ФИЗИКА
PHYSICS

УДК 530.182
DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-4-424-432

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛИНЕЙНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ И ИХ ЛОКАЛИЗАЦИЯ НА ДЕФЕКТЕ В ДВУХУРОВНЕНОЙ СИСТЕМЕ

NONLINEAR INTERACTION OF LINEAR EXCITATIONS AND THEIR LOCALIZATION AT A DEFECT IN A TWO-LEVEL SYSTEM

С.Е. Савотченко
S.E. Savotchenko

Белгородский государственный технологический университет имени В.Г. Шухова
Российская Федерация, 308012, Белгород, ул. Костюкова, 46

Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov
46 Kostukova St., 308012, Belgorod, Russian Federation

E-mail: savotchenkose@mail.ru

Аннотация
Рассмотрены особенности локализации стационарных состояний в двухуровневой системе с нелинейным взаимодействием на границе раздела двух линейных сред. Математическая формулировка модели представляет собой одномерную краевую задачу для линейного уравнения Шредингера с нелинейными граничными условиями. Проанализированы условия локализации возбуждений. Показано, что линейное локализованное состояние в линейной среде вследствие нелинейности взаимодействия с дефектом имеет закон дисперсии, обладающий характерным для нелинейных волн свойством – зависимостью энергии от степени амплитуды поля.

Abstract
The features of localization of stationary states in a two-level system with nonlinear interaction at the interface of two linear media are considered. The mathematical formulation of the model is a one-dimensional boundary value problem for a linear Schrödinger equation with nonlinear boundary conditions. The conditions of localization of excitations are analyzed. It is shown that a linear localized state in a linear medium due to nonlinearity of interaction with a defect has a dispersion law, which has a characteristic feature for nonlinear waves - the dependence of energy on the degree of field amplitude.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, плоский дефект, граница раздела сред, возбуждения волны, локализованные состояния.
Keywords: Schrödinger equation, planar defect, interface, excitations, waves, localized states.

Введение

Большое значение в теории нелинейных явлений играет изучение особенностей локализации возбуждений различной физической природы вблизи разнообразных дефектов, в том числе границ раздела сред. Математическое моделирование таких эффектов проводится с использованием нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными [1, 2].

Большинство исследований солитонов в нелинейных средах были сфокусированы на возбуждениях, описываемых скалярными полями. Однако солитоны могут включать в себя несколько компонентов [3]. Такими примерами могут служить оптические пучки с различными поляризациями или длинами несущих волн, а также атомные состояния в конденсатах Бозе-Эйнштейна (БЭК), которые могут связываться в векторные состояния через межфазные модуляции. Векторная связь значительно обогащает солитонные семейства и изменяет их стабильность.

Локализованные структуры атомного БЭК в динамической ловушке с осциллирующими стенками занимают промежуточное место между консервативными и диссипативными солитонами. Это вызвано тем, что в таких системах в случае непрозрачных для атомов стенок сохраняется число частиц, но, с другой стороны, имеется энергообмен при взаимодействии атомов с движущимися стенками [4]. В резонансных условиях, когда частота осцилляций стенок близка к разности частот какой-либо пары стационарных состояний БЭК и соответственно оправдано двухуровневое приближение, динамика БЭК описывается системой связанных уравнений типа нелинейных уравнений Шредингера (НУШ). В [4] был проведен детальный анализ взаимодействия двух одномерных пространственных векторных осциллонов для ловушки со значительными поперечными размерами и основное внимание уделялось специальному типу векторных солитонов — так называемым синфазным и противофазным осциллонам, поскольку для них более четко прослеживаются соотношения со скалярными солитонами.

В данной работе будут рассмотрены двухкомпонентные возбуждения в линейной среде, но с нелинейным взаимодействием в ультратонком дефектном слое. Такая модель двухкомпонентной системы с линейным взаимодействием на дефекте использовалась в [5]. Случаи локализации двухкомпонентных нелинейных возбуждений в нелинейных средах с линейным взаимодействием на дефекте рассматривались в [6–9]. Следует отметить аналогию в особенностях структуры локализованных состояний и процессов рассеяния возбуждений в двухкомпонентных системах со средами с пространственной дисперсией [10–16].

