)$ $(x \in \mathbf{R})$ – конечно, если такое продолжение $\tilde{\varphi}$ существует; последнее соотношение можно заменить (с учётом первого) на $(\tilde{\varphi}' + k\,\tilde{\varphi})(x) = -(\tilde{\varphi}' - k\,\tilde{\varphi})(x-2l)$ $(x \in \mathbf{R})$. Другими словами, $\tilde{\varphi}$ в (2) – это нечётная дважды непрерывно дифференцируемая функция, сужение которой на $[-l;+\infty)$ является решением начальной задачи

$$\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\varphi}'(x-2l) + k\,\tilde{\varphi}(x) - k\,\tilde{\varphi}(x-2l) = 0 \quad (x \geq l), \tag{3}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} -\varphi(-x), \text{ если } -l \leq x \leq 0 \\ \varphi(x), \text{ если } 0 \leq x \leq l \end{cases}. \tag{4}$$

Наша ближайшая цель – получить формулу, выражающую $\tilde{\varphi}$ через φ с использованием лишь конечного числа арифметических операций, элементарных функций, квадратур и таких операций над независимым аргументом у φ, как умножение на число и взятие целой части. Такого рода формула полезна при численном решении задачи (1), при исследовании соответствующей задачи управляемости (см., например, [12]–[13]) и при анализе зависимости решения задачи от входящих в неё параметров.

Для достижения этой цели можно пытаться использовать различные методы решения задачи (3)–(4). Использование преобразования Лапласа даёт представление $\tilde{\varphi}$ в виде контурного интеграла, а вычисление последнего посредством суммирования вычетов приводит к представлению $\tilde{\varphi}$ в виде ряда (см., например, в [1] теорему 5.5). Теорема смещения была бы эффективна, если бы начальное условие в (4) имело специальный вид (по этому поводу см. там же, комментарий в конце § 4.7), но в нашем случае это не так. Наконец, представление $\tilde{\varphi}$ в виде действительного определённого интеграла (см., например, [1], теорему 5.4) содержит фундаментальное решение, которое если и можно предъявить конструктивно, то только через метод последовательного интегрирования (метод шагов). Именно по этим причинам для достижения указанной цели мы останавливаемся на методе шагов, несмотря на его некоторую трудоёмкость.

Чтобы дальнейшие выкладки были менее громоздкими, далее в (3)–(4) рассмотрим случай $l = 1$, к которому приводит замена $\hat{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(ly)$ с последующим переобозначением lk снова через k.

2. Решение задачи (3)–(4) последовательным интегрированием. Итак, пусть $l = 1$. Прежде всего отметим, что решение задачи (3)–(4) существует, единственно и принадлежит $C^2[-1;+\infty)$ – для установления этого достаточно применить теорему 5.1 из [1] и учесть, что $\varphi \in C^2[0;1]$ и $\varphi(0) = 0$, $\varphi''(0) = 0$ и $\varphi'(1) + k\,\varphi(1) = 0$.

Пусть $n \in \mathbf{N}$, где $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел. Если мы умножим уравнение (3) на e^{kx} и проинтегрируем от $2n-1$ до $x \in [2n-1;2n+1)$, то для функции $\psi(x) = e^{kx}\tilde{\varphi}(x)$ получим соотношение:

$$\psi(x) = \psi(2n-1) + \int\limits_{2n-1}^{x} \left[k\tilde{\varphi}(s-2)e^{ks} - \tilde{\varphi}'(s-2)e^{ks}\right] ds.$$

Интегрируя здесь последнее слагаемое по частям, получаем (через A обозначено e^{2k}):

$$\psi(x) = \psi(2n-1) - A\,\psi(x-2) + A\,\psi(2n-3) + 2kA\int\limits_{2n-1}^{x} \psi(s-2)\,ds \tag{5}$$

– для $x \in [2n-1;2n+1)$, $n \in \mathbf{N}$.

Включение $x \in [2n-1;2n+1)$ равносильно равенству $n = [(x+1)/2]$ (здесь квадратные скобки означают взятие целой части числа), поэтому далее мы будем считать, что в равенстве (5) $x \geq 1$, а $n = n(x) \stackrel{\text{def}}{=} [(x+1)/2]$.

Лемма 1. *Существуют последовательность конечных наборов многочленов* $\left\{\{R_i^n(x)\}_{i=0}^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $(\deg R_i^n = i)$ *и последовательность многочленов* $\{Q^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(\deg Q^n = n-1)$, *такие, что*

$$\psi(x) = (-A)^n\,\psi(x-2n) + (2kA)^n \sum_{i=0}^{n-1} R_i^n(x) \int\limits_{2n-1}^{x} t^{n-i-1}\psi(t-2n)\,dt + Q^n(x), \tag{6}$$

где $n = n(x)$ есть целая часть числа $(x+1)/2$.

