УДК 517.19
DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-4-411-418

ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОСХОДИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ В УСЛОВИЯХ СУММИРУЕМОГО ПОТЕНЦИАЛА

RESEARCH OF EQUICONVERGENCE FOR DIFFERENTIAL OPERATOR WITH INVOLUTION IN CASE OF SUMMATED POTENTIAL

Е.Ю. Романова
E.Yu. Romanova

Воронежский государственный университет, Россия, 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1

Voronezh State University, Russia,1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006

E-mail: vsu.romanova@gmail.com

Аннотация
В статье изучается дифференциальный оператор L с инволюцией, порожденный дифференциальным выражением $l(y)=y'(x)-Q(x)y(\omega-x), x\in[0,\omega], Q\in L_1([0,\omega],C),$ и краевыми условиями $y(0)=y(\omega)$. Исследование спектральных свойств проводится с помощью метода подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра, спектральности оператора, а также равносходимость спектральных разложений.

Abstract
The paper deals with the differential operator L with involution, defined by a differential expression $l(y)=y'(x)-Q(x)y(\omega-x), x\in[0,\omega], Q\in L_1([0,\omega],C),$ and boundary conditions $y(0)=y(\omega)$. The method of similar operators is used to analyze the spectral properties of the operator. The asymptotic of spectrum and the equiconvergence of spectral decomposition are obtained.

Ключевые слова: спектр оператора, дифференциальный оператор с инволюцией, суммируемый потенциал, метод подобных операторов, асимптотика спектра, спектральные разложения, равносходимость спектральных разложений.
Keywords: spectrum of operator, differential operator with involution, summated potential, similar operators method, asymptotic of spectrum, spectral decomposition, equiconvergence of spectral decomposition.

Постановка задачи

Рассматривается $L_p[0,\omega]$ – банахово пространство суммируемых со степенью $p\in[1,\infty)$ на $[0,\omega]$ функций. Через $L_p=L_p([0,\omega],C)$ определим банахово пространство (пространство Лебега) суммируемых со степенью $p\in[1,\infty)$ на $[0,\omega]$ и со значениями в C функций, для которых конечна величина $\|y\|_p=(\int\limits_0^\omega\|y(t)\|_C^p dt)^{1/p},\ t\in[0,\omega].$ Тогда пространство Соболева будем обозначать через $W_p^1([0,\omega],C)=\{y\in L_p([0,\omega],C),\ p\geq 1: y$ абсолютно непрерывна и $\dot{y}\in L_p([0,\omega],C)\}$.

Рассматривается линейный оператор $L: D(L) \subset L_p([0,\omega],C) \to L_p([0,\omega],C)$, порожденный дифференциальным выражением (см. [Бурлуцкая, 2011; Романова, 2014; Романова, 2016; Baskakov, Krishtal, Romanova, 2017])

$$l(y) = y'(x) - Q(x)y(\omega - x), x \in [0,\omega], Q \in L_1([0,\omega],C),$$

с областью определения

$$y \in D(L) = \{y \in W_p^1([0,\omega],C) : y(0) = y(\omega)\}.$$

Тогда изучаемый оператор L представим в виде $Ly = L^0 y - Vy$, где $(L^0 y)(x) = y'(x)$ будем называть *свободным оператором*, играющим роль невозмущенного оператора, а $(Vy)(x) = Q(x)y(\omega - x)$, $x \in [0,\omega]$, $y \in L_p([0,\omega],C)$ – *возмущением*.

Легко описывается спектр $\sigma(L^0)$ оператора L^0. Он состоит из собственных значений вида $\lambda_n = i\dfrac{2\pi n}{\omega}, n \in Z.$ Соответствующие собственные функции имеют вид $e_n(t) = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, t \in R.$

Отметим, что операторы с инволюцией довольно часто применяются в теории фильтрации (см. [Bucy, Kalman, 1961]), что и объясняет интерес к изучению спектральных свойств такого рода операторов. Простейшая инволюция (отражение) применяется при обращении времени в классической статистической механике неравновесных процессов. Инволютивное отображение применялось в том числе В.А. Плиссом при исследовании субгармонических колебаний, описываемых уравнениями без диссипации (см. [Розовский, 1967]).

