

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 519.7

DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-4-478-486

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОДЗЕМНОГО ВЫЩЕЛАЧИВАНИЯ НА МАКРОСКОПИЧЕСКОМ УРОВНЕ

MATHEMATICAL MODELING OF IN-SITU LEACHING AT THE MACROSCOPIC LEVEL

О.В. Гальцев, О.А. Гальцева
O.V. Galtsev, O.A. Galtseva

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул.Победы, 85

Belgorod State national research University
Russia, 308015, Belgorod, Pobeda street, 85

E-mail: galtsev_o@bsu.edu.ru, galtseva@bsu.edu.ru

Аннотация

На текущий момент существует огромное количество химических и физических процессов, связанных с взаимодействием жидких и твердых компонент. К таким процессам относится и изучаемый в данной статье процесс подземного выщелачивания урана, никеля, меди, драгоценных металлов и других твердых соединений. Здесь мы будем опираться на математическое описание, предложенное Мейрмановым А.М. [1], где основной идеей является наличие новых условий на свободной (неизвестной) границе между жидкой и твердой фазами («поровое пространство – твердый скелет»). Эти условия выражают обычные законы сохранения массы и вывод математической модели, описывающей процессы на макроскопическом уровне. Предложенный метод позволяет изучить как динамика свободной границы зависит от скорости распространения неоднородного раствора и внешних параметров (температуры, давления и концентрации реагентов).

Abstract

There are a huge number of chemical and physical processes associated with the interaction of liquid and solid components. These processes include the in-situ leaching process of uranium, nickel, copper, precious metals and other solid compounds studied. Here we will rely on the mathematical description proposed by A.M. Meirmanov. [1], where the main idea is the presence of new conditions on the free (unknown) boundary between the liquid and solid phases (“pore space - solid skeleton”). These conditions express the usual laws of conservation of mass and the derivation of a mathematical model describing processes at the macroscopic level. The proposed method allows us to study how the dynamics of the free boundary depend on the propagation velocity of an inhomogeneous solution and external parameters (temperature, pressure and concentration of reagents).

Ключевые слова: гидродинамическое моделирование, флюидопотоки, жидкостно-структурное взаимодействие.

Keywords: hydrodynamic modeling, fluid flows, fluid-structure interaction.

Введение

Эффективная добыча урана и очистка призабойной зоны нефтяных или газовых скважин путем выщелачивания – очень важная, с экономической точки зрения, задача. Реальные залежи урана являются сложными и неоднородными геологическими телами. Неоднородность означает, что интересующие нас свойства (пористость, насыщенность и т. д.) меняются в пространстве. Часто этот факт слабо учитывается на стадии планирования добычи. Например, раствор кислоты, вводимый в скважину, может оказаться далеко от предполагаемой цели. Важную роль играют и иные факторы, такие как концентрация вводимой кислоты, способы ее инъекции и т. д. Поэтому понимание движения жидкостей и механизмов растворения породы в таких гетерогенных пористых средах является основополагающим для добычи урана. В настоящее время выщелачивание горных пород описывается большим спектром математических моделей на макроскопическом уровне [2–5].

Отметим, что в макроскопических моделях каждая точка твердого скелета и жидкость в порах представлены как сплошная среда. Эти предлагаемые модели имеют сходные структуры и принципы, и их дифференциальные уравнения просто постулируются. Обычно динамика жидкости описывается системой фильтрации Дарси. В то же время уравнения диффузии-конвекции довольно разнообразны, и выбор между ними зависит от предпочтений исследователя. Все эти модели содержат неизвестную пористость среды, а дополнительное уравнение для этой пористости также варьируется от модели к модели. Это вполне объяснимо, так как основные механизмы физических процессов сосредоточены на неизвестной (свободной) границе между поровым пространством и скелетом грунта. Растворение пород происходит именно на этой границе.

Р. Барридж и Дж. Б. Келлер [6], Е. Санчез-Паленсиа [7] были первыми, кто предложил описывать макроскопические математические модели фильтрации, опираясь на микроструктуру.

Для этого необходимо:

(а) описать наиболее точно рассматриваемый физический процесс на микроскопическом уровне (уровне пор);

(б) определить набор малых параметров;

(с) вывести макроскопическую модель как асимптотический предел точной модели.