Доказательство проведём индукцией по n.

Справедливость (6) при $n(x) = 1$ следует из справедливости (5) при $n(x) = 1$, если положить $R_0^1(x) \equiv 1$, $Q^1(x) \equiv 0$.

Допустим теперь, что представление (6) справедливо при $n(x) = m$ (т. е. при $x \in [2m-1; 2m+1)$), где $m \in \mathbf{N}$. Тогда соотношение (5) при $x \in [2m+1; 2m+3)$ примет вид (подставляем вместо $\psi(s-2)$ её представление в виде (6), интегрируем по частям, выполняем подходящую замену переменной интегрирования и перегруппировываем слагаемые):

$$\psi(x) = (2kA)^{m+1}\left[-\frac{1}{2k}\sum_{i=0}^{m-1} R_i^m(x-2)\int\limits_{2m+1}^{x}(t-2)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1))dt+\right.$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1}\int R_i^m(x-2)\,dx\int\limits_{2m+1}^{x}(t-2)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1))\,dt-$$

$$\left.-\sum_{i=0}^{m-1}\int\limits_{2m+1}^{x}\int R_i^m(t-2)\,dt(t-2)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1))\,dt+\left(-\frac{1}{2k}\right)^m\int\limits_{2m+1}^{x}\psi(t-2(m+1))\,dt\right]+$$

$$+(2kA)^m\sum_{i=0}^{m-1}R_i^m(2m+1)\int\limits_{2m-1}^{2m+1}t^{m-i-1}\psi(t-2m)\,dt+Q^m(2m+1)-$$

$$-A\,Q^m(x-2)+A\,Q^m(2m-1)+2kA\int\limits_{2m+1}^{x}Q^m(s-2)\,ds,$$

где $\int R_i^m(\tau-2)\,d\tau$ – некоторая первообразная многочлена $R_i^m(\tau-2)$, которую далее мы будем считать обнуляющейся в точке $\tau = 2$. Отсюда следует справедливость (6) при $x \in [2m+1; 2m+3)$ – достаточно многочлены $R_i^{m+1}(x)$ определить соотношением

$$\sum_{i=0}^{m}R_i^{m+1}(x)\int\limits_{2m+1}^{x}t^{m-i}\psi(t-2(m+1))\,dt = \left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{i=0}^{m}R_i^m(x-2)\int\limits_{2m+1}^{x}(t-2)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1))\,dt+$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1}\int R_i^m(x-2)\,dx\int\limits_{2m+1}^{x}(t-2)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1))\,dt-$$

$$-\sum_{i=0}^{m-1}\int\limits_{2m+1}^{x}\left(\int R_i^m(t-2)\,dt\cdot(t-2)^{m-i-1}\psi(t-2(m+1))\right)dt+$$

$$+\left(-\frac{1}{2k}\right)^m\int\limits_{2m+1}^{x}\psi(t-2(m+1))\,dt \tag{7}$$

и положить

$$Q^{m+1}(x) = (2kA)^m\sum_{i=0}^{m-1}R_i^m(2m+1)\int\limits_{2m-1}^{2m+1}t^{m-i-1}\psi(t-2m)\,dt+$$

$$+Q^m(2m+1)-A\,Q^m(x-2)+A\,Q^m(2m-1)+(2kA)\int\limits_{2m+1}^{x}Q^m(s-2)\,ds. \tag{8}$$

То, что (7) позволяет определить многочлены $R_i^{m+1}(x)$ через многочлены $R_i^m(x)$ (однозначность такого определения мы не обсуждаем), можно усмотреть, преобразовав правую часть (7): раскрыв по формуле бинома Ньютона степени $(t-2)$ и сгруппировав затем получившиеся слагаемые по множителям

$$\int\limits_{2m+1}^{x}t^{m-i}\psi(t-2(m+1))\,dt.$$

Лемма доказана.

Замечание. В дальнейшем мы будем, для определённости, полагать, что многочлен $R_i^{m+1}(x)$ определяется из (7) через многочлены $R_i^m(x)$ именно способом, указанным в конце доказательства леммы 1.

Лемма 2. *Коэффициенты $b_r^{m,\,i}$ многочленов*

$$R_i^m(x) = b_i^{m,\,i} x^i + b_{i-1}^{m,\,i} x^{i-1} + \ldots + b_1^{m,\,i} x + b_0^{m,\,i}$$

вычисляются по формулам:

$$b_{i-q}^{m,\,i} = \frac{(-1)^{m-i-1} C_m^q}{(m-i-1)!(i-q)!} \left(-\frac{1}{2k}\right)^q \quad \left(q = \overline{0, m-1},\ i = \overline{q, m-1}\right), \tag{9}$$

где C_m^q – биномиальный коэффициент.