В теории возмущенных линейных операторов при изучении дифференциальных операторов, определяемых краевыми условиями на конечном промежутке, используются разнообразные методы (см. [Бурлуцкая, Хромов, 2014; Mityagin, 2004; Djakov, Mityagin, 2013; Savchuk, Shkalikov, 2014]). В данной статье исследование спектральных свойств дифференциального оператора с инволюцией при условии суммируемого потенциала будет проводиться с помощью метода подобных операторов (см. [Романова, 2014; Щербаков, 2013; Baskakov, Derbushev, Shcherbakov, 2011; Shcherbakov, 2013; Baskakov, Polyakov, 2016–2017; Polyakov, 2016.]). Данный метод основывается на построении преобразования подобия исследуемого (возмущенного) оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора (в данном случае свободного оператора), что существенно упрощает изучение исследуемого оператора.

Метод подобных операторов для абстрактных операторов, близких к дифференциальному оператору с инволюцией, действующему в лебеговых пространствах

Построение допустимой тройки, а также предварительное преобразование подобия будем осуществлять для абстрактных операторов, наиболее близких по своим свойствам к изучаемому дифференциальному оператору с инволюцией.

Обозначим через X – банахово пространство, $EndX$ – банахову алгебру линейных ограниченных операторов. Введем в рассмотрение линейный оператор $A: D(A) \subset X \to X$ с компактной резольвентой $R(\cdot, A): \rho(A) \to EndX$.

Предположим, что оператор iA имеет ряд свойств, близких к спектральным свойствам дифференциального оператора с инволюцией L :

- оператор является (инфинитезимальным) генератором периодической периода ω изометрической сильно непрерывной группы операторов $T: R \to EndX$;
- спектр оператора A, обозначаемый через $\sigma(A)$, образует двустороннюю последовательность собственных значений $\lambda_n, n \in Z$, вида $\lambda_n = i\dfrac{2\pi n}{\omega}, n \in Z.$

Тогда, если P_n – проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{\lambda_n\} \subset \sigma(A)$, то $AP_n = \lambda_n P_n, n \in Z.$

Далее каждому оператору будем сопоставлять периодическую периода ω сильно непрерывную операторнозначную функцию $t \mapsto T(t)XT(-t): R \to EndX$, $t \in R$. Тем самым возникает изометрическое периодическое периода ω представление:

$$\tilde{T}: R \to EndX,\ \tilde{T}(t) = T(t)XT(-t),\ t \in R,\ X \in EndX, \tag{1}$$

генератором которого является оператор ad_A со спектром $\sigma(ad_A) = iZ.$

Для функции вида (1) рассмотрим ее ряд Фурье $T(t)XT(-t) \sim \sum\limits_{n \in Z} X_n e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, t \in R,$ где коэффициент Фурье $X_n \in EndX$ имеет вид $X_n = \dfrac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} T(t)XT(-t)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt, n \in Z.$

Ряд $\sum\limits_{n \in Z} X_n$ назовем рядом Фурье оператора X (относительно группы операторов T), а операторы $X_n, n \in Z,$ – коэффициентами Фурье вышеуказанного оператора.

Перейдем непосредственно к построению трансформаторов (в соответствии с терминологией М.Г. Крейна – операторов в пространстве операторов) $J, \Gamma: EndX \to EndX.$

Для этого введем в рассмотрение $L^1_{\omega}(R)$ – банахову алгебру периодических периода ω локально суммируемых функций с нормой

$$\|f\|_1 = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} |f(t)|dt,\ f \in L^1_{\omega}(R),$$

и со свёрткой функций в качестве умножения

$$(f * g)(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} f(t-s)g(s)ds,\ t \in R,\ f, g \in L^1_{\omega}(R).$$

Банахово пространство X наделим структурой банахова $L^1_{\omega}(R)$ - модуля с помощью следующей формулы:

$$f * x = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} f(t)T(-t)xdt,\ f \in L^1_{\omega}(R), x \in X.$$