В данной статье воспользуемся результатами работы [8], где была представлена микроскопическая модель движения свободной границы и ее численное решение для одномерной геометрии порового пространства. К сожалению, в [8] не удалось зафиксировать колебание значений концентрации кислоты на свободной границе. Поэтому в настоящей работе было принято решение о численном изучении макроскопической (усредненной) модели, полученной с помощью методов, разработанных в [4]. В частности, используются совершенно новые уравнения переноса для продуктов химических реакций, которые учитывают граничные условия на свободной границе на микроскопическом уровне. Здесь используются некоторые эвристические аксиомы, которые при необходимости могут быть доказаны, а для сохранения точности применяется эквивалентная форма дифференциальных уравнений как система интегральных тождеств.

Физические процессы рассматриваются в ограниченной области Ω из \mathbb{R}^2 . Часть S^+ границы S области Ω моделирует нагнетательные скважины, S^- моделирует насосные скважины, а S^0 моделирует непроницаемую границу области Ω . Сама же область Ω состоит из подобластей $\Omega_f(t)$ – поровое пространство, $\Omega_s(t)$ – твердый скелет, и границы $\Gamma(t)$, разделяющей их (рис. 1–2). $\Gamma(t)$ есть свободная (неизвестная) граница, так как во время выщелачивания скелет растворяется и меняет свою форму. Как правило, такие математические задачи называются задачами со свободной границей.

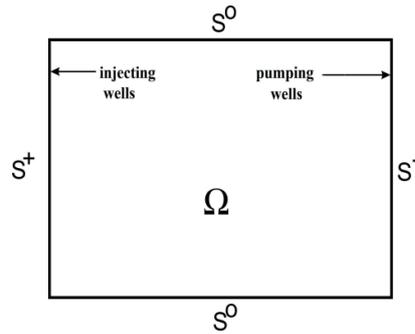


Рис.1. Рассматриваемая область
Fig.1. Considered domain

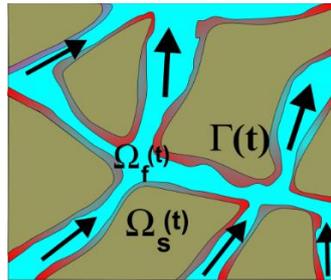


Рис.2. Пористая среда
Fig.2. The porous medium

Постановка задачи

Прежде всего, приведем микроскопическую модель процесса выщелачивания. Пусть в безразмерных переменных

$$\mathbf{x} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad t \rightarrow \frac{t}{T}, \quad \mathbf{v} \rightarrow \frac{T}{L} \mathbf{v}, \quad p \rightarrow L g \rho^0 p.$$

Поведение жидкости в поровом пространстве $\Omega_f(t)$ описывается системой уравнений Стокса

$$\alpha_\mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p = 0, \tag{1}$$

для давления p и скорости жидкости \mathbf{v} .

Воспользуемся уравнением неразрывности, где $\mathbf{v} \equiv 0$ и жидкость в порах

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \chi \mathbf{v}) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\chi(\mathbf{x}, t)$ – характеристическая функция порового пространства, где $\chi = 1$ в $\Omega_f(t)$ и $\chi = 0$ в $\Omega_s(t)$.

Уравнение (2) понимается в смысле теории распределения. Например, как интегральное тождество

$$\int_{\Omega_T} \rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \chi \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \right) dx dt = 0$$

для давления

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \chi(\mathbf{x}, t)\rho_f + (1 - \chi(\mathbf{x}, t))\rho_s,$$

которое справедливо для любой гладкой $\varphi(\mathbf{x}, t)$, обращаемой в ноль на S^+, S^- при $t = 0$ и $t = T$.

В частности [9]

$$(v_n - d_n)\rho_f = -d_n\rho_s, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), t > 0,$$

или

$$v_n = -d_n \delta, \quad \delta = \frac{(\rho_s - \rho_f)}{\rho_f}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), t > 0. \tag{3}$$

Наконец, уравнение неразрывности в дифференциальной форме в поровом пространстве $\Omega_f(t)$ при $t > 0$ примет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{4}$$

Концентрация реагента c определяется уравнением диффузии-конвекции

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \alpha_c \Delta c, \tag{5}$$

а концентрации c_1, c_2, \dots, c_n продуктов химической реакции уравнением

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \tag{6}$$

в $\Omega_f(t)$ при $t > 0$.