Для описания новых особенностей рассеяния возбуждений, учитывающих нелинейные свойства границ раздела сред, в данной работе предлагается использовать линейное УШ с граничными условиями с квадратичной нелинейностью относительно искомого поля, описывающими нелинейный отклик взаимодействия возбуждений с границей по аналогии с нелинейным самосогласованным потенциалом, который применялся в [17–24].

При наличии слабой связи между плоскопараллельными волноводами, амплитуда поля в которых существенно превышает усредненное значение амплитуды поля во всем кристалле, нелинейные слагаемые в УШ учитывались только внутри самих волноводов [25]. В результате появляется возможность использовать линейное УШ с нелинейными граничными условиями. Такая модельная система позволяет аналитически описать локализованные состояния в линейной среде, которые обладают свойствами, присущими нелинейным возбуждениям. Проявление у линейных возбуждений таких нелинейных свойств обусловлено именно нелинейным характером взаимодействия двух компонент поля на дефекте.

1. Уравнения модели

Рассмотрим контакт двух линейных сред с различными физическими характеристиками. Среды разделяет плоская граница, проходящая через начало координат, перпендикулярно оси *Ox*. Предполагается, что возмущение параметров сред, создаваемой границей раздела как плоским дефектом, сосредоточено на расстояниях, которые существенно меньше размеров возбуждений, и поэтому оно может считаться локальным.

Рассмотрим возбуждения, взаимодействующие вблизи такого плоского дефекта, на основе одномерной модели двухуровневой системы, в которой возбуждение на границе раздела сред может находиться в двух состояниях ψ_1 и ψ_2 с различными фиксированными собственными энергиями (частотами). Полная волновая функция двухуровневой системы представима в виде линейной комбинации ψ_1 и ψ_2 [5–9].

Возбуждения считаются однородно распределенными вдоль границы раздела, поэтому достаточно рассматривать одномерные состояния, описывающие неоднородный профиль в направлении, перпендикулярном плоскости дефекта. Условия однородности распределения поля в плоскости дефекта позволяют далее учитывать зависимость только от координаты x, что фактически делает постановку задачи одномерной.

Предполагая, что стационарное состояние с энергией E определяется зависимостью $\psi_j(x,t)=\psi_j(x)\exp(-iEt)$, будем рассматривать процессы взаимодействия возбуждений на дефекте на основе одномерного стационарного УШ:

$$E\psi_j=-\frac{1}{2m_j}\frac{\partial^2\psi_j}{\partial x^2}+\Omega_j(x)\psi_j, \tag{1}$$

где m_j – эффективная масса возбуждений, свойства сред, определяющие граничные частоты сплошного спектра, для возбуждений первого и второго типов считаются различными по разные стороны от плоской границы раздела сред:

$$\Omega_j(x)=\begin{cases}\Omega_j^{(-)}, & x<0\\ \Omega_j^{(+)}, & x>0\end{cases}.$$

Здесь и далее индекс принимает два значения: j=1, 2.

К уравнению (1) добавляются условия непрерывности поля при переходе через границу раздела сред

$$\psi_j(+0)=\psi_j(-0)=\psi_{0j}, \tag{2}$$

где ψ_{0j} – амплитуда колебаний j-ой компоненты поля в плоскости дефекта.

В работах [5–9] были использованы условия связи возбуждений на дефекте в линейном приближении. Теперь будем считать взаимодействие возбуждений на дефекте нелинейным, для чего используем нелинейные самосогласованные граничные условия следующего вида:

$$\begin{cases}\psi_1'(+0)-\psi_1'(-0)=2m_1\psi_{01}\{\alpha_1\psi_{01}^2+\beta_1\psi_{02}^2\}\\ \psi_2'(+0)-\psi_2'(-0)=2m_2\psi_{02}\{\alpha_2\psi_{02}^2+\beta_2\psi_{01}^2\}.\end{cases} \tag{3}$$

Здесь α_j и β_j – параметры интенсивности нелинейного взаимодействия возбуждений с дефектом и друг с другом. Параметры α_j характеризуют взаимодействие возбуждения в j-ом состоянии с дефектом, а параметры β_j характеризуют взаимодействие возбуждения 1-ого и 2-ого состояний друг с другом на границе раздела. Если оба β_j=0, то возбуждения не взаимодействуют между собой и соответствуют независимым состояниям.