Тогда на $EndX$ определим структуру банахова $L^1_{\omega}(R)$ - модуля через

$$\varphi X = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} \varphi(t)T(t)XT(-t)xdt,\ \varphi \in L^1_{\omega}(R),\ X \in EndX,$$

причем $\|\varphi X\| \le \|\varphi\|_1 \|X\|.$

Трансформаторы J и Γ (см. [Баскаков, 1987]) на любом операторе $X \in EndX$ будем определять равенствами:

$$JX = X_0 = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} T(t)XT(-t)dt = \varphi X,\ \varphi \equiv 1, \tag{2}$$

$$\Gamma X = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(t)T(t)XT(-t)dt = fX, \tag{3}$$

где $f: R \to C$ – периодическая периода ω функция вида $f(t) = i(t - \frac{\omega}{2}), t \in [0, \omega)$.

Лемма 1. Трансформаторы $J, \Gamma : EndX \to EndX$ ограничены и обладают следующими свойствами:

а) верна оценка $\|\Gamma\| \le \frac{\omega}{4}$;

б) $\Gamma X \in D(ad_A)$ для любого оператора $X \in EndX$, причем верно равенство $ad_A \Gamma X = A\Gamma X - \Gamma X A = X - JX$.

Для определения допустимой тройки для исследуемого оператора всюду в дальнейшем используется понятие аппроксимативной единицы.

Определение 1. Под *аппроксимативной единицей* (для свёртки) понимается последовательность элементов $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ из L^1, обладающих следующими свойствами:

1) $\sup\limits_m \|f_m\|_1 < \infty$,

2) $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f_m(\tau)\,d\tau = 1$,

3) $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{\omega}\int_{\delta}^{\omega} |f_m(\tau)|\,d\tau = 0$, *для любого фиксированного* δ, *удовлетворяющего условию* $0 < \delta < \omega$.

Теперь рассмотрим последовательность функций из $L^1_{\omega}(R)$ вида $f_m(t) = \frac{4}{\omega m t^2}\sin^2\frac{mt}{2}$, которая может быть представлена в виде ряда Фурье $f_m(t) = \sum\limits_{|n|\le m}(1 - \frac{|n|}{m})e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}$. Поскольку последовательность функций (f_m) является положительно определенной, то $\|f_m\|_1 = 1$. В таком случае верно первое свойство из определения аппроксимативной единицы. Другие два свойства определения 1 также легко проверяются, что дает основание использовать в дальнейшем последовательность (f_m) в качестве аппроксимативной единицы.

Пусть x – некоторый вектор из X, и пусть задано некоторое $\varepsilon > 0$. Выберем и зафиксируем такое δ из интервала $(0, \omega]$, что $\|T(-s)x - x\| \le \varepsilon$ при $|x| \le \delta$ (используется свойство сильной непрерывности представления T), и число $m \in N$ такое, что $\int_{\delta}^{\omega} f_m(\tau)\,d\tau < \varepsilon$ (используется третье свойство определения 1). Также в силу определения 1 верно $\lim\limits_{m\to\infty}\|f_m * x - x\| = 0$.

Таким образом, определим последовательности трансформаторов (см. [Романова, 2014; Baskakov, Krishtal, Romanova, 2017]) $J_m X, \Gamma_m X$, используя вышеопределенную последовательность функций (f_m), (2), (3), и равенство $(fX)x = (\Gamma X)x = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(t)T(t)XT(-t)xdt,$ где $f: R \to C$ – периодическая периода ω функция вида $f(t) = i(t - \frac{\omega}{2}), t \in [0, \omega)$:

$$J_m X = JX - J(f_m X) + f_m X = J(X - f_m X) + f_m X, \tag{4}$$

$$\Gamma_m X = \Gamma X - \Gamma(f_m X) = \Gamma(X - f_m X) = (f*(1 - f_m))X, X \in EndX, m \in Z_+. \tag{5}$$

Очевидно, что $J_0 = J, \Gamma_0 = \Gamma.$

Лемма 2. Для любого $m \geq 0$ тройка $(EndX, J_m, \Gamma_m)$ является допустимой для оператора A, причем