В общем случае законы сохранения массы для концентраций на свободной границе будут иметь вид

$$(d_n + \beta - v_n)c + \alpha_c \frac{\partial c}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \tag{7}$$

$$c(c_i - c_i^0) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \tag{8}$$

$$d_n = \beta \gamma c, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \tag{9}$$

где d_n – нормальная скорость границы $\Gamma(t)$ в направлении внешнем к $\Omega_f(t)$, $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ нормальная скорость жидкости, а $\frac{\partial c}{\partial n} = \nabla c \cdot \mathbf{n}$ – нормальная производная концентрации на границе $\Gamma(t)$.

Теперь сформулируем усредненную (макроскопическую) модель для задачи (1), (3)–(6), (7)–(9), описывающую процесс подземного выщелачивания на макроскопическом уровне. Строгий вывод усредненных уравнений является предметом отдельной публикации и включает в качестве первого шага доказательство существования задачи со свободной границе. Здесь просто опишем метод получения усредненной системы уравнений.

Таким образом, чтобы найти хотя бы одну систему уравнений [10], нам необходимы некоторые упрощающие предположения.

Предположим, что

$$\chi = \chi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right), \quad \alpha_\mu = \mu_1 \varepsilon^2, \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \tag{10}$$

где ε есть размер поры и $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ – 1-периодическая по \mathbf{y} функция.

Пусть $\{\mathbf{v}^\varepsilon, p^\varepsilon, c^\varepsilon, c_i^\varepsilon\}$ есть решения системы уравнений (1), (3)–(6), (7), (8) с заданной χ^ε . Для нахождения усредненной системы уравнений $\varepsilon \rightarrow 0$ необходимо перейти к пределу, соответствующему задаче (1), (3)–(6), (7), (8). Этот предел зависит от дифференциальных свойств $\{\mathbf{v}^\varepsilon, p^\varepsilon, c^\varepsilon, c_i^\varepsilon\}$.

Ограничимся формальным (но строгим с физической точки зрения) усреднением. Этот метод называется двухмасштабным методом распространения и основывается на следующих представлениях

$$\mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}\left(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) + o(\varepsilon),$$

$$p^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon),$$

$$c^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = c(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon), \quad \nabla c^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \nabla c(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{y}} C\left(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) + o(\varepsilon),$$

$$c_i^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = c_i(\mathbf{x}, t) + o(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, n$$

с 1-периодическими по \mathbf{y} функциями $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ и $C(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$.

Используя эти представления и хорошо известные уравнения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Y U\left(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) dx dt = \int_Q \left(\int_Y U(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) dy \right) dx dt$$

для 1-периодической по $\mathbf{y} \in Y = (0,1)^3 \subset \mathbb{R}^3$ функции $U(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, устремив $\varepsilon \rightarrow 0$, найдем усредненную систему уравнений для функций $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \int_Y \mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) dy$, $p(\mathbf{x}, t)$, $c(\mathbf{x}, t)$, и $c_i(\mathbf{x}, t)$ с неизвестными коэффициентами.

Динамика жидкости описывается законом Дарси

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\mu_1} \mathbb{A} \cdot \nabla p \quad (11)$$

и неоднородным уравнением непрерывности

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \delta \frac{\partial m}{\partial t} \quad (12)$$

для скорости \mathbf{v} и давления p жидкости в порах.

Диффузия реагента описывается уравнением диффузии-конвекции

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(m \left(c + \frac{1}{\gamma} \right) \right) = \nabla \cdot \left(\alpha_c \mathbb{A} \cdot \nabla c - c \mathbf{v} \right) \quad (13)$$

для концентрации c реагента.

Наконец, концентрация c_i , $i = 1, \dots, n$, продуктов химической реакции определяется с помощью неоднородного транспортного уравнения

$$m \frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_i = \frac{\rho_s}{\rho_f} (c_i - c_i^0). \quad (14)$$

Здесь неизвестная функция m (пористость порового пространства) описывается как

$$m(\mathbf{x}, t) = \int_Y \chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

и неизвестные матрицы \mathbb{A} и \mathbb{D} определяются неизвестной микроструктурой [10]