Доказательство. Выведем рекуррентные соотношения, связывающие коэффициенты $b_p^{m+1,\,j}$ с коэффициентами $b_r^{m,\,i}$. Выражение в правой части (7) после раскрытия степеней бинома $t-2$ (в том числе, и в многочлене $\int R_i^m(t-2)\,dt$) и приведения подобных по $\int\limits_{2m+1}^{x} t^p \psi(t-2(m+1))\,dt$ примет вид:

$$\left(-\frac{1}{2k}\right) \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1-p} (-2)^{m-p-i-1}\, C_{m-i-1}^p R_i^m(x-2) \int\limits_{2m+1}^{x} t^p \psi(t-2(m+1))\,dt +$$

$$+ \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1-p} (-2)^{m-p-i-1}\, C_{m-i-1}^p \int R_i^m(x-2)\,dx \int\limits_{2m+1}^{x} t^p \psi(t-2(m+1))\,dt -$$

$$- \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-p-1} \sum_{j=0}^{i} (-2)^{m-i+j-p}\, C_{m-i+j}^p \frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} \int\limits_{2m+1}^{x} t^p \psi(t-2(m+1))\,dt -$$

$$- \sum_{p=1}^{m} \sum_{i=m-p}^{m-1} \sum_{j=p-(m-i)}^{i} (-2)^{m-i+j-p}\, C_{m-i+j}^p \frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} \int\limits_{2m+1}^{x} t^p \psi(t-2(m+1))\,dt +$$

$$+ \left(-\frac{1}{2k}\right)^m \int\limits_{2m+1}^{x} \psi(t-2(m+1))\,dt\,.$$

Теперь уже видно, что (7) будет выполнено, если, во-первых,

$$R_0^{m+1}(x) = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{b_i^{m,\,i}}{i+1}\,,$$

а во-вторых, при $p = \overline{1, m-1}$

$$R_{m-p}^{m+1}(x) = \left(-\frac{1}{2k}\right) \sum_{i=0}^{(m-1)-p} (-2)^{m-i-1-p}\, C_{m-i-1}^p R_i^m(x-2) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{(m-1)-p} \left((-2)^{m-i-1-p}\, C_{m-i-1}^p \int R_i^m(x-2)\,dx\right) - \sum_{i=0}^{(m-1)-p} \sum_{j=0}^{i} (-2)^{m-i+j-p}\, C_{m-i+j}^p \frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} -$$

$$- \sum_{i=m-p}^{m-1} \sum_{j=p-(m-i)}^{i} (-2)^{m-i+j-p}\, C_{m-i+j}^p \frac{b_j^{m,\,i}}{j+1}\,, \tag{10}$$

и, в-третьих,

$$R_m^{m+1}(x) = \left(-\frac{1}{2k}\right) \sum_{i=0}^{m-1} (-2)^{m-i-1} R_i^m(x-2) + \sum_{i=0}^{m-1} (-2)^{m-i-1} \int R_i^m(x-2)\,dx -$$

$$- \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{i} (-2)^{m-i+j} \frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} + \left(-\frac{1}{2k}\right)^m. \tag{11}$$

Раскрывая в этих соотношениях степени бинома $x-2$ в $R_i^m(x-2)$ и группируя по степеням x, получим следующие рекуррентные соотношения, связывающие коэффициенты многочленов $R_j^{m+1}(x)$ и $R_i^m(x)$:

$$b_0^{m+1,\,0} = -\sum_{i=0}^{m-1}\frac{b_i^{m,\,i}}{i+1},$$

$$b_0^{m+1,\,m-p} = \left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{i=0}^{m-p-1}\sum_{j=0}^{i}(-2)^{m-i+j-p-1}C_{m-i-1}^{p}b_j^{m,\,i} + \sum_{i=0}^{m-p-1}\sum_{j=0}^{i}(-2)^{m-p-i+j}C_{m-i-1}^{p}\frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} -$$

$$-\sum_{i=0}^{m-p-1}\sum_{j=0}^{i}(-2)^{m-i+j-p}C_{m-i+j}^{p}\frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} - \sum_{i=m-p}^{m-1}\sum_{j=p-(m-i)}^{i}(-2)^{m-i+j-p}C_{m-i+j}^{p}\frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} \quad (p=\overline{1,m-1}),$$

$$b_q^{m+1,\,m-p} = \left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{i=q}^{m-p-1}\sum_{j=q}^{i}(-2)^{m-i+j-p-1}\,C_j^q\,C_{m-i-1}^p\,b_j^{m,\,i} +$$

