УДК 517.987
DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-4-492-497

ОПИСАНИЕ КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДИВЕРГЕНТНОГО ТИПА ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

CLASS DESCRIPTION OF EVOLUTIONARY EQUATIONS DIVERGENT TYPE FOR A VECTOR FIELD

А.В. Субботин
A.V. Subbotin

Белгородский национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: andreysubbotin689@yandex.ru

Аннотация

Дается описание класса эволюционных уравнений дивергентного типа для векторного поля на $\mathbf{R}^3$, инвариантных относительно пространственных и временных трансляций, а также преобразующихся ковариантным образом при вращениях пространства $\mathbf{R}^3$.

Abstract

The class of evolution equations which have the divergent form is studied. Each such an equation control a dynamics of the vector field on $\mathbf{R}^3$. It is invariant relative to space and time translations and it is transformed by covariant way at space rotations. It is proposed the description of the class of all evolution such equations.

Ключевые слова: Векторное поле, эволюционное уравнение, закон локального сохранения, плотность потока векторного поля, унимодальность.

Keywords: Vector field, evolution equation, local conservation, flux density of vector field, unimodality.

1. Введение. Известно, что в неравновесной термодинамике в настоящее время не сформулировано каких-либо общих принципов, которые бы позволяли формулировать эволюционные уравнения для интенсивных термодинамических параметров, которые составляют полные в физическом смысле наборы макроскопических характеристик пространственно распределенных термодинамических систем, находящихся в неравновесном состоянии (см., например, [1]). Необходимость теоретического изучения конденсированных сред с внутренними степенями свободы, от таких простых как твердотельные среды с внутренним магнитным упорядочением и электрической поляризацией и до сред, например, с наличием сверхтекучей компоненты или сверхпроводящем состоянии, привело к необходимости разработки каких-то общих теоретических принципов, на основе которых можно на феноменологическом уровне конструировать для их описания физически адекватные эволюционные уравнения. Одной из попыток решения указанной проблемы является теоретический подход, который впоследствии получил название *гамильтонова* и который начал развиваться начиная с 70-х годов прошлого столетия. Достоинством этого подхода является то, что он тесно связан с общими теоретико-полевыми принципами теоретической физики. Пионерскими, по-видимому, в рамках этого подхода являются работы Д.В. Волкова (см., например, [2–4]). Основная идея этого подхода состояла в построении на основе лагранжева формализма бездиссипативной инерционной части генератора эволюции системы. При этом считалось, что учет наличия диссипативных процессов является простой, по крайней мере на уровне феноменологии, задачей. Дальнейшее развитие этот поход получил в работах [5–9], а затем был сформулирован основанный на той же теоретической идее несколько более общий метод конструирования инерционной части генератора эволюции на основе алгебр скобок Пуассона [11–14]. Впоследствии, однако, оказалось, что, во-первых, построение инерционной части генератора эволюции в случае жидко-кристаллических сред, в частности, нематических эластомеров, сопряжено с той трудностью, что посредством метода скобок Пуассона невозможно построение эволюционных уравнений, которые бы описывали экспериментально наблюдаемые их транспортные свойства [15].

Другая трудность в применимости гамильтонова подхода к конструированию эволюционных уравнений для различного рода конденсированных сред связана с учетом диссипативной части конструируемого генератора эволюции. Например, оказалось, что известная в теории магнетоупорядоченных сред проблема построения эволюционного уравнения с учетом магнитного трения не является столь уж простой, как на это надеялись ранее (см., например, [16, 17]). В связи с указанными трудностями было обращено внимание на чисто феноменологический подход, который основан на учете локальных законов сохранения. В рамках такого подхода теоретически очень прозрачно получаются уравнения динамики простых жидкостей и описываются зависящие от времени упругие деформации твердотельных сред (см., например, [18, 19]). По-видимому, идея о применении феноменологического подхода на конденсированные среды, устроенные более сложным образом, является плодотворной. Используя эту идею в работах [20, 21] была предпринята попытка перечислить класс всех возможных эволюционных уравнений для сферически симметричного ферромагнетика в отсутствие внешнего магнитного поля, который описывается псевдовекторным полем. В настоящей работе мы изучаем возможность описания динамики сегнетоэлектрика, то есть твердотельного диэлектрика, находящегося в электрически поляризованном состоянии, когда его пространственно локальное состояние полностью описывается векторным полем, на которое наложено дополнительное условие унимодальности.