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^3 \int_{Y_f} (\mathbf{V}^{(i)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \otimes \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i d\mathbf{y}, \\ \Delta_y \mathbf{V}^{(i)} - \nabla \Pi^{(i)} + \mathbf{e}_i &= 0, \quad \nabla_y \cdot \mathbf{V}^{(i)} = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_f(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{V}^{(i)} &= 0, \quad \mathbf{y} \in \gamma(\mathbf{x}, t); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbb{D}(\mathbf{x}, t) = m \mathbb{I} + \int_{Y_f} \mathbb{B}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbb{B}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^3 \nabla_y C^{(i)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \otimes \mathbf{e}_i, \quad (16)$$

где $\Pi^{(i)}$ – давление для некоторой вспомогательной задачи, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ стандартный декартовый базис, а матрица $\mathbb{B} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ определяется как $\mathbb{B} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

1-периодические по \mathbf{y} функции $C^{(i)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, $i = 1, 2, 3$ в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega$ при $t > 0$ являются решением периодической краевой задачи

$$\Delta_y C^{(i)} = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_f(\mathbf{x}, t), \quad (17)$$

$$(\mathbf{e}_i + \nabla_y C^{(i)}) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{y} \in \gamma(\mathbf{x}, t) = \partial Y_f(\mathbf{x}, t) \quad (18)$$

в неизвестной области $Y_f(\mathbf{x}, t) \subset Y$ единичного куба Y .

Поведение неизвестной (свободной) границы $\gamma(\mathbf{x}, t)$ области $Y_f(\mathbf{x}, t)$ определяется дифференциальным уравнением

$$D_v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \beta \gamma c(\mathbf{x}, t), \quad (19)$$

где $D_v(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ есть скорость границы $\gamma(\mathbf{x}, t)$ в точке $\mathbf{y} \in \gamma(\mathbf{x}, t)$ по отношению к внешней нормали \mathbf{v} границы $\gamma(\mathbf{x}, t)$ в области Y_f .

Задача замыкается следующими граничными и начальными условиями

$$p = p^\pm(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S^\pm, \quad t > 0, \quad (20)$$

$$c_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad c = c^+(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S^+, \quad (21)$$

$$\nabla c \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S^-, \quad t > 0, \quad (22)$$

$$\nabla c \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S^0, \quad t > 0, \quad (23)$$

$$c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}), \quad c_i(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \gamma(\mathbf{x}, 0) = \gamma_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (24)$$

Напомним, что задача (11)–(24) получена для заданной функции $\chi(\mathbf{y}, t)$.

Для решения задачи (11)–(24) можно воспользоваться теоремой о неподвижной точке. Например, для известной $\chi(\mathbf{y}, t)$ найдем решение $\{\mathbf{v}, p, c, c_i\}$ задачи (11), (20)–(24), после этого воспользуемся условием (19) как уравнением для функции $\chi(\mathbf{y}, t)$.

Численное решение

Пусть поровое пространство определяется симметричными цилиндрами радиуса r (Рис. 3), $\Omega = \{0 < x < 1\}$, $S^+ = \{x = 0\}$, и $S^- = \{x = 1\}$.

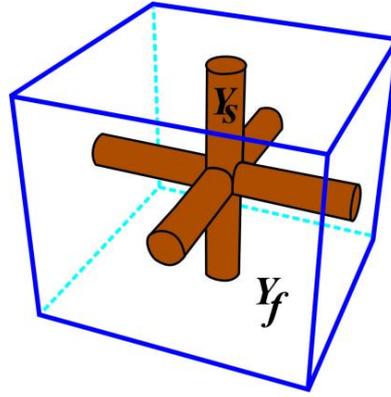


Рис.3. Структура порового пространства
Fig.3. The structure of the pore space

Симметрия порового пространства Y_f означает диагональную форму матриц \mathbb{A} и \mathbb{D} : $\mathbb{A} = \text{diag} (k)$, $\mathbb{D} = \text{diag} (D_0)$. Значения k и D_0 почти не меняются при небольших вариациях m и можно предположить, что это константы. В этих предположениях пористость m есть неизвестная функция радиуса r :

$$m = F(r) = 1 - (1 - m_0)\left(\frac{r}{r_0}\right)^2, \tag{25}$$

где m_0 и r_0 – заданные значения пористости m и радиуса r , система уравнений (11)–(24) примет следующий вид

$$v = -\frac{k}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \delta \frac{\partial m}{\partial t}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(m \left(c + \frac{1}{\gamma} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_c \frac{\partial c}{\partial x} - v c \right), \tag{28}$$