3. Локализованные состояния

Если полная энергия возбуждения в двухуровневой системе лежит ниже собственных энергий первого и второго состояний, то есть находится в диапазоне $E<\min\{\Omega_j^{(\pm)}\}$, то УШ (1) имеет решение в виде

$$\psi_j(x)=\begin{cases}\psi_{0j}\exp(q_j^{(-)}x), & x<0\\ \psi_{0j}\exp(-q_j^{(+)}x), & x>0\end{cases} \tag{4}$$

описывающее локализованное состояние.

Коэффициенты затухания возбуждений при удалении от дефекта задаются выражениями:

$$q_j^{(\pm)} = \sqrt{2m_j(\Omega_j^{(\pm)} - E)}\,. \tag{5}$$

Решение (4) удовлетворяет условию непрерывности (2). Подстановка решения (4) в условия (3) позволяет получить выражения для амплитуд локализованного состояния:

$$\psi_{01}^2(E) = \{\beta_1(q_2^{(+)} + q_2^{(-)})/m_2 - \alpha_2(q_1^{(+)} + q_1^{(-)})/m_1\}/2\Delta\,, \tag{6}$$

$$\psi_{02}^2(E) = \{\beta_2(q_1^{(+)} + q_1^{(-)})/m_1 - \alpha_1(q_2^{(+)} + q_2^{(-)})/m_2\}/2\Delta\,, \tag{7}$$

где $\Delta = \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2$.

В (6) и (7) подставляются (5), что позволяет получить явные зависимости амплитуд от энергии.

Если характеристики сред по разные стороны от границы их раздела одинаковы, то $\Omega_j^{(+)} = \Omega_j^{(-)} = \Omega_j$. Тогда из (5) получается, что затухание поля *j*-ого состояния происходит симметрично относительно плоскости дефекта:

$$q_j^{(+)} = q_j^{(-)} = q_j = \sqrt{2m_j(\Omega_j - E)}\,. \tag{8}$$

В этом случае из (6) и (7) с учетом (8) получаются амплитуды колебаний дефектного слоя:

$$\psi_{01}^2(E) = \{\beta_1\sqrt{(\Omega_2 - E)/m_2} - \alpha_2\sqrt{(\Omega_1 - E)/m_1}\}/\Delta\,, \tag{9}$$

$$\psi_{02}^2(E) = \{\beta_2\sqrt{(\Omega_1 - E)/m_1} - \alpha_1\sqrt{(\Omega_2 - E)/m_2}\}/\Delta\,. \tag{10}$$

Если теперь считать все характеристики сред одинаковыми для обоих состояний, то $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ и $m_1 = m_2 = m$. Тогда из (8) получается, что затухание поля обоих состояний происходит одинаково:

$$q_1 = q_2 = q = \sqrt{2m(\Omega - E)}\,. \tag{11}$$

В этом случае из (9) и (10) получаются амплитуды колебаний дефектного слоя:

$$\psi_{01}^2(E) = (\beta_1 - \alpha_2)\sqrt{(\Omega - E)/m}\,/\Delta\,, \tag{12}$$

$$\psi_{02}^2(E) = (\beta_2 - \alpha_1)\sqrt{(\Omega - E)/m}\,/\Delta\,. \tag{13}$$

Из выражений (12) и (13) вытекает, что в рассматриваемом случае амплитуды двух состояний связаны простым линейным соотношением:

$$\psi_{01} = \pm\psi_{02}\left(\frac{\beta_1 - \alpha_2}{\beta_2 - \alpha_1}\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Условие локализации выражается в виде соотношения между значениями параметров дефекта: $\beta_1 < \alpha_2 < \beta_1\beta_2/\alpha_1$ (что возможно при $\beta_2/\alpha_1 > 1$) или $\beta_1\beta_2/\alpha_2 < \alpha_1 < \beta_2$ (что возможно при $\beta_1/\alpha_2 < 1$).