2. **Постановка задачи.** В статье изучается задача построения адекватного уравнения для описания эволюции векторного унимодального поля $\mathbf{p}$. Уравнение такого типа может быть использовано для описания эволюции неравновесных состояний сферически симметричных сегнетоэлектриков. При этом значения поля $\mathbf{p}$ представляют плотность электрического момента среды. Задача заключается в описании класса $\boldsymbol{K}$ всех дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathsf{L}[\mathbf{p}], \tag{1}$$

где $\mathsf{L}[\mathbf{p}]$ – дифференциальный, вообще говоря, нелинейный оператор второго порядка. Выбор конкретного уравнения из этого класса всех допустимых уравнений того, которое может быть использовано в неравновесной термодинамике сегнетоэлектриков, представляет, конечно же, чисто физическую проблему. Формулировка задачи заключает в себе список требований, предъявляемых к оператору $\mathsf{L}[\bullet]$. Эти требования аналогичны тем, которые были использованы в [20] при решении аналогичной задачи относительно псевдовекторного поля. Эти требования состоят в следующем.

1. Оператор $\mathsf{L}[\bullet]$, осуществляющий отображение $\mathbf{L}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, должен иметь дивергентный тип, т. е.

$$\mathsf{L}_j[\mathbf{p}] = \nabla_k \mathsf{S}_{jk}[\mathbf{p}], \quad j = 1, 2, 3 \tag{2}$$

где $\mathsf{S}_{jk}[\mathbf{p}]$, $j,k=1,2,3$ – дифференциальный оператор 1-го порядка. Здесь и далее по парам повторяющихся индексов производится суммирование по всем допустимым значениям.

2. Оператор $\mathsf{L}_j[\bullet]$ инвариантен относительно действия группы трансляций $\mathbf{R}^3$, на котором определяется поле $\mathbf{p}$.

3. Оператор $\mathsf{L}_j[\bullet]$ инвариантен относительно трансляций времени.

4. Значения оператора $\mathsf{L}_j[\bullet]$ представляют векторное поле на $\mathbf{R}^3$ и, соответственно, значения оператора $\mathsf{S}_{jk}[\bullet]$ представляют тензорное поле. Тензор $\mathsf{S}_{jk}[\mathbf{p}]$ мы будем называть плотностью потока поля $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^3$.

Диффенренциальный оператор $\mathsf{S}_{jk}[\mathbf{p}]$ в общем виде предсталяется формулой

$$\mathsf{S}_{jk}[\mathbf{p}] = A_{jk}[\mathbf{p}] + T_{jklm}[\mathbf{p}]\nabla_l p_m\,. \tag{3}$$

Ввиду необходимости выполнения требований 2–4, значения $A_{jk}[\mathbf{p}]$ и $T_{jklm}[\mathbf{p}]$ представляют собой полиномы относительно вектора $\mathbf{p}$ с коэффициентами, которые являются дифференцируемыми функциями от $\mathbf{p}^2$, независящими от времени t и радиус-вектора $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^3$. При этом, согласно требованию 4, эти коэффициенты являются тензорами, соответственно 2-го и 4-го ранга.

Введем следующее дополнительное требование, которое как раз должно отражать тот факт, конструируемое уравнение предназначено для описания эволюции сферически симметричных сегнетоэлектриков.

5. Полиномы $A_{jk}[\mathbf{p}]$ и $T_{jklm}[\mathbf{p}]$ в виде произвольных линейных комбинаций

$$A_{jk}[\mathbf{p}] = \sum_{\alpha=1}^{n} a^{(\alpha)}(\mathbf{p}^2)A_{jk}^{(\alpha)}[\mathbf{p}],\ \ T_{jklm}[\mathbf{p}] = \sum_{\alpha=1}^{n} t(\mathbf{p}^2)T_{jklm}^{(\alpha)}[\mathbf{p}], \tag{4}$$

по базисам, которые состоят из линейно независимых мономов в тензорной алгебре с образующими: вектор p_j и универсальный тензор второго ранга δ_{jk}; являющихся тензорами, соответственно, 2-го и 4-го ранга.

Таким образом, задача об описании класса $\boldsymbol{K}$ сводится к алгебраической задаче описания всех элементов указанных базисов для конструирования полиномов $A_{jk}[\mathbf{p}]$ и $T_{jklm}[\mathbf{p}]$ таких, что дифференциальные операторы $\nabla_k T_{jklm}^{(\alpha)}\nabla_l p_m$, $\alpha = 1\div m$ линейно независимы.