$$m \frac{\partial c_i}{\partial t} + v \frac{\partial c_i}{\partial x} = -(\delta(c_i - c_i^0) + c_i) \frac{\partial m}{\partial t}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \lambda c(x, t), \tag{30}$$

$$p(0, t) = p^+(t), \quad p(1, t) = p^-(t), \quad t > 0, \tag{31}$$

$$c_i(0, t) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad c(0, t) = c^+(t), \quad \frac{\partial c}{\partial x}(1, t) = 0, \tag{32}$$

$$c(x, 0) = c_0(x), \quad c_i(x, 0) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad r(x, 0) = r_0(x), \tag{33}$$

$$m(x, 0) = m_0(x) \approx \pi r_0^2(x) + 2(r_0^2(x) - 2\pi r_0^3(x)).$$

Для численного решения описанной задачи разобьем интервал $[0,1]$ на M подинтервалов и интервал $[0, T]$ на N подинтервалов. Аппроксимируем $c(x, t)$ как c_k^n , значение разностной аппроксимации $c(x, t)$ в точке $x = kh$ и $t = nl$, где $0 \leq k \leq M$ и $0 \leq n \leq N$. Основные разностные аналоги уравнений имеют следующий вид

$$r_k^{n+1} = \Delta t \lambda c_k^n + r_k^n, \tag{34}$$

$$m_k^{n+1} = 1 - (1 - m_k^n) \left(\frac{r_k^{n+1}}{r_k^0} \right), \tag{35}$$

$$p_k^{n+1} = \frac{p_{k+1}^n + p_{k-1}^n}{2} - \Delta t h^2 \mu_1 \frac{m_k^{n+1} - m_k^n}{2k \Delta t}, \tag{36}$$

$$v_k^{n+1} = -\frac{k}{\mu_1 h} (p_k^{n+1} - p_{k-1}^{n+1}), \tag{37}$$

$$c_k^{n+1} = c_k^n + \frac{\alpha_c \Delta t}{m_k^{n+1}} \left(\frac{c_{k+1}^n - 2c_k^n + c_{k-1}^n}{h^2} \right) - \frac{\Delta t}{m_k^{n+1}} \left(\frac{v_k^{n+1} - v_{k-1}^{n+1}}{h} \right) -$$

$$- \frac{v_k^{n+1} \Delta t}{m_k^{n+1}} \left(\frac{c_k^n - c_{k-1}^n}{h} \right) - \frac{c_k^n \Delta t}{m_k^{n+1} \delta} \left(\frac{v_k^{n+1} - v_{k-1}^{n+1}}{h} \right) -$$

$$- \frac{\Delta t}{m_k^{n+1} \delta \gamma} (v_k^{n+1} - v_{k-1}^{n+1}). \tag{38}$$

Для $\delta = 1,5$, $\gamma = 1$, $c_1^0 = 0,001$, $\alpha_c = 0,0004$, $T = 6993 \text{ sec}$, $p^+ = 1000$, $p^- = 0$, $c_0 = 0$, $r_0 = 2^{-1}$ найдем концентрацию c_1 первого продукта химических реакций на насосных скважинах для разных значений $c^+ = 0.1; 0.15; 0.2$ с фиксированным $\lambda = 1$, и для различных значений $\lambda = 0.1; 1; 10$ с фиксированным $c^+ = 0.2$ (Рис. 4–8).

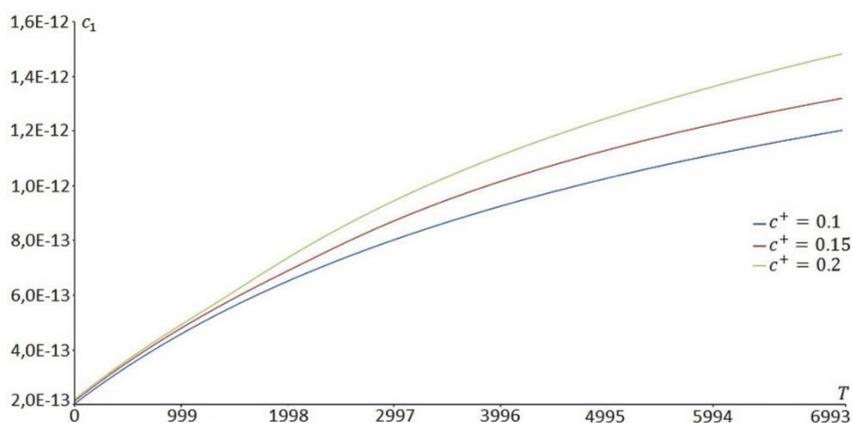


Рис. 4. Макроскопическая модель: концентрация продукта химической реакции в насосных скважинах для разных c^+