Соотношения (12) и (13) можно трактовать с другой стороны. Если считать, что амплитуда (ψ_{01} или ψ_{02} – не важно, так как они связаны выражением (14)) колебаний дефектного слоя является параметром, определяемым в экспериментах, то через нее можно выразить энергию стационарного локализованного состояния. Тогда, например из (12), можно определить энергию:

$$E = \Omega - m\Delta^2\psi_{01}^4/(\beta_1 - \alpha_2)^2\,. \tag{15}$$

Выражение (15) можно трактовать как закон дисперсии локализованных состояний. Таким образом, получается, что линейное локализованное состояние в линейной среде вследствие нелинейности взаимодействия с дефектом характеризуется законом дисперсии, обладающим характерным для нелинейных волн свойством – зависимостью энергии от степени амплитуды поля.

4. Поток

Будем анализировать сохраняющийся вдоль границы раздела сред поток энергии, переносимый локализованным j-ым возбуждением, который представляет собой первый интеграл УШ (1):

$$N_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^2(x)dx. \tag{16}$$

Полный поток энергии двухуровневой системы можно представить в виде суммы двух составляющих

$$N = N_1 + N_2. \tag{17}$$

Выражение (17) может трактоваться с точки зрения теории Бозе-эйнштейновской конденсации как полное число частиц в системе [9, 10]. Кроме того, можно рассматривать (17) как условие нормировки, в котором поток считается фиксированным. Тогда поток может выступать в роли управляющего параметра, через который можно выразить какие-либо другие характеристики локализованных состояний.

Подставив волновые функции состояний (4) в потоки (16) можно получить выражения:

$$N_j(E) = \frac{\psi_{0j}^2(E)}{2}\left(\frac{1}{q_j^{(+)}} + \frac{1}{q_j^{(-)}}\right), \tag{18}$$

в которые подставляются (5), (6) и (7).

Полный поток (17) тогда примет вид:

$$N(E) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\psi_{0j}^2(E)\left(\frac{1}{q_j^{(+)}} + \frac{1}{q_j^{(-)}}\right), \tag{19}$$

Из выражений (18) с помощью (6) и (7) можно исключить амплитуды:

$$N_1(E) = \frac{q_1^{(+)} + q_1^{(-)}}{4\Delta q_1^{(+)} q_1^{(-)}}\left\{\frac{\beta_1}{m_2}(q_2^{(+)} + q_2^{(-)}) - \frac{\alpha_2}{m_1}(q_1^{(+)} + q_1^{(-)})\right\}, \tag{20}$$

$$N_1(E) = \frac{q_2^{(+)} + q_2^{(-)}}{4\Delta q_2^{(+)} q_2^{(-)}}\left\{\frac{\beta_2}{m_1}(q_1^{(+)} + q_1^{(-)}) - \frac{\alpha_1}{m_2}(q_2^{(+)} + q_2^{(-)})\right\}. \tag{21}$$

Полный поток примет вид:

$$\begin{aligned} N(E) = \frac{1}{4\Delta}\Bigg\{&(q_1^{(+)} + q_1^{(-)})(q_2^{(+)} + q_2^{(-)})\left(\frac{\beta_1}{m_2 q_1^{(+)} q_1^{(-)}} + \frac{\beta_2}{m_1 q_2^{(+)} q_2^{(-)}}\right) - \\ &- \frac{\alpha_2(q_1^{(+)} + q_1^{(-)})^2}{m_1 q_1^{(+)} q_1^{(-)}} - \frac{\alpha_1(q_2^{(+)} + q_2^{(-)})^2}{m_2 q_2^{(+)} q_2^{(-)}}\Bigg\} \end{aligned} \tag{22}$$

Если $\Omega_j^{(+)} = \Omega_j^{(-)} = \Omega_j$, то есть когда характеристики сред по разные стороны от границы их раздела одинаковы, то полный поток (22) примет вид:

$$N(E) = \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}}\left[\beta_1\left(\frac{\Omega_2 - E}{\Omega_1 - E}\right)^{1/2} + \beta_2\left(\frac{\Omega_1 - E}{\Omega_2 - E}\right)^{1/2}\right] - \frac{\alpha_1}{m_2} - \frac{\alpha_2}{m_1}\right\}. \tag{23}$$

В отсутствии взаимодействии 1-ого и 2-ого состояний между собой, то есть когда β_j=0, из (22) получается выражение:

$$N = -\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{\alpha_1}{m_2} + \frac{\alpha_2}{m_1}\right), \tag{24}$$

из которого следует, что:

1) полный поток невзаимодействующих локализованных вблизи дефекта состояний не зависит от энергии;

2) должно выполняться условие $\alpha_1/m_2+\alpha_2/m_1<0$, которое всегда справедливо при отрицательных параметрах взаимодействия возбуждений с дефектом.