$$+\sum_{i=q-1}^{m-p-1}\sum_{j=q-1}^{i}(-2)^{m-p-i+j-q}\,C_{j+1}^q\,C_{m-i-1}^p\,\frac{b_j^{m,\,i}}{j+1}, \quad (p=\overline{1,m-1},\ q=\overline{1,m-p-1}),$$

$$b_{m-p}^{m+1,\,m-p} = \frac{b_{m-p-1}^{m,\,m-p-1}}{m-p} \quad (p=\overline{1,m-1}),$$

$$b_0^{m+1,\,m} = \left(-\frac{1}{2k}\right)^m + \left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{p=1}^{m-1}(-2)^p\sum_{j=0}^{p}b_j^{m,\,m-1-p+j} + \left(-\frac{1}{2k}\right)b_0^{m,\,m-1},$$

$$b_q^{m+1,\,m} = \left(-\frac{1}{2k}\right)\sum_{i=q}^{m-1}\sum_{j=q}^{i}(-2)^{m-1-q-i+j}\,C_j^q\,b_j^{m,\,i} + \sum_{i=q-1}^{m-1}\sum_{j=q-1}^{i}(-2)^{m-q-i+j}\,C_{j+1}^q\,\frac{b_j^{m,\,i}}{j+1} \quad (q=\overline{1,m-1}),$$

$$b_m^{m+1,\,m} = \frac{b_{m-1}^{m,\,m-1}}{m}.$$

Непосредственно проверяется, что подстановка (9) в полученные рекуррентные соотношения обращает их в верные равенства.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Многочлен $Q^n(x)$ представим в виде:*

$$Q^n(x) = \sum_{j=1}^{n-1}(2kA)^j\sum_{i=0}^{j-1}R_i^j(x)\int_{2j-1}^{2j+1}t^{j-i-1}\,\psi(t-2j)\,dt. \tag{12}$$

Доказательство проведём индукцией по n. Справедливость (12) при $n=1$ очевидна, при $n=2$ – следует из (8) (при $m=1$), если учесть, что $Q^1(x)\equiv 0$ и $R_0^1(x)\equiv 1$.

Пусть теперь представление (12) верно при $n=m$. Подставим представление многочлена $Q^m(x)$ в виде (12) в правую часть (8) и сгруппируем подобные слагаемые правой части в получившемся представлении $Q^{m+1}(x)$: сначала по степеням j множителей $(2kA)^j$, $j=\overline{1,m}$, а затем в каждой из m сумм при множителях $(2kA)^j$ – по множителям вида

$$\int_{2j-1}^{2j+1}t^{j-i-1}\,\psi(t-2j)\,dt,\ i=\overline{0,j-1}.$$

В итоге получим:

$$Q^{m+1}(x) = \sum_{j=1}^{m}(2kA)^j\sum_{i=0}^{j-1}\left[R_i^j(2m+1) + \sum_{p=0}^{i-1}(-2)^{i-p-1}\,C_{j-p-2}^{i-p-1}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\int_{2m+1}^{x}R_p^{j-1}(s-2)\,ds - \frac{1}{2k}R_p^{j-1}(x-2) + \frac{1}{2k}R_p^{j-1}(2m-1)\right\}\right]\int_{2j-1}^{2j+1}t^{j-i-1}\psi(t-2j)\,dt.$$

И остаётся показать, что

$$R_i^j(x) = R_i^j(2m+1) +$$

$$+\sum_{p=0}^{i-1}(-2)^{i-p-1}\, C_{j-p-2}^{i-p-1}\left\{\int\limits_{2m+1}^{x} R_p^{j-1}(s-2)\, ds-\frac{1}{2k}R_p^{j-1}(x-2)+\frac{1}{2k}R_p^{j-1}(2m-1)\right\}. \tag{13}$$

Справедливость (13) при $i=0$ следует из того, что $R_0^j(x)\equiv R_0^j(2m+1)$ – так как $\deg R_0^j=0$. Если же $i=\overline{1,j-2}$, то в силу (10) (если положить там $m=j-1$ и $m-p=i$) выполнено равенство

$$R_i^j(x)-R_i^j(2m+1)=$$

$$=\sum_{q=0}^{i-1}\left[(-2)^{i-q-1}\, C_{j-q-2}^{j-1-i}\left\{\left(-\frac{1}{2k}\right)\cdot\left(R_q^{j-1}(x-2)-R_q^{j-1}(2m-1)\right)+\int\limits_{2m+1}^{x} R_q^{j-1}(s-2)\, ds\right\}\right],$$

что совпадает с (13), поскольку $C_{j-q-2}^{j-1-i}=C_{j-q-2}^{i-q-1}$. Наконец, в силу (11)

$$R_{j-1}^j(x)-R_{j-1}^j(2m+1)=$$

$$=\sum_{q=0}^{j-2}(-2)^{j-q-2}\left[\left(-\frac{1}{2k}\right)\cdot\left(R_q^{j-1}(x-2)-R_q^{j-1}(2m-1)\right)+\int\limits_{2m+1}^{x} R_q^{j-1}(s-2)\, ds\right],$$

что совпадает с (13) при $i=j-1$.