1) $\|J_m\| \leq 3,$

2) $\|\Gamma_m\| \leq \frac{5\omega}{m^{\frac{2}{3}}}$, *для всех* $m \geq 1,$

3) $\|\Gamma_m\| \to 0, m \to \infty.$

Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 1. Пусть число $m \in Z_+$ удовлетворяет неравенству $\frac{15\omega}{m^{2/3}}\|B\|_* < \frac{1}{4}$. Тогда оператор $A - B,$ где $B \in EndX$, подобен оператору вида

$$A - J(\tilde{X} - f_m \tilde{X}) = A - J_m \tilde{X} = A - B_0.$$

Оператор $\tilde{X}$ является решением уравнения

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X), \tag{6}$$

в котором $\Gamma = \Gamma_m, J = J_m$. Его можно найти методом последовательных приближений. Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$ осуществляет оператор $I + \Gamma_m \tilde{X}$.

Лемма 3. Существует такое $n_0 \geq m+1, n_0 \in Z_+$, что спектр оператора $A - B$ представим в виде объединения взаимно непересекающихся множеств $\sigma_0, \sigma_k, |k| \geq n_0 + 1$:

$$\sigma(A - B) = \sigma(A_{(n_0)}) \bigcup \left(\bigcup_{|k| \geq n_0+1} \sigma(A_k) \right) = \sigma_0 \bigcup \left(\bigcup_{|k| \geq n_0+1} \sigma_k \right). \tag{7}$$

Метод подобных операторов в исследовании равносходимости дифференциального оператора с инволюцией с суммируемым потенциалом

В дальнейшем будем отождествлять пространство $L_p([0, \omega], C)$ с банаховым пространством $L_{p,\omega} = L_{p,\omega}(R, C)$ периодических периода ω функций, определенных на R со значениями в C и суммируемых со степенью p на $[0, \omega], p \in [1, \infty)$. В пространстве $L_{p,\omega}$ определена группа операторов сдвигов функций $(S(t)x)(s) = x(s+t), s, t \in R, x \in L_{p,\omega}.$

Генератором группы $S: R \to End\, L_{p,\omega}$, является оператор $\frac{d}{dt}$. В таком случае группа изометрий $T(t) = S(T)$.

Функцию Q будем рассматривать как элемент пространства $L_1(R,C)$.

Введем в рассмотрение периодическую периода ω функцию $f: R \to C$ вида $f(t) = i\left(t - \frac{\omega}{2}\right), t \in [0,\omega)$.

Операторы $JV, \Gamma V, V\Gamma V$ имеют следующие представления (см. [Романова, 2014; Baskakov, Krishtal, Romanova, 2017]):

$$((JV)y)(s) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\omega} Q\left(\frac{s-\tau+\omega}{2}\right) y(\tau)d\tau;$$

$$((\Gamma V)y)(s) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\omega} f\left(\frac{\omega-s-\tau}{2}\right) Q\left(\frac{s-\tau+\omega}{2}\right) y(\tau)d\tau;$$

$$((V\Gamma V)y)(s) = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\omega} f\left(\frac{s-\tau}{2}\right) Q\left(\frac{2\omega-s-\tau}{2}\right) Q(s)y(\tau)d\tau.$$

В таком случае верна теорема 1, результатом которой является подобие оператора $L^0 - V$ и оператора $L^0 - J_m \tilde{X}$, где $\tilde{X}$ является решением уравнения (6), а преобразование подобия осуществляет оператор $I + \Gamma_m \tilde{X}$, J_m, Γ_m определены (4), (5) соответственно. Отсюда непосредственно получаем следующие представления возмущенных проекторов

$$\tilde{P}_{(m)} = U^{-1}P_{(m)}U,\ \tilde{P}_k = U^{-1}P_kU,\ |k| \geq m+1,$$

где $\tilde{P}_{(m)}$ – проектор на подпространство $U^{-1}X_{(m)}$, $\tilde{P}_k$ – проектор на подпространство $U^{-1}X_k$, и $U = I + \Gamma_m \tilde{X}$.

В следующей теореме осуществляется предварительное преобразование подобия, которое позволит получить далее результат о равносходимости спектральных разложений исследуемого оператора.