Если теперь $\Omega_1=\Omega_2=\Omega$ и $m_1=m_2=m$, то есть когда все характеристики сред одинаковы для обоих состояний, то из (23) получается полный поток в виде:

$$N=\frac{\beta_1+\beta_2-\alpha_1-\alpha_2}{m\Delta}. \tag{25}$$

В данном случае из (25) видно, что такой полный поток не зависит от энергии. Также из требования того, чтобы поток был положительным, из (25) вытекает, что должна выполняться одна из пар следующих условий:

1) $\beta_1+\beta_2<\alpha_1+\alpha_2$ и $\beta_1\beta_2>\alpha_1\alpha_2$ или

2) $\beta_1+\beta_2>\alpha_1+\alpha_2$ и $\beta_1\beta_2<\alpha_1\alpha_2$.

В отсутствии взаимодействии 1-ого и 2-ого состояний между собой из (25) получается поток

$$N=-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{m\alpha_1\alpha_2}, \tag{26}$$

который также можно было получить из (24) при $m_1=m_2=m$. Если дополнительно предположить, что $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$, то из (26) получается поток $N=-2/m\alpha$. В этом случае взаимодействие с дефектом должно быть отрицательным, что соответствует притягивающему дефекту.

В случае существенного преобладания нелинейного взаимодействия 1-ого и 2-ого состояний между собой над их взаимодействием с дефектом из (25) получается поток:

$$N=-\frac{\beta_1+\beta_2}{m\beta_1\beta_2}. \tag{27}$$

Если дополнительно предположить, что $\beta_1=\beta_2=\beta$, то из (27) получается поток $N=-2/m\beta$, а значит должно быть $\beta<0$.

Заключение

На основе одномерной модели нелинейного плоского дефекта рассмотрены особенности локализации линейных возбуждений в двухуровневой системе. Математическая формулировка модели представляет собой краевую задачу для стационарных линейных УШ с нелинейными граничными условиями.

Проанализированы условия локализации возбуждений. Показано, что линейное локализованное состояние в линейной среде вследствие нелинейности взаимодействия с дефектом имеет закон дисперсии, обладающий характерным для нелинейных волн свойством – зависимостью энергии от степени амплитуды поля.

Получены в явном виде сохраняющийся вдоль границы раздела сред поток энергии, переносимый локализованным j-ым возбуждением, и полный поток, который также может трактоваться с точки зрения теории Бозе-эйнштейновской конденсации как полное число частиц в системе. Поток представлен в виде зависимости от энергии и параметров системы: $N=N(\mathbf{p},E)$, где $\mathbf{p}=\{m_{1,2},\ \Omega_{1,2}^{(\pm)},\ \alpha_{1,2},\ \beta_{1,2}\}$ – вектор параметров, характеризующих среды и границу их раздела. К интерпретации данных зависимостей можно подойти с другой стороны, если рассматривать их как условия нормировки, считая поток фиксированным. Тогда можно считать поток управляющим параметром, через который выражается, например энергия: $E = E(\mathbf{p}, N)$.

Полученные выражения для потоков энергии могут иметь значение для разработки и совершенствования оптических волноводных систем с заданными характеристиками, оптических устройств управления на основе слоистых сред, а также в различных оптических переключателях и ограничителях мощности, способных пропускать световые импульсы только выше или ниже заданного значения потока энергии [26].

Список литературы
References

1. Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наукова думка, 1984, 288.

Davydov A.S. Solitony v molekuljarnyh sistemah. Kiev: Naukova dumka, 1984, 288.

2. Косевич А.М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. Киев: Наукова думка, 1989, 304.

Kosevich A.M., Kovalev A.S. Vvedenie v nelinejnuju fizicheskuju mehaniku. Kiev: Naukova dumka, 1989, 304.