3. Описание класса $\boldsymbol{K}$. Перечислим все элементы $A_{jk}^{(\alpha)}[\mathbf{p}]$ и $T_{jklm}^{(\alpha)}[\mathbf{p}]$. Такое перечисление дается следующим утверждением.

Лемма 1. Размерности линейных пространств полиномов $A_{jk}[\mathbf{p}]$ и $T_{jklm}[\mathbf{p}]$ равны, соответственно, 2 и 10. Базисы в этих пространствах состоят, соответственно, из следующих списков мономов: δ_{jk}, $p_j p_k$ и

$$\delta_{jk}\delta_{lm}\,,\ \delta_{jl}\delta_{km}\,,\ \delta_{jm}\delta_{kl}\,,\ p_j p_k p_l p_m\,,$$
$$\delta_{jk}p_l p_m\,,\ \delta_{jl}p_k p_m\,,\ \delta_{jm}p_k p_l\,,\ \delta_{kl}p_j p_m\,,\ \delta_{km}p_j p_l\,,\ \delta_{lm}p_j p_k\,.$$

Доказательство основано на элементарных рассуждениях в рамках тензорной алгебры [22]. Из Леммы 1 следует

Лемма 2. Тензоры $ $T_{jklm}^{(\alpha)}[\mathbf{p}]$, $\alpha = 1\div 10$, даваемые следующим списком, линейно независимы:

$$\delta_{jk}(\nabla,\mathbf{p}),\ \nabla_j p_k,\ \nabla_k p_j,\ p_j p_k p_m(\mathbf{p},\nabla)p_m,$$
$$\delta_{jk}p_m(\mathbf{p},\nabla)p_m,\ p_k p_l \nabla_j p_l,\ p_k(\mathbf{p},\nabla)p_j,\ p_j(\mathbf{p},\nabla)p_k,\ p_j p_l \nabla_k p_l,\ p_j p_k(\nabla,\mathbf{p}).$$

Теорема 1. Класс операторов $\mathsf{L}_j[\mathbf{p}] = \nabla_k \mathsf{S}_{jk}[\mathbf{p}]$ всех элементов класса $\boldsymbol{K}$ эволюционных уравнений, удовлетворяющих требованиям 1-5, представляется формулой

$$\mathsf{L}_j[\mathbf{p}] = \nabla_j a(\mathbf{p}^2) + \nabla_k b(\mathbf{p}^2)p_j p_k + \nabla_j[c_1(\mathbf{p}^2)(\nabla,\mathbf{p}) + c_2(\mathbf{p}^2)(\mathbf{p},\nabla)\mathbf{p}^2] +$$
$$\nabla_k[c_3(\mathbf{p}^2)\nabla_j p_k + c_4(\mathbf{p}^2)\nabla_k p_j + c_5(\mathbf{p}^2)p_k(\mathbf{p},\nabla)p_j + c_6(\mathbf{p}^2)p_j(\mathbf{p},\nabla)p_k +$$
$$c_7(\mathbf{p}^2)p_j p_k(\nabla,\mathbf{p}) + c_8(\mathbf{p}^2)p_j p_k(\mathbf{p},\nabla)\mathbf{p}^2 + c_9(\mathbf{p}^2)p_k\nabla_j\mathbf{p}^2 + c_{10}(\mathbf{p}^2)p_j\nabla_k\mathbf{p}^2]. \quad (5)$$

Доказательство основано на доказательстве того, что тензоры $T^{(\alpha)}_{jklm}[\mathbf{p}]\nabla_l p_m,\ \alpha = 1 \div 10$ линейно независимы.

4. Описание класса $\boldsymbol{K}_0$.

Определение. Поле $p_j(\mathbf{x})$ на $\mathbf{R}^3$ назовем унимодальным, если оно обладает свойством $\mathbf{p}^2(\mathbf{x}) = p^2 = const.$

Введем в рассмотрение класс $\boldsymbol{K}_0$ – подкласс класса $\boldsymbol{K}$ таких уравнений, которые сохраняют унимодальность поля $p_j(\mathbf{x})$ в процессе эволюции. Для описания всех возможных уравнений этого класса нужно: во-первых, в формуле (5) все коэффициенты $a, b, c_\alpha, \alpha = 1 \div 7$ положить постоянными; во-вторых, положить $c_2 = c_8 = c_9 = c_{10} = 0$, при этом слагаемые с c_1 и c_3 объединятся в одно; в третьих, доказать линейную независимость всех получившихся в результате первых двух операций слагаемых. Тогда получаем следующее утверждение.