Теорема 2. Пусть число $m \in Z_+$ удовлетворяет неравенству $\frac{5\omega}{m^{2/3}}\|V\|_1 < 1$ (т. е. оператор $I + \Gamma_m V = I + (f * (1 - f_m))V$) обратим). Тогда оператор $L = L^0 - V$ подобен оператору $\tilde{L} = L^0 - \tilde{V}$, где

$$\tilde{V} = J_m V + (I + \Gamma_m V)^{-1}(V\Gamma_m V - (\Gamma_m V)J_m V),$$

причем имеет место равенство

$$(L^0 - V)(I + \Gamma_m V) = (I + \Gamma_m V)(L^0 - \tilde{V}).$$

Операторы $J_m V, \Gamma_m V, V\Gamma_m V, (\Gamma_m V)(J_m V), \tilde{V}$ являются компактными.

Из спектрального разложения (7) очевидным образом следует

Теорема 3. Дифференциальный оператор

$$L: D(L) \subset L_p([0,\omega],C) \to L_p([0,\omega],C),$$

является оператором с компактной резольвентой и существует такая нумерация собственных значений, что $\sigma(L)$ представим в виде

$$\sigma(L)=\sigma_{(m)}\bigcup\left(\bigcup_{|n|\geq m+1}\sigma_n\right),$$

где $\sigma_{(m)}$ – конечное множество, $\sigma_n, |n|\geq m+1,$ определяются равенствами

$$\sigma_n=\{i\frac{2\pi n}{\omega}+\alpha_n^{\pm}\},\ \lim_{n\to\infty}\alpha_n^{\pm}=0.$$

Отметим, что если рассматривать потенциал в пространстве $L_2[0,\omega]$, то для асимптотики спектра можно использовать результаты статей (см. [Романова, 2014; Baskakov, Krishtal, Romanova, 2017]).

Пусть $\tilde{P}_{(m)}, \tilde{P}_n, |n|\geq m+1,$ – спектральные проекторы Рисса, построенные по оператору L и множествам $\sigma_{(m)}$, $\sigma_n, |n|\geq m+1,$ соответственно.

Теорема 4. Имеет место равносходимость спектральных разложений операторов L и L^0:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{P}_n-P_n\right\|=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tilde{P}_{(m)}+\sum_{|k|=m+1}^{n}(1-\frac{|k|}{n})\tilde{P}_k-P_{(m)}-\sum_{|k|=m+1}^{n}(1-\frac{|k|}{n})P_k\right\|=0.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00354.

The reported study was funded by the RFBR according to the research project № 18-31-00354.

Список литературы
References

1. Баскаков А.Г. 1987. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж, Изд-во ВГУ, 164.

Baskakov A. G. 1987. Harmonic analysis of linear operators [Garmonicheskii analiz lineinykh operatorov]. Voronezh, Izdatel’stvo Voronezhskogo Universiteta,164 (in Russian).

2. Бурлуцкая М.Ш. 2011. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций функционально-дифференциального оператора с инволюцией. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, № 2, 64–72.

Burlutskaya M.Sh. 2011. Asimptoticheskie formuly dlya sobstvennyh znachenij i sobstvennyh funkcij funkcional'no-differencial'nogo operatora s involyuciej [Asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions of the simplest functional-differential operator with involution]. Statements of Voronezh State University, № 2, 64–72 (in Russian).

3. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. 2014. Функционально-дифференциальные операторы Дирака с периодическими краевыми условиями. Доклады академии наук, Т.454. № 1, 15–17.

Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. 2014. Funkcional'no-differencial'nye operatory Diraka s periodicheskimi kraevymi usloviyami. [Functional-differential Dirac operators with periodic boundary conditions]. Reports of the Academy of Sciences, T.454. № 1, 15–17.

4. Розовский М.И. 1967. Итоги науки. Упругость и эластичность. Механика упруго наследственных сред. М., ВИНИТИ, 250.

Rozovskii M. I. 1967. Itogi nauki. Uprugost` I elastichnost`. Mehanika uprugonasledstvennih sred [The results of science. Firmness and elasticity. Mechanics of elastichereditary environment]. Moscow, VININTI, 250 (in Russian).