3. Kartashov Y.V., Malomed B.A., Vysloukh V.A., Torner L. 2009. Vector solitons in nonlinear lattices. Optics letters, 34, 23: 3625–3627.

4. Высотина Н.В., Розанов Н.Н., Шацев А.Н. 2018. Взаимодействие осциллонов конденсата Бозе−Эйнштейна. Опт. и спектр., 124, 1: 82–95.

Vysotina N.V., Rozanov N.N., Shacev A.N. 2018. Vzaimodejstvie oscillonov kondensata Boze−Jejnshtejna. Opt. i spektr., 124, 1: 82–95.

Savotchenko S.E. 2017. Lokalizovannye sostojanija v defokusirujushhej nelinejnoj srede s defektom s vnutrennej strukturoj. Nauchnye vedomosti BelGU. Serija Matematika. Fizika, 20(269), 48: 79–85.

5. Савотченко С.Е. 2001. Особенности рассеяния частиц и возбуждение квазилокальных состояний стационарным потоком в двухуровневой системе. Известия высших учебных заведений. Физика, 44, 4: 67–73.

Savotchenko S.E. 2001. Osobennosti rassejanija chastic i vozbuzhdenie kvazilokal'nyh sostojanij stacionarnym potokom v dvuhurovnevoj sisteme. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika, 44, 4: 67–73.

6. Савотченко С.Е. 2017. Взаимодействие локализованных состояний вблизи границы раздела нелинейных сред. Конденсированные среды и межфазные границы, 19: 291–295.

Savotchenko, S.E. 2017. Vzaimodejstvie lokalizovannyh sostojanij vblizi granicy razdela nelinejnyh sred. Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy, 2: 291–295.

7. Савотченко С.Е. 2017. Связанные солитонные состояния и локализация кноидальных волн на границе раздела нелинейной и линейной сред. ЖТФ, 62: 1776–1781.

Savotchenko S.E. 2017. Svjazannye solitonnye sostojanija i lokalizacija knoidal'nyh voln na granice razdela nelinejnoj i linejnoj sred. ZhTF, 62: 1776–1781.

8. Savotchenko S.E. 2018. The coupled states localized near the interface between nonlinear attractive and repulsive media. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 63, 10: 171–185.

9. Savotchenko S.E. 2018. Interaction of the localized states near nonlinear repulsive media border. Modern Physics Letters B, 32, 19: 1850222–13.

10. Косевич А.М., Савотченко С.Е. 1999. Особенности динамики одномерных дискретных систем с взаимодействием не только ближайших соседей и роль высшей дисперсии в солитонной динамике. ФНТ, 25, 7: 737–747.

Kosevich A.M., Savotchenko S.E. 1999. Osobennosti dinamiki odnomernyh diskretnyh sistem s vzaimodejstviem ne tol'ko blizhajshih sosedej i rol' vysshej dispersii v solitonnoj dinamike. FNT, 25, 7: 737–747.

11.Kosevich A.M., Savotchenko S.E. 2000.Forced vibrations and resonance wave scattering on impurity in 1D discrete lattice with nearest- and next-nearest neighbors interaction. Physica B, 284-288: 1551–1552.

12. Савотченко С.Е. 2000. Рассеяние волн дефектами в средах с пространственной дисперсией и безызлучательные динамические солитоны. Известия высших учебных заведений. Физика, 43, 10: 876–881.

Savotchenko S.E. 2000. Rassejanie voln defektami v sredah s prostranstvennoj dispersiej i bezyzluchatel'nye dinamicheskie solitony. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika, 43, 10: 876–881.

13.Савотченко С.Е. 2004. Локализация волн вблизи интерфейса нелинейных сред с пространственной дисперсией. Известия высших учебных заведений. Физика, 47, 5: 79–84.

Savotchenko S.E. 2004. Lokalizacija voln vblizi interfejsa nelinejnyh sred s prostranstvennoj dispersiej. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika, 47, 5: 79–84.

14. Krasilnikov V.V., Savotchenko S.E. 2004. Peculiarities of soliton motion in molecular systems with high dispersion. Phys. Stat. Sol. (c), 1, 11: 2757–2760.