Лемма 3. Класс операторов $\mathsf{L}_j[\mathbf{p}] = \nabla_k \mathsf{S}_{jk}[\mathbf{p}]$ всех элементов класса $\boldsymbol{K}_0$ эволюционных уравнений, удовлетворяющих требованиям 1–5, содержится в классе $\aleph$ и представляется формулой

$$\mathsf{L}_j[\mathbf{p}] = b\nabla_k p_j p_k + c_3\nabla_j(\nabla,\mathbf{p}) + c_4\Delta p_j +$$
$$+\nabla_k[c_5 p_k(\mathbf{p},\nabla)p_j + c_6 p_j(\mathbf{p},\nabla)p_k + c_7 p_j p_k(\nabla,\mathbf{p})]. \quad (6)$$

Отсюда следует

Теорема 2. Класс $\boldsymbol{K}_0$ пуст.

Доказательство основано на доказательстве линейной независимости набора скалярных, $p_j\nabla_k p_j p_k$, $p_j\nabla_j(\nabla,\mathbf{p})$, $p_j\Delta p_j$, $p_j\nabla_k p_k(\mathbf{p},\nabla)p_j$, $p_j\nabla_k p_j(\mathbf{p},\nabla)p_k$, $p_j\nabla_k p_j p_k(\nabla,\mathbf{p})$ для произвольного векторного поля $\mathbf{p}$, удовлетворяющего условию $\mathbf{p}^2 = const.$

5. Заключение. Таким образом, не существует эволюционного уравнения для векторного унимодального поля. Заметим, что отказ от дивергентности уравнения и добавление в правую часть (6) слагаемого $\lambda\mathbf{p}$ с произвольной постоянной λ не спасает положения. Следовательно, для описания эволюции поля плотности поляризации сегнетоэлектрика необходимо допустить обязательное нарушение унимодальности. Такое нарушение связано с тепловыми процессами внутри среды, которыми мы пренебрегли в приводимых выше построениях.

Списоклитературы
References

1. Гуров К.П. 1978. Феноменологическая термодинамика необратимых процессов. Физические основы / М. : Наука, 128 с.

Gurov K.P. Phenomenological thermodynamics of irrevercible processes. Physical foundations / Moscow : Nauka. 1978, 128p.

2. Волков Д.В. 1969. Феноменологический лагранжиан взаимодействия голдстоуновских частиц/ Препринт ИТФ-69-75, Киев, 51 с.

Volkov D.V. 1969. Phenomenological interaction lagrangian of goldstone particles / Preprint ITF-69-75, Kiev, 51p.

3. Волков Д.В., Желтухин А.А., Блиох Ю.П. 1971. Феноменологический лагранжиан спиновых волн. ФТТ, 13, № 6: 1668–1678.

Volkov D.V., Zheltukhin A.A., Bliokh Yu.P. 1971. Phenomenological lagrangian of spin waves. PTT, 13, № 6: 1668–1678.

4. Волков Д.В. 1973. Феноменологические лагранжианы. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 4, № 1: 3–41.

Volkov D.V. 1973. Phenomenological lagrangian. Physics of elementary particles and atomic nucleus, 4, № 1: 3–41.

5. Андреев А.Ф., Марченко В.И. 1976. Макроскопическая теория спиновых волн. ЖЭТФ, 70, № 4: 1522–1532.

Andreev A.Ph., Marchenko V.I. 1976. Macroscopic theory of spin waves. ZETP, 70, № 4: 1522 –1532.

6. Андреев А.Ф. 1978. Магнитные свойства неупорядоченных сред. ЖЭТФ, 74: 786–797.

Andreev A.Ph. 1978. Magnetic properties non-ordered media. ZETP, 74, 2: 786–797.

7. Волков Д.В., Желтухин А.А. 1979. Феноменологический лагранжиан спиновых волн в пространственно-неупорядоченных средах. ФНТ, 5, №11: 1359–1363.

Volkov D.V., Zheltukhin A.A. 1979. Phenomenological lagrangian of spin waves in space non-неупорядоченных media. PNT, 5, №11: 1359–1363.

8. Волков Д.В., Желтухин А.А. 1980. О распространении спиновых волн в пространственно-неупорядоченных средах. ЖЭТФ, 78, № 5: I867–1878.