Лемма доказана.

Замечание. Из леммы 2 получаем, что

$$R_i^j(x)=\frac{(-1)^{j-1}}{(j-i-1)!(2k)^i}L_i^{j-i}(2kx),$$

где

$$L_n^{\alpha}(y)=\sum_{q=0}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)(-y)^q}{\Gamma(\alpha+q+1)q!(n-q)!}$$

есть обобщённый многочлен Лагерра, или Лагерра – Сонина, см. [2], [4], [7], [11].

Следует отметить, что эти многочлены L_n^{α} были первоначально введены Э. Лагерром при $\alpha=0$, а в общем случае они были введены Н. Я. Сониным, см. [11], [10].

Собирая теперь воедино результаты лемм 1–3 и возвращаясь к случаю произвольного l (см. последний абзац пункта 1), приходим к следующему заключению.

Теорема 1. *Функция $\tilde\varphi$ из представления (2) решения задачи (1) есть дважды непрерывно дифференцируемая нечётная функция, которая на отрезке $[0;l]$ совпадает с φ, а на любом отрезке вида $[(2n-1)l;(2n+1)l]$ $(n\in\mathbf{N})$ представима в виде конечной суммы:*

$$\tilde\varphi(x)=(-1)^n\,\varphi_1(x-2nl)+(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(2k)^i}{(i-1)!}L_i^{n-i}(2kx)\int\limits_{(2n-1)l}^{x} t^{i-1}\,e^{k(t-x)}\varphi_1(t-2nl)\,dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{j}\frac{(2k)^i}{(i-1)!}L_i^{j-i}(2kx)\int\limits_{(2j-1)l}^{(2j+1)l} t^{i-1}\,e^{k(t-x)}\varphi_1(t-2jl)\,dt, \tag{14}$$

где φ_1 есть нечётное продолжение φ на $[-l;l]$.

3. Суммирование по синусам с частотами, равными собственным частотам колебаний в задаче (1). Интересное следствие получается из результатов предыдущего пункта, если, вернувшись к задаче (3)–(4), решить её с помощью преобразования Лапласа. А именно, применяя теорему 5.5 из [1], получим, что решение задачи (3)–(4) представимо в виде ряда:

$$\tilde\varphi(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{Res}\left[\frac{e^{xz}p(z)}{h(z)};i\,y_m\right]\quad(x>-l), \tag{15}$$

где

$$p(z)=-2\varphi(l)\operatorname{ch}(lz)+\int\limits_{-l}^{l}\left(\tilde\varphi'(x)+k\,\tilde\varphi(x)\right)e^{-zx}\,dx,\qquad h(z)=z+ze^{-2lz}+k-ke^{-2lz}$$

(здесь i – мнимая единица), а y_m – корни уравнения $y=-k\cdot\operatorname{tg}(l\,y)$, занумерованные в произвольном порядке; при этом ряд (15) сходится равномерно на любом отрезке $[a;b]\subset(-l;+\infty)$. Выражая p только через φ (т. е. посредством интегрирования по частям избавляясь от присутствия φ' в выражении для p) и вычисляя вычеты в (15), придём (беря во внимание также нечётность $\tilde{\varphi}$) к представлению функции $\tilde{\varphi}$ в виде ряда, сужение которого на $[0; l]$ есть ряд Фурье функции φ по собственным функциям спектральной задачи, порождаемой задачей (1):

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(\omega_m x) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

где

$$b_m = \frac{2(k^2+\omega_m^2)}{k + l(k^2+\omega_m^2)} \cdot \int\limits_0^l \varphi(s)\sin(\omega_m s)\,ds \quad (m = \overline{1,\infty}),$$

а $\{\omega_m\}_{m=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность, составленная из всех положительных корней уравнения $\omega = -k \cdot \mathrm{tg}(l\omega)$.