Fig. 4. Macroscopic model: the concentration of a chemical reaction product in pumping wells for different c^+

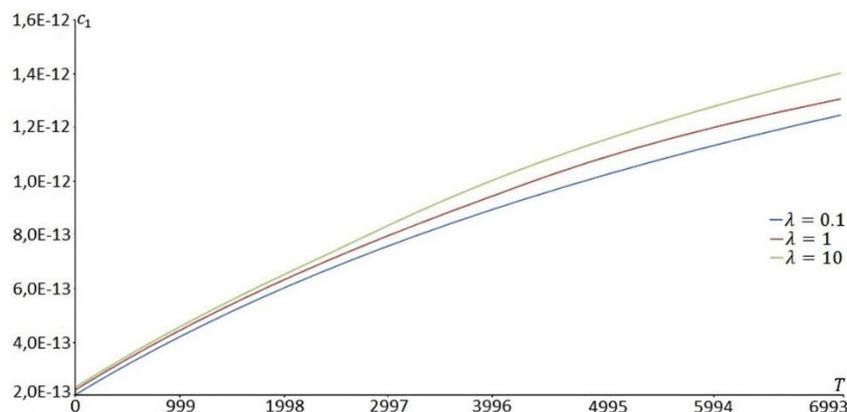


Рис.5. Макроскопическая модель: концентрация продукта химической реакции в насосных скважинах для разных λ

Fig.5. Macroscopic model: the concentration of a chemical reaction product in pumping wells for different λ

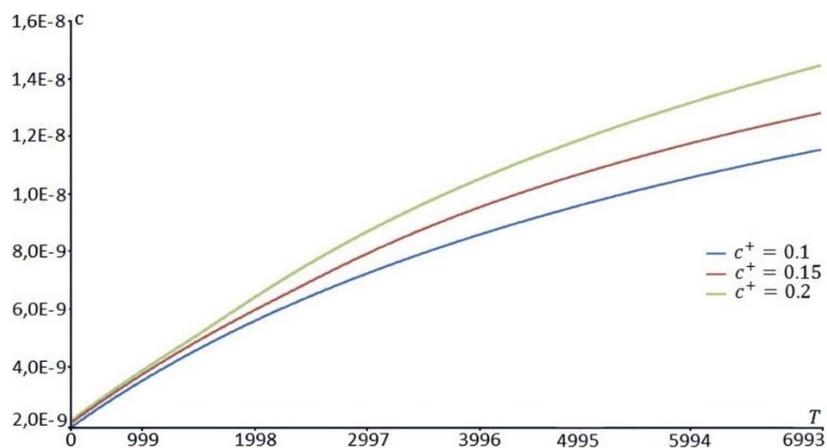


Рис.6. Макроскопическая модель: концентрация кислоты в насосных скважинах для разных c^+