15. Савотченко С.Е. 2005. Нелинейные коллективные возбуждения в квазиодномерных структурах при наличии пространственной дисперсии. Известия вузов. Физика, 48, 9: 24–27.

Savotchenko S.E. 2005. Nelinejnye kollektivnye vozbuzhdenija v kvaziodnomernyh strukturah pri nalichii prostranstvennoj dispersii. Izvestija vuzov. Fizika, 48, 9: 24–27.

16. Савотченко С.Е. 2006. Особенности нелинейной динамики квазичастиц в молекулярных структурах с водородными связями при наличии взаимодействия не только ближайших соседей. Известия вузов. Физика, 49, 2: 52–56.

Savotchenko S.E. 2006. Osobennosti nelinejnoj dinamiki kvazichastic v molekuljarnyh strukturah s vodorodnymi svjazjami pri nalichii vzaimodejstvija ne tol'ko blizhajshih sosedej. Izvestija vuzov. Fizika, 49, 2: 52–56.

17. Savotchenko S.E. 2018. Localized states near the interface with anharmonic properties between nonlinear media with different characteristics. Modern Physics Letters B. 32, 10: 1850120-12.

18.Савотченко С.Е. 2018. Периодические состояния вблизи плоского дефекта с нелинейным откликом, разделяющего нелинейный самофокусирующий и линейный кристаллы. Конденсированные среды и межфазные границы, 20, 2: 255–262.

Savotchenko S.E. 2018. Periodicheskie sostojanija vblizi ploskogo defekta s nelinejnym otklikom, razdeljajushhego nelinejnyj samofokusirujushhij i linejnyj kristally. Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy, 20, 2: 255–262.

19.Савотченко С.Е. 2018. Особенности локализации возбуждений вблизи нелинейного слоя между линейными средами, разделенными плоскими дефектами с нелинейными свойствами. Нелинейный мир, 3: 25–32.

Savotchenko S.E. 2018. Osobennosti lokalizacii vozbuzhdenij vblizi nelinejnogo sloja mezhdu linejnymi sredami, razdelennymi ploskimi defektami s nelinejnymi svojstvami. Nelinejnyj mir, 3: 25–32.

20.Савотченко С.Е. 2018. Неоднородные состояния в нелинейной самофокусирующей среде, порождаемые нелинейным дефектом. Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики, 107, 8: 481–483.

Savotchenko S.E. 2018. Neodnorodnye sostojanija v nelinejnoj samofokusirujushhej srede, porozhdaemye nelinejnym defektom. Pis'ma v zhurnal jeksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki, 107, 8: 481–483.

21.Савотченко С.Е. 2018. Энергия запирания поля на нелинейной границе раздела нелинейных дефокусирующих сред. Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики, 108, 8: 175–179.

Savotchenko S.E. 2018. Jenergija zapiranija polja na nelinejnoj granice razdela nelinejnyh defokusirujushhih sred. Pis'ma v zhurnal jeksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki, 108, 8: 175–179.

22.Савотченко С.Е. 2018. Пространственно-периодические неоднородные состояния в нелинейном кристалле с нелинейным дефектом. Журнал экспериментальной и теоретической физики, 154, 3(9): 514–525.

Savotchenko S.E. 2018. Prostranstvenno-periodicheskie neodnorodnye sostojanija v nelinejnom kristalle s nelinejnym defektom. Zhurnal jeksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki, 154, 3(9): 514–525.

23. Savotchenko S.E. Stationary states near the interface with anharmonic properties between linear and nonlinear defocusing media // Solid State Communications. – 2018. – Vol. 283. – No 11. – P. 1–8.

24. Savotchenko S.E. Localization on the interface with nonlinear response between linear and nonlinear focusing media // Surfaces and Interfaces. – 2018. – Vol. 13. – P. 157–162.

25. Sukhorukov A.A. and Kivshar Yu.S. 2001. Nonlinear Localized Waves in a Periodic Medium, Phys. Rev. Lett. 87: 083901.

26. Luther-Davies B., Stegeman G. I., Materials for spatial solitons, in: Spatial Optical Solitons, S. Trillo and W. E. Torruellas, eds., Springer-Verlag, New York, 2001, pp. 19–35.