Volkov D.V., Zheltukhin A.A. 1980. On distribution of spin waves in space non-ordered media. ZETP, 78, № 5: I867–1878.

9. Андреев А.Ф., Марченко В.И. 1980. Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков. УФН, 130, № 1: 37–63.

Andreev A.Ph., Marchenko V.I. 1980. Symmetry and macroscopic dynamics of magnets. UPN, 130, № 1: 37–63.

10. Dsyaloshinskii I.E., Volovick G.E. 1980. Poisson brackets in condensed matter physics. Ann. Phys, 125:1: 67–97.

11. Вирченко Ю.П., Пелетминский С.В. 1990. Скобки Пуассона и дифференциальные законы сохранения в теории магнитоупругих сред. Проблемы физической кинетики и физики твердого тела/ Киев: Наукова думка: 63–77.

Virchenko Yu.P., Peletminskii S.V. 1990. Poisson brackets and differential conservation laws in theory of ordered magnets. Problems of physical kinetics and solid state physics / Kiev: Naukova Dumka: 63–77.

12. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. 1993. Гамильтонов подход к теории антиферромагнитных систем. ТМФ, 95:1: 58–73.

Isaev A.A., Kovalevskii M.Yu., Peletminskii S.V. 1993. Hamiltonian approach in the theory of antiferromagnetic systems. Theor. and Math. Physics, 95:1: 58–73.

13. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. 1995. О гамильтоновом подходе к динамике сплошных сред. ТМФ, 102:2: 283–296.

Isaev A.A., Kovalevskii M.Yu., Peletminskii S.V. 1995. On Hamiltonian approach in dynamics of continuous media// Theor. and Math. Physics, 102:2: 283–296.

14. Исаев А.А., Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В. 1996. Гамильтонов подход в теории конденсированных сред со спонтанно нарушенной симметрией. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 27(2): 431–492.

Isaev A.A., Kovalevskii M.Yu., Peletminskii S.V. 1996. Hamiltonian approach in theory of condensed matter with spontenuous distruction of symmetry. Physics of elementary particles and atomic nucleus, 27(2): 431–492.

15. Кац Е.И., Лебедев В.В. 1988. Динамика жидких кристаллов/ М.: Наука, 144 с.

Katz E.I., Lebedev V.V. 1988. Dynamics of liquid crystals / Moscow : Nauka, 144 p.

16. Барьяхтар В.Г., Белых В.Г., Соболева Т.К. 1988. Макроскопическая теория релаксации коллективных возбуждений в неупорядоченных и неколлинеарных магнетиках / Теор. и мат. физика, 77;2: 311–318.

Bar'yakhtar V.G., Belykh V.G., Soboleva T.K. 1988. Macroscopic theory of collective disturbances relaxation in non ordered and non collinear magnets. Theor. and Math. Physics, 77;2: 311–318.

17. Академик НАН Украины Виктор Григорьевич Барьяхтар. Жизнь в науке / Нац. акад. наук Украины, Нац. науч. центр «Харьк. физ.-техн. ин-т» / К. : Наукова думка, 2010, 328 с.

2010. Academician of NANU V.G. Bar'yakhtar. Life in science./ NANU, National scientific center "KPTI" / Kiev : Naukova Dumka, 328 p.

18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. 1986. Гидродинамика. Теоретическая физика т.6/ М.: Наука, 732 с.

Landau L.D., Liphshitz E.M. 1986. Hydrodynamics. Theoretical physics v.6/ Moscow : Nauka, 732 p.

19. Truesdell C. 1972. A first Course in Rational Continuum Mechanics / Baltimore, Maryland: The John Hopkins University.

20. Вирченко Ю.П., Чурсин Д.А. 2015. Плотность потока магнитного момента сферически симметричного магнетика. Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. 11(208); 39: 191–196.

Virchenko Yu.P., Chursin D.A. 2015. Flux density of magnetic moment of spherically symmetric magnet. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, 11(208); 39, 191–196.

21. Понамарева А.Э., Вирченко Ю.П. 2018. Построение общего эволюционного уравнения для псевдовекторного соленоидального поля с локальным законом сохранения. Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. 50; 2, 224–232.

Ponamareva A.E., Virchenko Yu.P. 2018. Construction of general evolution equation for pseudovector solenoidal field with local conservation law. Belgorod State University Scientific Bulletin, 50;2: 224–232.

22. Mac-Connell A.J. 1957. Application of tensor analysis / New York : Dover Publications, 412 p.