Fig.6. Macroscopic model: acid concentration in pumping wells for different c^+

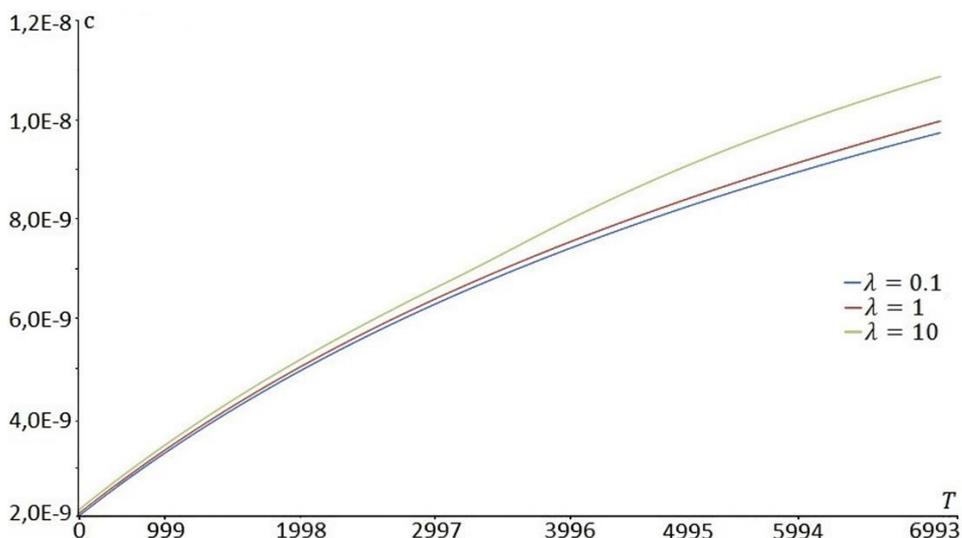


Рис. 7. Макроскопическая модель: концентрация кислоты в насосных скважинах для разных λ
 Fig. 7. Macroscopic model: acid concentration in pumping wells for different λ



Рис.8 . Эволюция во времени свободной границы для одномерной макроскопической задачи
 Fig. 8. The time evolution of the free boundary for a one-dimensional macroscopic problem

Заключение

В представленной статье были исследованы новые математические модели, описывающие взаимодействие кислоты в порах, заполненных жидкостью, с компонентами, которые образуют матрицу горной породы [11], [12], [13], [14], [15]. Наш подход был основан на детальном рассмотрении фундаментальных законов механики и химии в масштабе пор. Для макроскопической модели концентрации реагентов и продуктов химических реакций в насосных скважинах монотонно зависят от постоянной $\beta = \lambda \varepsilon$ в скоростях химических реакций и концентрации c^+ на заданной границе (Рис. 4–8).

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00042.

Список литературы References

1. Meirmanov A.M., Galtsev O.V., Zimin R.N., 2017. Free Boundaries in Rock Mechanics. Berlin-New York: Walter de Gruyter: 229.
2. Golfier F., Zarcone C., Bazin B., Lenormand R., Lasseux D., Quintard M. 2002. On the ability of a Darcy-scale model to capture wormhole formation during the dissolution of a porous medium J. Fluid Mech. 457, 213–254.
3. Kalia N., Balakotaiah V. 2009. Effect of medium heterogeneities on reactive dissolution of carbonates. Chemical Engineering Science 64, 376–390.



4. Cohen C. E., Ding D., Quintard M., Bazin B. 2008. From pore scale to wellbore scale: Impact of geometry on wormhole growth in carbonate acidization. *Chemical Engineering Science* 63, 3088–3099.
5. Panga M.K.R., Ziauddin M., Balakotaiah V. 2005. Two-scale continuum model for simulation of wormholes in carbonate acidization. *A.I.Ch.E. Journal* 51, 3231–3248.
6. Burridge R., Keller J. B. 1981. Poroelasticity equations derived from microstructure. *Journal of Acoustic Society of America* 70, 1140–1146.
7. Sanchez-Palencia E. 1980. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, New York 129.
8. Meirmanov A., Omarov N., Tcheverda V., Zhumaly A. 2015. Mesoscopic dynamics of solid-liquid interfaces. A general mathematical model. *Siberian Electronic Mathematical report*, 12: 884-900.
9. Whitham G. B. 1999. *Linear and nonlinear waves*, Willey, ISBN 978-0-471-94090-6.
10. Meirmanov A. 2013. *Mathematical models for poroelastic flows*. Atlantis Press, Paris.
11. O’Dea R. D., Nelson M. R., El Haj A.J., Waters S.L., Byrne H.M. 2015. A multiscale analysis of nutrient transport and biological tissue growth in vitro. *Math. Med. Biol. Sep*;32(3): 345 - 366 . doi: 10.1093/imammb/dqu015. Epub 2014 Oct 15.
12. Meirmanov A. 2007. Nguetseng’s two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media. *Siberian Mathematical Journal* 48, 519–538.
13. Meirmanov A. 2008. A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization. *SIAM J. Math. Anal.* 40, 1272–1289.
14. Kenneth W.W., Raymond E.D., Larry M.P., Stanley G.G. 2014. *Chemistry* (10th ed.). Belmont, CA: Brooks.
15. Harlow F.H., Welch J.E. 1931. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of fluids*, 8(12):2182.