Таким образом, с учётом теоремы 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in C^2[0,l]$ и $f(0) = 0$ и $f''(0) = 0$. Пусть k – положительное число, удовлетворяющее равенству $f'(l) + kf(l) = 0$, а $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность чисел, определяемая равенством*

$$b_m = \frac{2(k^2+\omega_m^2)}{k + l(k^2+\omega_m^2)} \cdot \int\limits_0^l f(s)\sin(\omega_m s)\,ds \quad (m = \overline{1,\infty}),$$

в котором $\{\omega_m\}_{m=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность всех положительных корней уравнения $\omega = -k \cdot \mathrm{tg}(l\omega)$. Тогда ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m \sin(\omega_m x)$ сходится равномерно на любом отрезке вещественной прямой, причём его сумма $s(x)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая нечётная функция, совпадающая на $[0; l]$ с $f(x)$, а при $x > l$ определяемая равенством:

$$s(x) = (-1)^n f_1(x-2nl) + (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(2k)^i}{(i-1)!}L_i^{n-i}(2kx)\int\limits_{(2n-1)l}^{x} t^{i-1}e^{k(t-x)}f_1(t-2nl)\,dt +$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{j}\frac{(2k)^i}{(i-1)!}L_i^{j-i}(2kx)\int\limits_{(2j-1)l}^{(2j+1)l} t^{i-1}e^{k(t-x)}f_1(t-2jl)\,dt,$$

где $n = n(x)$ есть целая часть числа $(x+l)/(2l)$, а f_1 – нечётное продолжение f на $[-l; l]$.

4. Случай краевого условия 3-го рода на правом конце отрезка и краевого условия 2-го рода – на левом конце.

Теорема $1'$. *Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1'), получающейся из задачи (1) заменой условия $u(0,t) = 0$ на условие $u_x(0,t) = 0$ и соответствующей заменой требований $\varphi(0) = 0$ и $\varphi''(0) = 0$ (на функцию φ) на одно требование: $\varphi'(0) = 0$. Тогда $u(x,t) = \frac{1}{2}(\hat{\varphi}(x+t) + \hat{\varphi}(x-t))$, где $\hat{\varphi}(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая чётная функция, совпадающая на $[0; l]$ с $\varphi(x)$ и на любом отрезке вида $[(2n-1)l; (2n+1)l]$ $(n \in \mathbf{N})$ представимая в виде конечной суммы:*

$$\hat{\varphi}(x) = (-1)^n \varphi_2(x-2nl) - \sum_{i=1}^{n}\frac{(2k)^i}{(i-1)!}L_i^{n-i}(2kx)\int\limits_{(2n-1)l}^{x} t^{i-1}e^{k(t-x)}\varphi_2(t-2nl)\,dt -$$

$$-\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{j}\frac{(2k)^i}{(i-1)!}L_i^{j-i}(2kx)\int\limits_{(2j-1)l}^{(2j+1)l} t^{i-1}e^{k(t-x)}\varphi_2(t-2jl)\,dt, \qquad (14')$$

где φ_2 есть чётное продолжение φ на $[-l; l]$.

Доказательство этой теоремы практически не отличается от доказательства теоремы 1, по причине чего и не приводится здесь. Отметим лишь, что $\hat{\varphi}(x)$ является решением уравнения

$$\hat{\varphi}'(x) - \hat{\varphi}'(x-2l) + k\hat{\varphi}(x) + k\hat{\varphi}(x-2l) = 0. \qquad (3')$$

Заодно отметим, что представление (14') влечёт утверждение, аналогичное теореме 2.

5. Случай условия присоединённой массы на правом конце отрезка и краевого условия 1-го или 2-го рода – на левом конце. Рассмотрим задачи:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \ \ (0 < x < l,\ t > 0) \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) + m\, u_{tt}(l,t) = 0 \ \ (t > 0) \\ u(x,0) = \alpha(x),\ u_t(x,0) = 0 \ \ (0 \le x \le l) \end{cases} \tag{16}$$

и

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \ \ (0 < x < l,\ t > 0) \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) + m\, u_{tt}(l,t) = 0 \ \ (t > 0) \\ u(x,0) = \beta(x),\ u_t(x,0) = 0 \ \ (0 \le x \le l) \end{cases}, \tag{16$'$}$$

в которых l и m – фиксированные положительные числа, $\alpha, \beta \in C^2[0;l]$; решение каждой из этих задач ищется в том же классе функций, что и решение задачи (1). Относительно $\alpha(x)$ дополнительно предполагается, что $\alpha(0) = 0$ и $\alpha''(0) = 0$, а также, что $\alpha'(l) + m\,\alpha''(l) = 0$, а относительно $\beta(x)$ – что $\beta'(0) = 0$ и $\beta'(l) + m\,\beta''(l) = 0$; эти условия необходимы и достаточны для существования решений задач (16) и (16’) из указанного класса.