5. Романова Е.Ю. 2014. Метод подобных операторов в спектральном анализе дифференциального оператора с инволюцией. Научные ведомости Белгородского государственного университета, № 5(176).34, 73–78.

Romanova E.Yu. Metod podobnih operatorov v spektralnom analize differenzialnogo operatora s involyziey [Method of similar operator in spectral analysis of differentional equation with involution]. Scientific statements of Belgorod State University, № 5(176).34, 73–78(in Russian).

6. Романова Е.Ю. 2014. Спектральный анализ оператора Дирака в лебеговых пространствах. Антипериодические краевые условия и краевые условия Дирихле. Научные ведомости Белгородского государственного университета, № 19(190).36, 57–63.

Romanova E.Yu. 2014. Spektralnii analiz operatora Diraka v lebegovih prostranstvah. Antiperiodicheskie kraevie usloviya i kraevie usloviya Dirihle [Spectral analysis of Dirac operator in the lebesgue spaces. Antiperiodic boundary conditions and Dirichlet`s boundary conditions]. Scientific statements of Belgorod State University, № 19(190).36, 57–63(in Russian).

7. Романова Е.Ю. 2015. Спектральный анализ оператора Дирака в лебеговых пространствах. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, № 2, 142–149.

Romanova E.Yu. 2015. Spektralnii analiz operatora Diraka v lebegovih prostranstvah [Spectral analysis of Dirac operator in lebesgue spaces]. Statements of Voronezh State University, № 2, 142–149. (in Russian)

8. Romanova E.Yu. 2016. Spectral analysis of a differential operator with involution. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 213, No. 6, 897–909.

9. Щербаков А.О. 2013. Спектральный анализ несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом. Научные ведомости БелГУ. № 11(154). 31, 102–108.

Shcherbakov A. O. 2013 Spektralnii analiz nesamosoprjazhonnogo operatora Shturma-Liuvilla s singulyarnim potenzialom [Spectral analysis of the non-self-adjoint Sturm–Liouville operator with a singular potential]. Scientific statements of Belgorod State University, № 11(154). 31, 102–108(in Russian).

10. Baskakov A. G, Derbushev A. V., Shcherbakov A. O. 2011.The method of similar operators in the spectral analysis of the nonselfadjoint Dirac operator with nonsmooth potential. Izv. Math. 75, no. 3, 445–469.

11. Baskakov A.G, Krishtal I. A., Romanova E. Yu. 2017. Spectral analysis of a differential operator with an involution. J. Evol. Equ. 17, 669–684.

12. Baskakov A. G., Polyakov D. M. 2017. The method of similar operators in the spectral analysis of the Hill operator with nonsmooth potential. Sb. Math., 208:1, 1–43.

13. Baskakov A. G., Polyakov D. M. 2016. Spectral Properties of the Hill Operator. Math. Notes, 99:4, 598–602.

14. Bucy R.S., Kalman R. E. 1961. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. J. Basic Eng 83(1), 95–108.

15. Djakov P., Mityagin B. 2013. Equiconvergence of spectral decompositions of Hill-Schrödinger operators. J. Differential Equations, 255, 3233–3283.

16. Mityagin B. 2004. Spectral expansions of one-dimensional periodic Dirac operators. Dyn. Partial Differ. Equ., 1, 125–191.

17. Polyakov D. M. 2016. Spectral analysis of a fourth order differential operator with periodic and antiperiodic boundary conditions, St. Petersburg Mathematical Journal, 27:5, 789–811.

18. Polyakov D. M. 2016. Spectral properties of an even-order differential operator. Differential Equations, 52:8, 1098–1103.

19. Savchuk A., Shkalikov A. 2014. The Dirac Operator with Complex-Valued Summable Potential. Math. Notes, 96 (5), 777–810.

20. Shcherbakov A. O. 2013. To the spectral analysis of the Sturm–Liouville operator with a singular potential. Intern. Scientific Journal "Spectral and Evolution Problems", Vol. 23,188–191.