Выписывая решения задач (16) и (16’) в форме Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\gamma(x+t) + \gamma(x-t)\right), \tag{17}$$

придём к тому, что в случае задачи (16) γ есть дважды непрерывно дифференцируемое нечётное продолжение α с $[0;l]$ на $\mathbf{R}$, подчинённое уравнению

$$\gamma''(x) - \gamma''(x-2l) + \frac{1}{m}\gamma'(x) + \frac{1}{m}\gamma'(x-2l) = 0 \quad (x \ge l), \tag{18}$$

а в случае задачи (16$'$) γ есть дважды непрерывно дифференцируемое чётное продолжение β с $[0;l]$ на $\mathbf{R}$, подчинённое уравнению

$$\gamma''(x) + \gamma''(x-2l) + \frac{1}{m}\gamma'(x) - \frac{1}{m}\gamma'(x-2l) = 0 \quad (x \ge l). \tag{18$'$}$$

Сравнив уравнения (18) и (18’) с уравнениями, соответственно, (3’) и (3), придём к следующим двум теоремам.

Теорема 3. *Пусть $\hat{A}_k$ есть оператор, который всякой функции $\varphi \in C^2[0;l]$ ставит в соответствие определённую на $\mathbf{R}$ чётную функцию $\hat{\varphi}$, совпадающую на $[0;l]$ с φ и определяемую при $x \ge l$ равенством (14’). Тогда решение задачи* (16) *представимо в виде (17), где* $\gamma(x) = \int\limits_0^x (\hat{A}_{1/m}\alpha')(s)\,ds$.

Теорема $3'$. *Пусть $\tilde{A}_k$ есть оператор, который всякой функции $\varphi \in C^2[0;l]$ ставит в соответствие определённую на $\mathbf{R}$ нечётную функцию $\tilde{\varphi}$, совпадающую на $[0;l]$ с φ и определяемую при $x \ge l$ равенством* (14). *Тогда решение задачи* (16$'$) *представимо в виде* (17), *где*

$$\gamma(x) = \beta(0) + \int\limits_0^x (\tilde{A}_{1/m}\beta')(s)\,ds.$$

6. Некоторые замечания и комментарии. 1) Выше мы ограничились рассмотрением положительных параметров k и m (исходя из механической интерпретации задач (1), (1’), (16) и (16’)). Однако нетрудно убедиться, что все приведённые нами доказательства теорем 1, $1'$, 3 и $3'$ справедливы и для произвольных вещественных k и m, отличных от 0. Более того, эти доказательства не теряют силу и в случае комплекснозначных решений задач (1), (1’), (16) и (16’) и, соответственно, произвольных ненулевых комплексных параметров k и m.

2) Мы ограничивались пока рассмотрением только нулевой начальной скорости. Если же, например, в задаче (1) условие $u_t(x,0) = 0$ заменить на $u_t(x,0) = \Phi(x)$, где $\Phi \in C^1[0;l]$, причём $\Phi(0) = 0$ и $\Phi'(l) + k\Phi(l) = 0$ (последние два условия необходимы и достаточны для существования решения из рассматриваемого нами класса), то решение представимо в виде

$$u(x,t) = \big(C(t)\varphi\big)(x) + \int\limits_0^t \big(C(\tau)\Phi\big)(x)\,d\tau,$$

где операторная функция $C(t)$ определяется равенством

$$\big(C(t)\psi\big)(x) = \frac{1}{2}\left[\big(\tilde{A}_k\psi\big)(x+t) + \big(\tilde{A}_k\psi\big)(x-t)\right].$$

Для остальных задач ((1′), (16) и (16′)) ситуация аналогична.

3) Мы ограничивались пока рассмотрением только однородного волнового уравнения. Но, как известно, принцип Дюамеля (см., например, [14], [15]) позволяет выразить решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными данными через параметрическое семейство решений однородного уравнения в виде интеграла по параметру.

4) Апостериори ясно, что доказательства теорем 1, 1', 3 и 3' можно строить, основываясь на известных функциональных соотношениях для многочленов Лагерра (впрочем, необходимое соотношение здесь одно: $\left(L_n^{\alpha}(x)\right)' = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x)$), и такое доказательство менее громоздко. Однако такие доказательства–проверки проигрывают с методической точки зрения приведённым нами доказательствам–выводам.

5) Представляет интерес обобщение полученных в данной работе результатов на случай B-гиперболических уравнений, в которых вторые производные по времени (или даже одновременно по временной и пространственным переменным) заменяются на дифференциальный оператор Бесселя

$$B_{\nu}f(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{df}{dx}.$$

Об уравнениях с операторами Бесселя см., например, [3], [8].

6) Насколько известно авторам, итоговые формулы (14) и (14') в терминах многочленов Лагерра впервые были получены в работах авторов [5]–[6]. При этом в работе [5] формулы были получены через многочлены Лагерра, выраженные в виде сумм в неявном виде, без явного указания на эти многочлены, а в работе [6] выражения через многочлены Лагерра приведены в явном виде. Впоследствии, аналогичные формулы через многочлены Лагерра в подобных задачах использовались и другими авторами, но в более поздних работах.

Список литературы

1. Беллман Р., Кук К. Л. 1967. Дифференциально-разностные уравнения. М., Мир, 548.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1966. Высшие трансцендентные функции. М., Наука, 300.
3. Кприянов И. А. 1997. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., Наука, 198.
4. Лебедев Н. Н. 1963. Специальные функции и их приложения. М.-Л., Физматгиз, 359.
5. Найдюк Ф. О., Прядиев В. Л. 2004. Формула продолжения начальных данных в решении Даламбера для волнового уравнения на отрезке с краевым условием третьего рода. Вестник Воронежского государственного университета. Серия «Физика. Математика», 1: 115–122.
6. Найдюк Ф. О., Прядиев В. Л., Ситник С. М. 2005. Описание профилей прямой и обратной волн для волнового уравнения на отрезке с краевыми условиями первого или второго рода – на одном конце и третьего рода или присоединённой массы – на другом. Чернозёмный альманах научных исследований. Серия «Фундаментальная математика», 1(1): 53–68.
7. Сегё Г. 1962. Ортогональные многочлены. М., Физматлит, 480.
8. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. 2019. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М., Физматлит, 224.
9. Соболев С. Л. 1950. Уравнения математической физики. М.-Л., ГИТТЛ, 444.
10. Сонин Н. Я. 1954. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М., Гостехиздат, 244.
11. Суетин П. К. 1979. Классические ортогональные многочлены. – 2-е изд., доп. М., Наука, 416.
12. Тихомиров В. В. 2002. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. I. Дифференциальные уравнения, 38(3): 393–403.
13. Тихомиров В. В. 2002. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. II. Дифференциальные уравнения, 38(4): 529–537.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1977. Уравнения математической физики. М., Наука, 742.
15. Эванс Л. К. 2003. Уравнения с частными производными. Новосибирск, 576.

References

1. Bellman R. 1967. Differential-difference equations. M., Mir, 548. (in Russian)
2. Bateman H., Erdélyi A. 1966. Higher transcendental functions. M., Nauka, 300. (in Russian)
3. Kipriyanov I. A. 1997. Singular Elliptic Boundary Value Problems. M., Nauka, 198. (in Russian)
4. Lebedev N. N. 1963. Special functions and applications. M.-L., Fizmatgis, 359. (in Russian)
5. Naidyuk F. O., Pryadiev V. L. 2004. Continuation formula of initial data in the Delamber solution to wave equation on the segment with boundary conditions of the third kind. Vestnik of the Voronezh State University. Series "Physics. Mathematics 1: 115–122. (in Russian)

6. Naidyuk F. O. 2005. Description of the profiles of forward and reverse waves for a wave equation on a segment with boundary conditions of the first or second kind - at one end and the third kind or attached mass - at the other. Chernozem Almanac of scientific research. Series "Fundamental Mathematics". 1(1): 53–68. (in Russian)
7. Szego G. 1962. Orthogonal polynomials. M., Fizmatlit, 480. (in Russian)
8. Sitnik S. M., Shishkina E.L. 2019. Transmutation operators method for differential equations with Bessel operator. Moscow. Fizmathlit, M., Fizmatlit, 224. (in Russian)
9. Sobolev S. L. 1950. Equations of mathematical physics. M.-L., GITTL, 444. (in Russian)
10. Sonin N. Ya. 1954. Research on cylindrical functions and special polynomials. M., Gostekhizdat, 244. (in Russian)
11. Suetin P. K. 1979. Classical orogonal polynomials. 2nd ed., add. M., Nauka, 416. (in Russian)
12. Tikhomirov V. V. 2002. Wave equation with boundary control at elastic fixation. I. Differential equations. 38(3)3: 393–403. (in Russian)
13. Tikhomirov V. V. 2002. Wave equation with boundary control at elastic fixation. II. Differential equations. 38(4): 529–537. (in Russian)
14. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. 1977. Equations of mathematical physics. M., Nauka, 742. (in Russian)
15. Evans L. K. 2003. Partial differential equations. Translated from English. Novosibirsk, 576. (in Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 22.05.2023
Поступила после рецензирования 07.07.2023
Принята к публикации 11.07.2023

Received May 22, 2023
Revised July 7, 2023
Accepted July 11, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Найдюк Филипп Олегович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Прядиев Владимир Леонидович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теории функций и геометрии, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Ситник Сергей Михайлович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Filipp O. Naydyuk – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Vladimir L. Pryadiev – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate of Professor Department of Functions Theory and Geometry, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Sergey M. Sitnik – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia